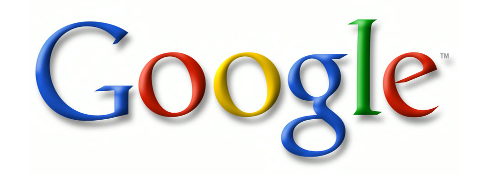


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

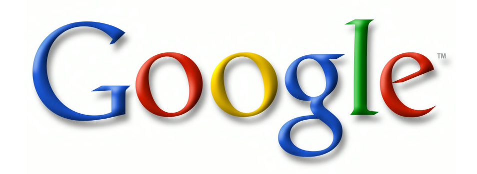
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


Stanford University Libraries
3 6105 000 992 847

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

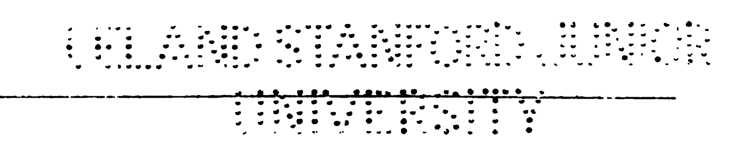
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Neun und zwanzigster Band.

In vier Heften.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Berlin, 1845.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

116001

Inhaltsverzeichnifs
des neun und zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

Analysis.

1.

Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum.

(Auctore Dr. *Georgio Rosenhain* Breslav.)

(Cont. dissert. No. 21. tom. XXVIII. fasc. III.)

Caput II.

De reductione algebraica integralium functionum algebraicarum.

11.

Si designamus, ut supra, per y radicem quamlibet aequationis irreductibilis

$$\varphi(x,y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n = 0,$$

cuius coëfficientes p_m *polynomia* data ipsius x sunt, per λ_α et m numeros quoslibet integros positivos, per b quantitatem constantem, per $N_{\alpha+1}$ functionem rationalem ipsius x, per α denique quemlibet e numeris $1, 2, 3, \dots n-1$, integrale

$$100. \quad \int_c^x \frac{N_{\alpha+1}\, y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)}\, dx$$

manifesto exhibetur ut aggregatum lineare integralium

$$101. \quad \int_c^x \frac{x^{\lambda_\alpha} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)}\, dx, \qquad 102. \quad \int_c^x \frac{y^{n-\alpha-1}}{(x-b)^m\, \varphi'(y)}\, dx$$

diversis ipsorum m, λ_α valoribus respondentium, idque solorum (101.), aut ipsorum (101.) et (102.), prout $N_{\alpha+1}$ integra et fracta est. Quaestio autem de reductione algebraica nobis est de numero minimo integralium (101.) et (102.), quam minimis numerorum λ_α et m valoribus respondentium, ad quorum aggregatum lineare, addita functione algebraica, integralia (101.) et (102.) cetera, ad quoslibet ipsorum λ_α et m valores pertinentia, omnia revocantur.

De reductione integralium (101.) $\int_c^x \frac{x^{\lambda_\alpha} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)}\, dx$ quaerentes, in aequatione (27.) supra inventa

$$27. \quad \frac{d \sum_{1}^{n-1}{}_v B_v \left(p_0 y^v + p_1 y^{v-1} + p_2 y^{v-2} + \dots + p_{v-1} y + \frac{v}{n} p_v\right)}{dx} = \frac{\sum_{1}^{n-1}{}_r N_{r+1}\, y^{n-r-1}}{\varphi'(y)},$$

in qua erat

$$N_{r+1} = \sum_{1}^{n-1}{}_{v} (B'_v I_{r,v} + B_v K_{r,v})$$

et

40. $$I_{r,v} = I_{v,r} = \frac{n-v}{n} r p_r p_v - \sum_{1}^{r}{}_{m} (v-r+2m) p_{r-m} p_{v+m}$$
$$= \frac{n-r}{n} v p_v p_r - \sum_{1}^{v}{}_{m} (r-v+2m) p_{v-m} p_{r+m},$$

41. $$K_{r,v} = \frac{n-v}{n} r p_r p'_v - \sum_{1}^{r}{}_{m} \{(v-r+2m) p_{r-m} p'_{v+m} - m(p_{r-m} p'_{v+m} - p_{v+m} p'_{r-m})\}$$
$$= \frac{n-r}{n} v p'_v p_r - \sum_{1}^{v}{}_{m} \{(r-v+2m) p'_{v-m} p_{r+m} + m(p_{v-m} p'_{r+m} - p_{r+m} p'_{v-m})\},$$

ponamus functiones rationales B_v ipsius x integras esse. Tum etiam ipsae N_{r+1} ipsius x erunt functiones integrae, atque ostendendum erit, pro gradibus satis altis polynomiorum B_v, eorum constantes semper ita determinari posse, ut $n-2$ polynomia N_2, N_3, N_4, ... N_α, $N_{\alpha+2}$, ... N_n omnes identice evanescant, quo tamen constantes omnes nondum consumtae sint, ita ut etiam reliquis apte determinatis, certus terminorum numerus ex ipsa functione integra $N_{\alpha+1}$ exterminari queat.

Certis formis specialibus aequationis $\varphi(x, y) = 0$ exceptis, hac ratione semper invenietur numerus minimus eorum integralium (101.), ad quae cetera algebraice reducuntur, quia functionibus B_v integris positis (exceptis illis casibus excipiendis) numerus coëfficientium constantium in functionibus B_v determinandarum tantus erit, quantus pro dato gradu polynomii $N_{\alpha+1}$ maximus esse potest. Formae excipiendae aequationis $\varphi(x, y) = 0$ eae sunt, pro quibus inter coëfficientes constantes $n+1$ polynomiorum p_m intercedunt tales relationes, quarum ope, et quoties functionum B_v aliquae certis denominatoribus gaudent, numeratores $n-2$ functionum N_2, N_3, ... N_α, $N_{\alpha+2}$, ... N_n et pars fracta genuina ipsius $N_{\alpha+1}$ exterminari queant, aliis constantibus numeratorum functionum B_v per alias apte determinatis; atque hac eliminatione facta, in parte integra functionis $N_{\alpha+1}$ nihilominus numerus constantium indeterminatarum maior remaneat, quam is, qui invenitur, si functiones B_v parte fracta genuina omnino carent. Unde his casibus e functione integra $N_{\alpha+1}$ gradus dati maior terminorum numerus exterminari poterit, ubi functiones B_v illis denominatoribus datis gaudent, quam ubi ab initio integrae ponuntur. Quae tamen relationes quales sint, infra elucebit, ubi de reductione integralium

$\int_c^x \frac{y^{n-\alpha-1}}{(x-b)^m \varphi'(y)} dx$ agetur. Hoc loco satis erit, demonstrare, functionibus B_ν integris positis, ex aequatione (27.) ratione commemorata semper inveniri posse numerum finitum valorum λ_α, ex ipso α et e gradibus polynomiorum $I_{r,\nu}$ et $K_{r,\nu}$ pendentem, aut minimum aut casibus illis exceptis eadem via etiam comminuendum, eius modi, ut ad aggregatum lineare integralium $\int \frac{x^{\lambda_\alpha} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)} dx$, quae his valoribus numeri λ_α respondent, functione algebraica addita, revocentur cetera integralia (101.) eidem α et cuilibet e numero infinito ceterorum valorum ipsius λ_α respondentia.

Gradus $n-1$ polynomiorum B_ν quum plane sint indeterminati, nihil impedit, quominus omnium eundem b esse statuamus; ubi enim conditiones, quibus ab eorum coëfficientibus constantibus satisfieri debet, graduum aequalitatem non permittunt, ipsae nonnullas iubebunt evanescere e numero coëfficientium constantium, quae potestates altissimas ipsius x afficiunt; unde functiones B_ν gradus assequentur diversos. Continebunt igitur $n-1$ polynomia B_ν gradus b^{ti}, $(n-1)(b+1)$ terminos, quorum coëfficientes constantes ad arbitrium determinare licet, atque eas in id consumere nobis proposuimus, ut, siquidem numerus b satis magnus fuerit, $n-2$ e $n-1$ polynomiis N_{r+1} identice evanescant, et ex ipso $(n-1)^{\text{to}}$ $N_{\alpha+1}$ etiam certus terminorum numerus exterminetur. Quia pro omnibus valoribus 1, 2, 3, ... $n-1$ indicis r habemus $N_{r+1} = \sum_1^{n-1}{}_\nu (B'_\nu I_{r,\nu} + B_\nu K_{r,\nu})$, termini polynomiorum N_{r+1} manifesto erunt functiones lineares homogeneae coëfficientium constantium $n-1$ functionum B_ν, ideoque ipsi 0 aequales positi praebebunt inter has coëfficientes systemata aequationum linearium, quarum nullus terminus non ductus est in unam e quantitatibus determinandis. His autem aequationibus constantes determinandae nulla exceptione satisfacere debent, neque, ut possint, poscitur, ut novae intercedant relationes inter constantes datas polynomiorum p_0, p_1, p_2, ... p_n. Quoties igitur aequationum illarum, quas termino a quantitatibus inveniendis libero carere videmus, ν aut adeo $\nu+\sigma$ non sunt nisi inter ν e quantitatibus determinandis, neque coëfficientes datae polynomiorum p_m forte eiusmodi sunt, ut istarum $\nu+\sigma$ aequationum nonnullae, quarum tamen numerus $\tau \geqq \sigma+1$ esse debet, e ceteris sponte proveniant, ν quantitates, inter quas sunt, omnes evanescere debent, ut satisfiat quibuslibet ν e $\nu+\sigma$ aequationibus. Patet vero, systemata talia $\nu+\sigma$ aequationum inter ν incognitas inveniri posse in numero aequationum ad ter-

minos altissimos polynomiorum N_{r+1} exterminandos necessariarum, siquidem polynomia $I_{r,v}$ et polynomia $K_{r,v}$, diversis indicum r et v valoribus respondentia, utraque gradibus diversis gaudeant; unde ea confirmantur, quae supra adnotavimus de gradibus functionum B_v infra b^{tum} deprimendis.

Eodem modo sequitur, si vice versa inter aliquas e certo numero ν quantitatum indeterminatarum datae sint aequationes lineares, termino a quantitatibus inveniendis libero carentes, e quibus hae quantitates aliae per alias determinarentur, ac si ex aliis causis intelligatur, omnes ν quantitates evanescere debere, ut aequationibus datis satisfiat omnibus, numerum earum aequationum datarum, e quibus ceterae sponte profluant, numerum ν quantitatum incognitarum aut aequare aut superare, et aequationes datas esse inter omnes ν quantitates incognitas, sive harum ν quantitatum nullam esse, quin in una saltem ex aequationibus datis inveniatur, nec non, si numerus earum aequationum datarum, e quibus ceterae sponte profluant, sit $\nu+\sigma$, earumque a non nisi $a-\tau$ contineant e ν quantitatibus inveniendis, esse debere $\tau \leqq \sigma$. Aliter enim ex aequationibus datis non omnes quantitates inveniendae evanescent, sed aliquae indeterminatae remanebunt, quod est contra hypothesin.

His praemissis sine negotio perspicitur, numerum terminorum, quos $n-1$ polynomia N_{r+1} continent, numerum $(n-1)(b+1)$ coëfficientium constantium $n-1$ functionum B_v aut aequare aut superare, nec non quamlibet earum certe in uno illorum terminorum inveniri, unde non necesse erit, prolixius demonstrare, inter coëfficientes constantes polynomiorum p_m tales relationes intercedere non posse, quae numerum terminorum $n-1$ polynomiorum N_{r+1} minorem quam $(n-1)(b+1)$ reddant. Ex aequatione enim

$$27.\qquad \frac{d\sum_1^{n-1}{}_v B_v\left(p_0 y^v+p_1 y^{v-1}+\dots+p_{v-1}y+\frac{v}{n}p_v\right)}{dx}=\frac{\sum_1^{n-1}{}_r N_{r+1}\,y^{n-r-1}}{\varphi'(y)}$$

sequitur, $(n-1)(b+1)$ constantes $n-1$ polynomiorum B_v omnes valorem ipsius 0 sibi poscere, ubi $n-1$ polynomia N_{r+1} identice evanescunt. Nam aliter aequationis (27.) pars quidem dextra evanesceret, sed sinistra non evanesceret, ideoque y esset radix aequationis rationalis gradus n^{to} minoris; quod est contra hypothesin. Numerus igitur terminorum in $n-1$ polynomiis N_{r+1} contentorum erit $(n-1)b+k \geqq (n-1)b+n-1$, nec numerus k ex ipso b pendebit, sed e solis gradibus datis polynomiorum $I_{r,v}$ et $K_{r,v}$; ipsum vero N_{a+1}, quia constantibus functionum B_v non determinatis identice evanescere non potest, certe $b-1$ terminos continebit, unde numerus terminorum in ceteris $n-2$ po-

lynomiis N_2, N_3, ... N_α, $N_{\alpha+2}$, ... N_n contentorum numquam maior esse quam $(n-2)b+k+1$, ideoque b semper satis magnus sumi poterit, ut numerus $(n-1)(b+1)$ quantitatum determinandarum superet numerum terminorum in $n-2$ polynomiis N_{r+1} exterminandis contentorum; quo facto tota aequatio (29.) non simul identice evanescet cum his $n-2$ polynomiis N_2, N_3, ... N_α, $N_{\alpha+2}$, ... N_n. Ut enim $N_{\alpha+1}$, constantibus functionum B_v non determinatis, identice evanescere posset, et $n-1$ polynomia $I_{\alpha,v}$ et $n-1$ polynomia $K_{\alpha,v}$ pro omnibus indicis v valoribus 1, 2, 3, ... $n-1$ identice evanescere deberent, ideoque propter aequationes $I_{\alpha,v}=I_{v,\alpha}$, $K_{\alpha,v}+K_{v,\alpha}=I'_{\alpha,v}$ in nullo $n-1$ polynomiorum N_{r+1} neque B_α neque eius derivata B'_α inveniretur, unde aequationis (27.) pars quidem dextra a constantibus functionis B_α libera esset, neque tamen sinistra, quod contra hypothesin aequationis $\varphi(x,y)=0$ irreductibilis esse vidimus. Et generaliter inter constantes polynomiorum p_m relationes tales intercedere non possunt, quibus quaelibet ν ex omnibus $n-1$ polynomiis

$$N_{r+1} = \sum_{1}^{n-1}{}_v (B'_v I_{r,v} + B_v K_{r,v})$$

terminorum $B'_v I_{r,v} + B_v K_{r,v}$, quibus conflantur, non nisi $\nu-\sigma$ contineant iisdem $\nu-\sigma$ valoribus indicis v respondentes, siquidem σ designat numerum integrum maiorem quam 0. Nam si tales relationes darentur, evanescentibus identice omnibus $n-1$ polynomiis N_{r+1}, omnes constantes $n-1$ functionum B_v non evanescerent; quod absurdum esse vidimus. Quod non minus simpliciter sequitur e proprietate determinantis a clarissimo *Jacobi* in commentatione „De forma et proprietatibus determinantium" (vid. Diar. *Crell.* tom. XXI. pag. 290) demonstrata, scilicet: „Determinans conflatum e $(n-1)^2$ elementis

$$\begin{array}{ccccc}
I_{r_1,v_1}, & I_{r_2,v_1}, & I_{r_3,v_1}, & \dots & I_{r_{n-1},v_1}, \\
I_{r_1,v_2}, & I_{r_2,v_2}, & I_{r_3,v_2}, & \dots & I_{r_{n-1},v_2}, \\
I_{r_1,v_3}, & I_{r_2,v_3}, & I_{r_3,v_3}, & \dots & I_{r_{n-1},v_3}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
I_{r_1,v_{n-1}}, & I_{r_2,v_{n-1}}, & I_{r_3,v_{n-1}}, & \dots & I_{r_{n-1},v_{n-1}}
\end{array}$$

abire in productum a duobus Determinantibus

$$\Sigma \pm I_{r_1,v_1} I_{r_2,v_2} I_{r_3,v_3} \dots I_{r_\nu,v_\nu} \,.\, \Sigma \pm I_{r_{\nu+1},v_{\nu+1}} I_{r_{\nu+2},v_{\nu+2}} I_{r_{\nu+3},v_{\nu+3}} \dots I_{r_{n-1},v_{n-1}}$$

quoties pro indicis r valoribus $r_1, r_2, r_3, \dots r_\nu$ evanescant $n-1-\nu$ elementa

$$I_{r,v_{\nu+1}},\quad I_{r,v_{\nu+2}},\quad I_{r,v_{\nu+3}},\quad \dots\quad I_{r,v_{n-1}}."$$

Designavimus autem per $r_1, r_2, r_3, \dots r_{n-1}$ et per $v_1, v_2, v_3, \dots v_{n-1}$ valores 1, 2, 3, ... $n-1$ indicum r et v utrosque secundum legem aliquam

ordinatos. Ubi enim pro iisdem ν valoribus omnibus $r_1, r_2, r_3, \ldots . r_\nu$ indicis r unum tantum e ν elementis $I_{r,v_1}, I_{r,v_2}, I_{r,v_3}, \ldots . I_{r,v_\nu}$ ipsi 0 aequale sit, Determinans $\Sigma \pm I_{r_1,v_1} I_{r_2,v_2} I_{r_3,v_3} \ldots \ldots I_{r_\nu,v_\nu}$ ideoque etiam ipsum $\Sigma \pm I_{r_1,v_1} I_{r_2,v_2} I_{r_3,v_3} \ldots . I_{r_{n-1},v_{n-1}}$ evanescunt, quod est contra hypothesin, quia aequationem $\varphi(x,y) = 0$ radicibus diversis gaudere, sive, quod idem valere vidimus, Determinans $\Sigma \pm I_{r_1,v_1} I_{r_2,v_2} I_{r_3,v_3} \ldots . I_{r_{n-1},v_{n-1}}$ identice non evanescere supposuimus. Unde sequitur inter $n-1$ polynomia N_{r+1} numquam inveniri ν, quae tantum e numero functionum B_v minori quam ν pendent.

Si igitur per $N_{\alpha+1}$ quodlibet e $n-1$ polynomiis N_{r+1} designatur, demonstravimus, constantes $n-1$ functionum B_v semper ita determinari posse, ut $n-2$ polynomia $N_2, N_3, N_4, \ldots . N_\alpha, N_{\alpha+2}, \ldots . N_n$ quidem identice evanescant, neque tamen $N_{\alpha+1}$, nisi quidem b infra limitem certum A, e gradibus polynomiorum $I_{r,v}$ et $K_{r,v}$ pendentem, decrescat. Coëfficientibus constantibus $n-1$ functionum B_v hac ratione determinatis aequatio (27.) abit in hanc:

$$103.\quad \frac{d\sum_1^{n-1}{}_v B_v\left(p_0 y^v + p_1 y^{v-1} + \ldots + p_{v-1} y + \frac{v}{n} p_v\right)}{dx} = \frac{N_{\alpha+1} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)}.$$

Si b limitem illum A aequat, coëfficientes constantes $n-1$ functionum B_v omnes determinatae sunt praeter unam, per quam tota aequatio (103.) dividitur; sin vero b limitem A m unitatibus superat, sive si $b = A+m$, in aequatione (103.) $m+1$ constantes functionum B_v etiam indeterminatae inerunt. Gradus autem polynomii $N_{\alpha+1}$ generaliter totidem unitatibus crescit atque ipse b; ubi igitur designatur per ν_α gradus, quo $N_{\alpha+1}$ pro $b = A$ gaudet, postquam constantes polynomiorum B_v ita determinata sunt, ut aequatio (27.) in ipsam (103.) abeat, generaliter pro $b = A+m$ gradus ipsius $N_{\alpha+1}$ in $\nu_\alpha + m$ abibit; unde $m+1$ constantes, quae posito $b = A+m$ in aequatione (103.) adhuc indeterminatae inveniuntur, praeter unam, per quam totam aequationem dividere licet, generaliter in id consumi possunt, ut e polynomio $N_{\alpha+1}$ m termini in

$$x^{\nu_\alpha+m-1},\quad x^{\nu_\alpha+m-2},\quad x^{\nu_\alpha+m-3},\quad \ldots .\quad x^{\nu_\alpha}$$

ducti exterminentur. Sit igitur m aut 0 aut numerus quilibet integer positivus, aequatio (103.), ratione modo exposita, praebebit sequentem

$$104.\ \int \frac{x^{\nu_\alpha+m} y^{n-\alpha-1} dx}{\varphi'(y)} = \int \frac{M_{\alpha+1} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)} dx + \sum_1^{n-1}{}_v B_v\left(p_0 y^v + p_1 y^{v-1} + \ldots + p_{v-1} y + \frac{v}{n} p_v\right)$$

reductionem algebraicam integralis $\int \frac{x^{\nu_\alpha+m} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)} dx$ continentem; siquidem

$M_{\alpha+1}$ designat polynomium ipsius x gradus $(\nu_\alpha-1)^{ti}$ coëfficientibus datis, quae aeque ac coëfficientes $n-1$ polynomiorum B_ν e numero m et e gradibus et coëfficientibus datis polynomiorum p_m pendent.

Casibus specialibus fieri poterit, ut pro valoribus satis magnis numeri m ad dextram partem aequationis (104.) etiam adiiciendum sit aggregatum lineare numeri finiti integralium formae $\int \frac{x^\lambda y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)}dx$ in quibus exponentes λ sunt numeri integri positivi minores quam $\nu_\alpha+m$; quos tamen casus hoc loco non ulterius prosequimur, sed tantum adnotamus, eos locum habere, quoties polynomia p_m ita comparata sint, ut pro certis numeri m valoribus terminus altissimus polynomii $N_{\alpha+1}$ in $x^{\nu_\alpha+m}$ ductus in aequatione (103.) sponte evanescat ope aequationum ad cetera $n-2$ polynomia N_{r+1} exterminanda necessariarum. Patet autem his casibus gradum polynomii $M_{\alpha+1}$ in aequatione (104.), constantibus indeterminatis aequationis (103.) apte consumtis, tot unitatibus comminiri posse, quot dentur valores numeri m naturae assignatae, ita ut hoc modo aequatio (103.) abeat in hanc

$$105. \quad \int \frac{x^{\nu_\alpha-c+m}y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)}dx$$

$$=\int \frac{K_{\alpha+1}+M_{\alpha+1}}{\varphi'(y)}y^{n-\alpha-1}dx+\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} B_\nu\left(p_0y^\nu+p_1y^{\nu-1}+\ldots+p_{\nu-1}y+\frac{v}{u}p_\nu\right),$$

ubi $K_{\alpha+1}=\beta_1x^{\lambda_1}+\beta_2x^{\lambda_2}+\ldots+\beta_cx^{\lambda_c}$, et $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3\ldots>\lambda_c$ sunt numeri integri positivi, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_c$ autem constantes datae, quarum i primae $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_i$ ipsi 0 aequales ponendae sunt, si $\lambda_i>\nu_\alpha-c+m>\lambda_{i+1}$, et ubi designetur per $M_{\alpha+1}$ polynomium datum ipsius x gradus $(\nu_\alpha-1-c)^{ti}$, per m vero numerus quilibet integer positivus, zero non excepto, pro quo $\nu_\alpha+m-c$ nullum e numeris datis $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_c$ aequat.

Cuius rei exemplum dedit clarissimus *Richelot* in praelectionibus, quibus nos adfuimus, de integralibus hyperellipticis in universitate Regiomontana (anno 1840) habitis. Adnotavit enim, si quis integralia $\int \frac{x^\lambda dx}{\{\psi(x)\}^{\frac{3}{2}}}$, in quibus $\psi(x)$ designet polynomium ipsius x gradus $(2m)^{ti}$, alia ad alia algebraice reducere velit, inventurum esse aequationes

$$0=\int \frac{M\,dx}{\{\psi(x)\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{f_1(x)}{\sqrt{(\psi(x))}},$$

$$\int \frac{x^{a+2m-1}dx}{\{\psi(x)\}^{\frac{3}{2}}}=\beta\int \frac{x^{3m-1}dx}{\{\psi(x)\}^{\frac{3}{2}}}+\int \frac{N\,dx}{\{\psi(x)\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{f(x)+f_1(x)}{\sqrt{(\psi(x))}}$$

siquidem designantur per $f(x)$, $f_1(x)$, M, N polynomia data ipsius x, ex ordine gradibus a^{to}, m^{to}, $(2m-2)^{\text{to}}$, $(2m-3)^{\text{to}}$ gaudentia, per a aut 0 aut numerus quilibet integer positivus, excepto $a=m$, per β denique constans, quae ipsi 0 aequalis ponenda est, quoties $a<m$.

12.

Ut exhibeatur reductio algebraica integralium $\int \frac{y^{n-\alpha-1}}{(x-b)^m \varphi'(y)} dx$ in aequatione

$$27. \quad \frac{d \sum_1^{n-1}{}_v B_v\left(p_0 y^v + p_1 y^{v-1} + \dots + p_{v-1} y + \frac{v}{n} p_v\right)}{dx} = \frac{\sum_1^{n-1}{}_r N_{r+1} y^{n-r-1}}{\varphi'(y)}$$

ponendum est

$$106. \quad B_v = \frac{C_{v,1}}{x-b} + \frac{C_{v,2}}{(x-b)^2} + \frac{C_{v,3}}{(x-b)^3} + \dots + \frac{C_{v,m-1}}{(x-b)^{m-1}}$$

unde B_v consideratur ut ea pars, quae, functione fracta ipsius x in fractiones simplices discerpta, e factore $(x-b)^{m-1}$ denominatoris originem ducit. Polynomia $I_{r,v}$ et $K_{r,v}$ ipsius x evolvamus secundum potestates ipsius $x-b$, erit

$$107. \quad N_{r+1} = \sum_1^{n-1}{}_v (B'_v I_{r,v} + B_v K_{r,v})$$

$$= M_{r+1} + \frac{D_{r,1}}{x-b} + \frac{D_{r,2}}{(x-b)^2} + \frac{D_{r,3}}{(x-b)^3} + \dots + \frac{D_{r,m}}{(x-b)^m},$$

siquidem M_{r+1} designat polynomium ipsius x, et $D_{r,1}$, $D_{r,2}$, $D_{r,3}$, ... $D_{r,m}$ quantitates constantes sunt, quae e constantibus $C_{v,s}$ pendent aequationibus

$$108. \quad \begin{cases} D_{r,m} = -(m-1)\sum_1^{n-1}{}_v I_{r,v}(b) C_{v,m-1}, \\ D_{r,m-1} = -(m-2)\sum_1^{n-1}{}_v I_{r,v}(b) C_{v,m-2} + \sum_1^{n-1}{}_v \{K_{r,v}(b) - (m-1) I'_{r,v}(b)\} C_{v,m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ D_{r,m-k+1} = -(m-k)\sum_1^{n-1}{}_v I_{r,v}(b) C_{v,m-k} + \sum_1^{k-1}{}_v \frac{1}{\Pi s} \sum_1^{n-1}{}_v \{s K_{r,v}^{(s-1)}(b) - (m-n+s) I_{r,v}^{(s)}(b)\} C_{v,m-k+s}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ D_{r,1} = \sum_1^{m-1}{}_s \frac{1}{\Pi s-1} \sum_1^{n-1}{}_v \{K_{r,v}^{(s-1)}(b) - I_{r,v}^{(s)}(b)\} C_{v,s} = -\sum_1^{m-1}{}_s \frac{1}{\Pi(s-1)} \sum_1^{n-1}{}_v K_{v,r}^{(s-1)}(b) C_{v,s}, \end{cases}$$

ubi designat Πs productum $1.2.3....s$, et, posito ut supra $f^{(s)} = \frac{d^s f}{dx^s}$, $f^{(s)}(b)$ designat valorem, in quem $f^{(s)}$ abit, si b loco ipsius x ponitur. Forma duplex aequationis ultimae prodit ex aequatione $I_{r,v}^{(s)} = K_{r,v}^{(s-1)} + K_{v,r}^{(s-1)}$.

Numerus constantium $C_{v,s}$ indeterminatarum est $(m-1)(n-1)$; quae igitur, quia per unam totam aequationem (27.) dividere licet, in id consumi

possunt ut satisfiat $(m-1)(n-1)-1$ aequationibus linearibus, scilicet $n-2$ sequentibus:

$$109. \left\{\begin{array}{l} D_{1,m}=0, D_{2,m}=0, D_{3,m}=0, \ldots . D_{\alpha-1,m}=0, D_{\alpha+1,m}=0, \ldots . D_{n-1,m}=0 \\ \text{et } (m-2)(n-1) \text{ aliis, quae ex his } m-2: \\ \quad D_{r,m-1}=0,\ D_{r,m-2}=0,\ D_{r,m-3}=0,\ \ldots .\ D_{r,2}=0 \text{ proveniunt,} \end{array}\right.$$

loco indicis r ponendo alios post alios valores $1, 2, 3, \ldots . n-1$.

Si $r_1, r_2, r_3, \ldots . r_\nu$ significant quoslibet ν ex $n-1$ valoribus indicis r, demonstravimus, functionum $I_{r,v}$ his ν valoribus indicis r respondentium non nisi tantum numerum identice evanescere posse, ut e numero $\frac{(n-1)(n-2)\ldots.(n-\nu)}{1.2.3\ldots.\nu}$ determinantium $\Sigma \pm I_{r_1,v_1} I_{r_2,v_2} I_{r_3,v_3} \ldots . I_{r_\nu,v_\nu}$, quae iisdem valoribus $r_1, r_2, \ldots . r_\nu$ indicis r et quibuslibet $v_1, v_2, v_3, \ldots . v_\nu$ indicis v respondeant, unam saltem identice non evanescat. Unde patet constantem b semper ita eligi posse, ut aequationum (109.) aliae ex aliis sponte non proveniant, neque ulla $n-1$ quantitatum $D_{r,m}$, constantibus $C_{v,m-1}$ non determinatis identice evanescat, et, aequationibus (109.) resolutis, neque $D_{\alpha,m}$ neque omnes $n-1$ expressiones $D_{r,1}$ identice ipsi 0 aequales fiant.

Si constans b hoc modo eligitur, $(m-1)(n-1)-1$ rationibus $(m-1)(n-1)$ constantium $C_{v,s}$ ex $(m-1)(n-1)-1$ aequationibus (109.) determinatis, aequatio (27.) abit in hanc:

$$110. \quad D_{\alpha,m}\int\frac{y^{n-\alpha-1}dx}{(x-b)^m\varphi'(y)} = -\int\frac{\overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_r}} D_{r,1}\,y^{n-r-1}}{(x-b)^m\varphi'(y)}dx - \int\frac{\overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_r}} M_{r+1}\,y^{n-r-1}}{\varphi'(y)} \\ +\overset{m-1}{\underset{1}{\Sigma_s}}\overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\frac{C_{v,s}}{(x-b)^s}\Big(p_0y^v+p_1y^{v-1}+\ldots+p_{v-1}y+\frac{v}{n}p_v\Big).$$

Posito, ut supra,

$$L = \Sigma \pm I_{1,1} I_{2,2} I_{3,3} \ldots I_{n-1,n-1} = p_0^{n-2}\varphi'(y_1)\varphi'(y_2)\ldots.\varphi'(y_n),$$

si significetur per $L(b)$ valor, in quem L pro $x=b$ abit, exhibentur ex aequationibus

$$(109, 1.)\quad D_{1,m}=0,\ D_{2,m}=0,\ D_{3,m}=0, \ldots .\ D_{\alpha-1,m}=0,\ D_{\alpha+1,m}=0, \ldots . \\ \ldots .\ D_{n-1,m}=0$$

rationes

$$C_{1,m-1}:C_{2,m-1}:C_{3,m-1}:\ldots.:C_{n-1,m-1} = A_{\alpha+1}(b):A_{\alpha+2}(b):A_{\alpha+3}(b):\ldots.:A_{\alpha+n-1}(b)$$

et

$$D_{\alpha,m} = L(b)\frac{C_{v_1,m-1}}{A_{\alpha+v_1}(b)},$$

siquidem designatur per v_1 quilibet e $n-1$ valoribus $1, 2, 3, \ldots . n-1$ indicis v, et quantitates A_m coëfficientes sunt aequationum

$$Lc_1 = A_2 m_1 + A_3 m_2 + A_4 m_3 + \dots + A_n m_{n-1},$$
$$Lc_2 = A_3 m_1 + A_4 m_2 + A_5 m_3 + \dots + A_{n+1} m_{n-1},$$
$$Lc_3 = A_4 m_1 + A_5 m_2 + A_6 m_3 + \dots + A_{n+2} m_{n-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Lc_{n-1} = A_n m_1 + A_{n+1} m_2 + A_{n+2} m_3 + \dots + A_{2n-2} m_{n-1},$$

quas inversas esse aequationum

$$m_1 = I_{1,1} c_1 + I_{2,1} c_2 + I_{3,1} c_3 + \dots + I_{n-1,1} c_{n-1},$$
$$m_2 = I_{1,2} c_1 + I_{2,2} c_2 + I_{3,2} c_3 + \dots + I_{n-1,2} c_{n-1},$$
$$m_3 = I_{1,3} c_1 + I_{2,3} c_2 + I_{3,3} c_3 + \dots + I_{n-1,3} c_{n-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m_{n-1} = I_{1,n-1} c_1 + I_{2,n-1} c_2 + I_{3,n-1} c_3 + \dots + I_{n-1,n-1} c_{n-1}$$

supra demonstravimus.

Deinde ex $n-1$ aequationibus

(109, 2.) $\quad D_{1,m-1} = 0,\ D_{2,m-1} = 0,\ D_{3,m-1} = 0,\ \dots\ D_{n-1,m-1} = 0$

inveniuntur valores $n-1$ constantium $C_{v,m-2}$ $n-1$ valoribus $1, 2, 3, \dots n-1$ indicis v respondentium, atque erunt earum denominator communis $L(b)$, numeratores vero omnes in eandem constantem $\frac{C_{v_1,m-1}}{A_{\alpha+v_1}(b)}$ ducti.

Quibus valoribus in $n-1$ aequationes

(109, 3.) $\quad D_{1,m-2} = 0,\ D_{2,m-2} = 0,\ D_{3,m-2} = 0,\ \dots\ D_{n-1,m-2} = 0$

substitutis, eruuntur valores $n-1$ constantium $C_{v,m-3}$, denominatore communi $\{L(b)\}^2$ numeratoribus autem in eandem constantem $\frac{C_{v_1,m-1}}{A_{\alpha+v_1}}$ ductis gaudentes. Sic pergens exhibes ex $n-1$ aequationibus

(109, k.) $\quad D_{1,m-k+1} = 0,\ D_{2,m-k+1} = 0,\ D_{3,m-k+1} = 0,\ \dots\ D_{n-1,m-k+1} = 0$

valores $n-1$ constantium $C_{1,m-k}$, $C_{2,m-k}$, $C_{3,m-k}$, $\dots$ $C_{n-1,m-k}$, et valoribus constantium $C_{v,m-1}$, $C_{v,m-2}$, $C_{v,m-3}$, $\dots$ $C_{v,m-k+1}$ substitutis, fit earum denominator communis $\{L(b)\}^{k-1}$, numeratores autem omnes in eandem constantem $\frac{C_{v_1,m-1}}{A_{\alpha+v_1}(b)}$ ducti erunt.

Denique $n-1$ aequationes

(109, $m-1$.) $\quad D_{1,2} = 0,\ D_{2,2} = 0,\ D_{3,2} = 0,\ \dots\ D_{n-1,2} = 0$

valores praebent $n-1$ constantium $C_{v,1}$, quarum denominator communis eodem modo fit $\{L(b)\}^{m-2}$ et quarum numeratores omnes eodem factore $\frac{C_{v_1,m-1}}{A_{\alpha+v_1}(b)}$ gaudent.

Posito igitur $\frac{C_{v_1,m-1}}{A_{\alpha+v_1}(b)} = \{L(b)\}^{m-2}$, $(m-1)(n-1)$ constantes $C_{v,s}$ omnes fiunt functiones integrae ipsius (b), earumque $n-1$ constantes $C_{v,1}$ per $L(b)$

non divisibiles; unde etiam ipsum $L(b)$ dextram aequationis (110.) partem non metietur, in parte autem sinistra erit $D_{\alpha,m} = \{L(b)\}^{m-1}$.

Quibus collectis aequatio (110.) docet, integrale $\int \frac{y^{n-\alpha-1}}{(x-b)^m \varphi'(y)} dx$, addita functione algebraica ipsius x generaliter revocari ad integrale $\int \frac{\sum_1^{n-1}{}_r D_{r,1} y^{n-r-1}}{(x-b)\varphi'(y)} dx$, in quo $n-1$ quantitates $D_{r,1}$ sunt constantes datae, et ad aliud integrale $\int \frac{\sum_1^{n-1}{}_r M_{r+1} y^{n-r-1}}{\varphi'(y)} dx$, in quo M_{r+1} est polynomium datum ipsius x, de cuius integralis reductione algebraica supra egimus. Quoties autem b_1 radix est aequationis $L = p_0^{n-2}\varphi'(y_1)\varphi'(y_2)\varphi'(y_3)\ldots\varphi'(y_n) = 0$ eius modi, ut $b - b_1$ sinistram partem aequationis (110) non metiatur, posito b_1 loco ipsius b in aequatione (110) et $D_{\alpha,m}$ et quantitates $C_{v,s}$ omnes praeter $n-1$ quantitates $C_{v,1}$ evanescunt propter factorem $L(b_1) = 0$; ipsarum autem $C_{v,1}$ rationes exhibentur e quibuslibet $n-2$ e numero $n-1$ aequationum

$$D_{1,2} = 0,\quad D_{2,2} = 0,\quad D_{3,2} = 0,\quad \ldots\quad D_{n-1,2} = 0$$

(nam propter $L(b_1) = 0$ e $n-2$ earum $(n-1)^{\text{ta}}$ sponte profluit) per formulas

$$C_{1,1} : C_{2,1} : C_{3,1} : \ldots : C_{n-1,1} = A_{s+1}(b_1) : A_{s+2}(b_1) : A_{s+3}(b_1) : \ldots : A_{s+n-1}(b_1),$$

siquidem s designat quemlibet e $n-1$ numeris $1, 2, 3, \ldots n-1$; ita ut aequatione (110.), ubi b_1 loco ipsius b ponitur, $\int \frac{\sum_1^{n-1}{}_r D_{r,1} y^{n-r-1}}{(x-b_1)\varphi'(y)} dx$, in quo $D_{r,1}$ sunt quantitates constantes e coëfficientibus et e gradibus polynomiorum p_m pendentes, addita functione algebraica simpliciter revocetur ad integrale $\int \frac{\sum_1^{n-1}{}_r M_{r+1} y^{n-r-1}}{\varphi'(y)} dx$, in quo M_{r+1} designant polynomia ipsius x e polynomiis datis p_m pendentia.

Supra reductionem algebraicam integralis $\int \frac{x^\lambda y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)} dx$ ex aequatione (27.) exhibuimus, functionibus B integris positis et eorum coëfficientibus apte determinatis. Sed adnotavimus, hac ratione numerum minimum integralium $\int \frac{x^{\lambda_1} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)} dx$ ad quae datum quodlibet $\int \frac{x^\lambda y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)} dx$ algebraice revocari queat, non semper inventum iri, sed casus exstare, quibus, etsi functionum B_α nonnullae denominatoribus datis gaudeant, numeratoribus $n-2$ functionum $N_2, N_3, \ldots N_\alpha, N_{\alpha+2}, \ldots N_{n-1}, N_n$ et parte fracta genuina ipsius

$N_{\alpha+1}$ ope constantium indeterminatarum numeratorum functionum B_ν exterminatis, in parte integra functionis $N_{\alpha+1}$ numerus constantium indeterminatarum maior adhuc remaneat, quam is qui in functione $N_{\alpha+1}$, $n-2$ functionibus N_{r+1} ceteris exterminatis, inveniatur, si functiones B_ν ab initio integrae ponantur. Ita ut, ubi functionibus B_ν forma illa fracta tribuitur, ex aequatione (27.) perveniatur ad minorem numerum integralium $\int \frac{x^{\lambda_1} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)} dx$, ad quae quodlibet datum $\int \frac{x^{\lambda} y^{n-\alpha-1} dx}{\varphi'(y)}$ algebraice reduci potest, quam invenitur, ubi functiones B_ν ab initio integrae ponuntur. Ut autem functio rationalis fracta ipsius x, denominatore dato finito, identice evanescat, et pars integra et numerator partis fractae genuinae singuli evanescere debent, atque ut functionis fractae genuinae numerator identice evanescat, numeratores fractionum simplicium, in quas discerpitur, singuli evanescere debent. Unde casus, de quibus sermo est, ii erunt, quibus, posito

$$B_\nu = \frac{C_{\nu,1}}{x-b} + \frac{C_{\nu,2}}{(x-b)^2} + \dots + \frac{C_{\nu,m-1}}{(x-b)^{m-1}},$$

pro certis ipsorum m et b valoribus constantes $C_{\nu,\cdot}$ ita determinari poscunt, ut in aequatione (27.) partes fractae genuinae $n-1$ functionum N_{r+1} identice evanescant; atque ubi complures dantur valores numeri m et constantis b, qui hac proprietate gaudeant, aequationibus omnibus, quae pro his valoribus ipsorum m et b ex aequatione (27.) proveniunt, additis ad aequationem, in quam ipsa (27.) pro forma integra functionum B_ν abit, prodit formula, e qua numerus minimus quaesitus integralium forma $\int \frac{x^{\lambda_1} y^{n-\alpha-1}}{\varphi'(y)} dx$ ratione supra exposita invenitur.

Casus autem, pro quibus in aequatione (27.) functiones N_{r+1} omnes, posito ut supra

$$B_\nu = \frac{C_{\nu,1}}{x-b} + \frac{C_{\nu,2}}{(x-b)^2} + \frac{C_{\nu,3}}{(x-b)^3} + \dots + \frac{C_{\nu,m-1}}{(x-b)^{m-1}},$$

integras reddere licet, non nisi pro talibus constantis b et numeri m valoribus locum habere possunt, pro quibus utraque pars aequationis (110.) evanescat. Ubi enim, postquam in aequationem (27.) substituti sunt valores constantium $C_{\nu,\cdot}$, quales ex aequationibus (109.) inveniuntur pro quibuslibet ipsorum m et b valoribus, utraque pars aequationis (110.), in quam hac substitutione facta aequatio (27.) abit, pro certis ipsorum m et b valoribus, quos supra excludimus, evanescit, patet, hos valores tales esse, pro quibus constantes $C_{\nu,\cdot}$ ex aequationibus (109.) valorem sibi poscant indeterminatum $\frac{0}{0}$, ideoque aequationum (109.)

aut aliquae identice evanescant, aut aliae ex aliis sponte prodeant. Aequatione igitur (27.) ope earum aequationum (109.), quae v ceteris non pendent, in formam aequationis (110.) redacta, numerus certus constantium $C_{v,s}$ indeterminatae remanent, et casus, de quibus sermo est, ii erunt, pro quibus hic numerus superat numerum earum quantitatum $D_{\alpha,m}$, $D_{1,1}$, $D_{2,1}$, $D_{3,1}$, ... $D_{n-1,1}$, quae, postquam omnibus aequationibus (109.) satisfactum est, in aequatione (110.) adhuc inveniuntur.

Horum casuum unum exemplum attulisse satis erit. Quem in finem casum simplicem eligimus, quo constantes polynomiorum p_m ita sunt comparatae, ut, siquidem numerus m valorem certum m_1 haud superat, posito $b=b_1$ m quantitates $D_{\alpha,m}$, $D_{\alpha,m-1}$, $D_{\alpha,m-2}$, ... $D_{\alpha,2}$, $D_{\alpha,1}$ identice evanescant. Quod, ut fieri possit, ex aequationibus (108.) sibi poscere vides conditiones

$$I_{\alpha,r}(b_1)=0,\quad I'_{\alpha,r}(b_1)=0,\quad I''_{\alpha,r}(b_1)=0,\quad \ldots\quad I^{(m_1-2)}_{\alpha,r}(b_1)=0,$$
$$K_{\alpha,r}(b_1)=0,\quad K'_{\alpha,r}(b_1)=0,\quad K''_{\alpha,r}(b_1)=0,\quad \ldots\quad K^{(m_1-3)}_{\alpha,r}(b_1)=0$$

et $K^{(m_1-2)}_{\alpha,r}(b_1)-I^{(m_1-1)}_{\alpha,r}(b_1)=-K^{(m_1-2)}_{r,\alpha}(b_1)=0$, sive pro omnibus indicis r valoribus 1, 2, 3, ... $n-1$ gaudere debere $I_{\alpha,r}$ et $K_{r,\alpha}$ factore $(x-b_1)^{m_1-1}$, $K_{\alpha,r}$ autem factore $(x-b_1)^{m_1-2}$. Positis igitur $m=m_1.b=b_1$, fiunt propter $I_{\alpha,r}=I_{r,\alpha}$ pro $n-2$ valoribus 1, 2, 3, ... $\alpha-1$, $\alpha+1$, $\alpha+2$, ... $n-1$ indicis v, ex aequationibus (109, 1.) $C_{v,m_1-1}=0$, ex aequationibus (109, 2.) $C_{v,m_1-2}=0$, ..., ex aequationibus (109, k.) $C_{v,m_1-k}=0$, ..., denique ex aequationibus (109, m_1-1) $C_{v,1}=0$; ideoque

$$D_{\alpha,1}=0.\qquad D_{r,1}=-\frac{1}{\Pi_{(m_1-2)}}K^{(m_1-2)}_{\alpha,r}C_{\alpha,m_1-1}.$$

Ut praeter $D_{\alpha,1}$ etiam reliquae $n-2$ quantitates $D_{r,1}$ evanescant, aut $K^{(m_1-2)}_{\alpha,r}(b_1)=0$ ideoque propter $K^{(m_1-2)}_{r,\alpha}(b_1)=0$ etiam $I^{(m_1-1)}_{\alpha,r}(b_1)=K^{(m_1-2)}_{r,\alpha}(b_1)+K^{(m_1-2)}_{\alpha,r}(b_1)=0$ esse, sive $I_{\alpha,r}=I_{r,\alpha}$ factore $(x-b_1)^{m_1}$ ac simul $K_{\alpha,r}$ et $K_{r,\alpha}$ factore $(x-b_1)^{m_1-1}$ gaudere debent, aut poni debet $C_{\alpha,m-1}=0$. Ponamus illud locum habere, scilicet $(x-b_1)^{m_1}$ esse altissimam potestatem ipsius $x-b_1$, quae polynomia $I_{\alpha,r}=I_{r,\alpha}$, $(x-b_1)^{m_1-1}$ autem altissimam, quae simul polynomia $K_{\alpha,r}$ et $K_{r,\alpha}$ metiatur. Videmus enim alterum casum, quo C_{α,m_1-1} ipsi 0 aequalis poni debet, ut praeter $D_{\alpha,1}$ etiam ceterae $n-2$ quantitates $D_{r,1}$ evanescant, quia polynomia $I_{\alpha,r}$ non nisi per potestatem $(x-b_1)^{m_1-1}$ polynomia $K_{\alpha,r}$ non nisi per $(x-b_1)^{m_1-2}$ divisibilia sunt, ex altero casu provenire posito m_1-1 loco ipsius m_1. Quibus collectis aequatio (110.) abit in hanc.

$$111.\quad \int\frac{\sum_1^{n-1}{}_r\, M_{r+1}y^{n-r-1}}{\varphi'(y)}dx=\left(p_0y^{\alpha}+p_1y^{\alpha-1}+\ldots+p_{\alpha-1}y+\frac{\alpha}{n}p_\alpha\right)\sum_1^{m_1-1}{}_s\frac{C_{\alpha,s}}{(x-b_1)^s},$$

in qua m_1-1 quantitates $C_{\alpha,\varepsilon}$ sunt constantes indeterminatae et

$$M_{r+1} = -I_{r,\alpha}\sum_{1}^{m_1-1}{}_{\varepsilon}\frac{C_{\alpha,\varepsilon}}{(x-b_1)^{\varepsilon+1}} + K_{r,\alpha}\sum_{1}^{m-1}{}_{\varepsilon}\frac{C_{\alpha,\varepsilon}}{(x-b_1)^{\varepsilon}}$$

ipsius x est functio integra. Ponamus praeter b_1 et m_1 exstare etiam $k-1$ paria valorum b_2 et m_2, b_3 et m_3, ... b_k et m_k, pro quibus aequatio (111.) locum habeat, erit, si designamus per $B_1, B_2, \dots B_{\alpha-1}, B_{\alpha+1}, B_{\alpha+2}, \dots B_{n-1}$ functiones rationales integras ipsius x, per B_α autem fractam denominatore $(x-b_1)^{m_1-1}.(x-b_2)^{m_2-1}.(x-b_3)^{m_3-1}\dots(x-b_k)^{m_k-1}$ gaudentem, in aequatione

$$27.\quad \int\frac{\sum_1 {}_r N_{r+1}y^{n-r-1}}{\varphi'(y)}dx = \sum_{1}^{n-1}{}_{v} B_v\left(p_0y^v + p_1y^{v-1} + \dots + p_{v-1}y + \frac{v}{n}p_v\right),$$

pro valoribus 1, 2, 3, ... $n-1$ indicis r

$$N_{r+1} = \sum_{1}^{n-1}{}_{v}(B'_v I_{r,v} + B_v K_{r,v}),$$

functio rationalis integra ipsius x et numerum continebit constantium indeterminatarum $m_1+m_2+\dots+m_k-k$ unitatibus maiorem, quam is, qui functione B_α integra posita in ea invenitur. Ubi aequatio (111.) etiam posito α_1 loco ipsius α pro certis ipsorum m_1 et b_1 valoribus locum habet, numerus constantium indeterminatarum pro iisdem gradibus polynomiorum N_{r+1} in his polynomiis contentarum etiam augetur, si functioni B_v tribuitur denominator, qui a factoribus simplicibus compositus est illis ipsorum m_1 et b_1 valoribus, qui ad indicem α_1 pertinent, respondentibus.

13.

Pro aequatione binomia $\varphi(x,y) = p_0y^n + p_n = 0$, quae positis $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, ... $p_{n-1} = 0$ ex aequatione generali n^{ti} gradus provenit, $n-1$ functionum $I_{r,v}$ et $n-1$ functionum $K_{r,v}$ eidem valori indicis r respondentium omnes praeter $I_{r,n-r}$ et $K_{r,n-r}$ evanescunt, unde pro omnibus valoribus 1, 2, 3, ... $n-1$ indicis r est $N_{r+1} = B'_{n-r}I_{r,n-r} + B_{n-r}K_{r,n-r}$, ideoque functiones B_v omnes praeter $B_{n-\alpha}$ identice evanescere debent, ut $n-2$ polynomia $N_2, N_3, \dots N_\alpha$, $N_{\alpha+2}, N_{\alpha+3}, \dots N_n$ ex aequatione (27.) exterminentur. Sunt autem

$$I_{\alpha,n-\alpha} = -np_0p_n,\qquad K_{\alpha,n-\alpha} = -(n-\alpha)p_0p'_n - \alpha p_np'_0,$$

unde, quia $\varphi'(y) = np_0y^{n-1}$, aequatio (27.) abit in hanc:

$$\frac{d(B_{n-\alpha}p_0y^\alpha)}{dx} = -\frac{np_0p_nB'_{n-\alpha} + \{(n-\alpha)p_0p'_n + \alpha p_np'_0\}B_{n-\alpha}}{np_0y^\alpha},$$

sive substituto $y = \sqrt[n]{\left(-\frac{p_n}{p_0}\right)}$ in hanc:

$$112.\quad \frac{d\{B_{n-\alpha}\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}\}}{dx} = -\frac{np_0p_nB'_{n-\alpha}+\{(n-\alpha)p_0p'_n+\alpha p_np'_0\}B_{n-\alpha}}{n\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}}.$$

Quia per factorem communem polynomiorum p_0 et p_n totam aequationem $p_0y^n+p_n=0$ dividere licet, ponamus ea factore communi non gaudere, atque esse

$$p_0 = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_\mu)^{k_\mu}Q_0,$$
$$p_n = (x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\dots(x-b_\nu)^{m_\nu}Q_n,$$

siquidem per Q_0, Q_n designamus polynomia ipsius x factoribus aequalibus non gaudentia. Sint porro

$$F_0=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\mu),\quad P_0=(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\dots(x-a_\mu)^{k_\mu-1},$$
$$F_n=(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_\nu),\quad P_n=(x-b_1)^{m_1-1}(x-b_2)^{m_2-1}\dots(x-b_\nu)^{m_\nu-1},$$

ideoque $p_0=F_0P_0Q_0$, $p_n=F_nP_nQ_n$, abit aequatio (112.), positis

$$B_{n-\alpha}=\frac{B}{P_0P_n},\quad M_0=\frac{n-(n-\alpha)k_1}{x-a_1}+\frac{n-(n-\alpha)k_2}{x-a_2}+\dots+\frac{n-(n-\alpha)k_\mu}{x-a_\mu},$$
$$M_n=\frac{n-\alpha m_1}{x-b_1}+\frac{n-\alpha m_2}{x-b_2}+\dots+\frac{n-\alpha m_\nu}{x-b_\nu},$$

in hanc

$$113.\quad \frac{d\left\{\frac{B}{P_0P_n}\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}\right\}}{dx} = -\frac{nF_0F_nQ_0Q_nB'+F_0F_nQ_0Q_n\left\{(n-\alpha)\frac{Q'_n}{Q_n}+\alpha\frac{Q'_0}{Q_0}+M_n+M_0\right\}B}{n\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}},$$

ubi B designat functionem rationalem ipsius x; atque erit numerator partis dextrae aequationis (113.) manifesto una cum B aut integra aut fracta, quia $F_0F_nQ_0Q_n$ factoribus aequalibus non amplius gaudet. Sit B polynomium gradus b^{ti}, sintque q_0, q_n gradus polynomiorum Q_0, Q_n, erit numerator partis dextrae aequationis (113.) functio integra ipsius x gradus $(\mu+\nu+q_0+q_n+b-1)^{ti}$, et tantum continebit numerum constantium adhuc determinandarum, quantus pro dato gradu huius functionis maximus esse potest. Coëfficientes igitur $b+1$ constantes polynomii B, una excepta, per quam tota aequatio (113.) dividitur, per resolutionem b aequationum linearium generaliter ita determinari possunt, ut aequatio (113.) abeat in

$$114.\quad A\int\frac{x^{b+\mu+\nu+q_0+q_n-1}dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}} = \int\frac{R_\alpha dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}} - n\frac{B}{P_0P_n}\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)},$$

ubi designantur per R_α polynomium datum ipsius x gradus $(\mu+\nu+q_0+q_n-2)^{ti}$ per A quantitas constans, atque erit $\mu+\nu+q_0+q_n-1$ numerus minimus

integralium formae $\int \frac{x^\lambda dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}}$, ad quae cetera integralia eiusdem formae, quae aliis exponentis λ valoribus respondent, algebraice revocantur.

Fit autem

$$A = \{nb + (n-\alpha)q_n + \alpha q_0 + (\mu+\nu)m - (n-\alpha)(k_1+k_2+\dots+k_\mu) \\ - \alpha(m_1+m_2+\dots+m_\nu)\}\beta\varrho_0\varrho_n \\ = (nb+K)\beta\varrho_0\varrho_n,$$

siquidem termini altissimi polynomiorum B, Q_0, Q_n ex ordine designantur per βx^b, $\varrho_0 x^{q_0}$, $\varrho_n x^{q_n}$; unde elucet, quoties numeri α, q_0, q_n, k_1, k_2, k_3, ... k_μ, m_1, m_2, ... m_ν, μ, ν, ita sint comparati, ut

$$K = (n-\alpha)q_n + \alpha q_0 + (\mu+\nu)m - (n-\alpha)(k_1+k_2+k_3+\dots+k_\mu) \\ - \alpha(m_1+m_2+\dots+m_\nu)$$

fiat negativus et per n divisibilis, inter valores ipsius b, qui sunt omnes numeri integri positivi, nullitate non excepta, inveniri unum $b = -\frac{K}{n}$, pro quo $A=0$. Sit igitur $K = -na$, sit pro $b=a$ $A=0$, atque aequatio (114.) abit in hanc

$$115. \quad \int \frac{x^{\mu+\nu+q_0+q_n-2} dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} = \int \frac{S_a dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} + \frac{nB_1}{P_0 P_n} \sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)},$$

siquidem significamus per S_a et B_1 polynomia data ipsius x ex ordine gradibus $(\mu+\nu+q_0+q_n-3)^{\text{to}}$ et a^{to} gaudentia; et ope aequationis (115.) ex ipsa (114.) prodit, quamdiu $b<a$,

$$\int \frac{x^{\mu+\nu+q_0+q_n+b-1} dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} = \int \frac{T_a dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} + \frac{nB_1 - nB}{P_0 P_n} \sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)},$$

ubi T_a, B_1, B sunt polynomia data ipsius x, cuius gradus ex ordine sunt $(\mu+\nu+q_0+q_n-3)^{\text{tus}}$, a^{tus}, b^{tus}; quamdiu autem $b>a$, ex aequatione (113.)

$$\int \frac{x^{\mu+\nu+q_0+q_n+b-1} dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}}$$

$$= C\int \frac{x^{\mu+\nu+q_0+q_n+a-1} dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} + \int \frac{U_a dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} + \frac{nB_1 - nB}{P_0 P_n} \sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)},$$

ubi C designat constantem, et U_a, B_1, B polynomia data ipsius x ex ordine gradibus $(\mu+\nu+q_0+q_n-3)^{\text{to}}$, a^{to}, b^{to} gaudentia. In termino enim numeratoris dextrae partis aequationis (113.) in $x^{\mu+\nu+q_0+q_n+a-1}$ ducto propter $na+K=0$ non invenietur constans, quae in polynomio B in potestatem x^a ducta est sed

tantum continebit eas $b-a$ quantitates, quae in polynomio B coëfficientes sunt $b-a$ potestatum x^b, x^{b-1}, x^{b-2}, ... x^{a+1}. Harum autem coëfficientium rationes eo determinantur ut $b-a-1$ termini inter altissimum in potestatem $x^{\mu+\nu+q_0+q_n+b-1}$ et $(b-a+1)^{\text{tum}}$ in potestatem $x^{\mu+\nu+q_0+q_n+a-1}$ ductum intermedii e numeratore dextrae partis aequationis (113.) eliminentur, unde terminus $(b-a+1)^{\text{tus}}$ non nisi una cum termino altissimo exterminari poterit. Ut autem numerus K factore n gaudeat, ipse n numerum $\alpha(q_0+k_1+k_2+\ldots+k_\mu-q_n-m_1-m_2-\ldots-m_\nu)$ metiatur necesse est, unde, quum fiat $\alpha<n$, numerus $q_0+k_1+k_2+\ldots+k_\mu-q_n-m_1-m_2-\ldots-m_\nu$, qui est differentia graduum polynomiorum p_0 et p_n, per n divisibilis esse, ideoque gradus expressionis $-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha$, quae sub signo $\sqrt[n]{}$ in denominatore integralis invenitur, factore n gaudere debet, ut casus specialis, quem consideramus, locum habere possit. Quem etiam casum numquam exstare posse patet, si, pro quolibet k e μ numeris k_1, k_2, ... k_μ et pro quolibet m et ν numeris m_1, m_2, m_3, ... m_ν, fiat $n-(n-\alpha)k>0$, $n-\alpha m>0$. Tum enim numerus K semper positivus erit. Quoties vero $n-(n-\alpha)k_1<0$, $\sqrt[n]{(p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}$ abit in $(x-a_1)\sqrt[n]{R}$, ubi R est polynomium per $x-a_1$ divisibilis, et ubi $x-a_1$ ipsum R metitur, $\int\frac{x^\lambda dx}{(x-a_1)\sqrt[n]{R}}$ addita functione algebraica semper revocatur ad simplicius, $\int\frac{M\,dx}{\sqrt[n]{R}}$, in quo M est functio integra ipsius x.

Posito enim in aequatione (113.)

$$B=\frac{C_{m-1}}{(x-b)^{m-1}}+\frac{C_{m-2}}{(x-b)^{m-2}}+\ldots+\frac{C_1}{x-b}$$

et polynomiis ipsius x, quae in dextra parte aequationis (113.) in functiones B' et B ducta sunt, secundum potestates ipsius $x-b$ evolutis, constantibusque C_{m-1}, C_{m-2}, ... C_2, C_1 ita determinatis, ut $m-2$ termini in $(x-b)^{-2}$, $(x-b)^{-3}$, ... $(x-b)^{-m+1}$ ducti e parte dextra aequationis (113.) exterminentur, prodit

$$116.\quad D_m\int\frac{dx}{\sqrt{(x-b)^m}\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}}=D_1\int\frac{dx}{(x-b)\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}}+\int\frac{M\,dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha}p_n^\alpha)}}+Q(x),$$

ubi significant D_m, D_1 constantes datas, M polynomium datum ipsius x, Q denique functionem rationalem datam ipsorum x et $\sqrt[n]{\left(-\frac{p_n}{p_0}\right)}$. Erit autem D_m valor, in quem $nF_0F_nQ_0Q_n$ pro $x=b$ abit; unde, quum $F_0F_nQ_0Q_n$ pro-

ductum sit a factoribus linearibus diversis polynomii $p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha$, patet constantem D_m evanescere, quoties $x-b$ ipsum $p_0 p_n$ metiatur, ideoque his casibus $\int \frac{dx}{(x-b)\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}}$, $\left(\text{et non minus } \int \frac{x^\lambda dx}{(x-b)\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}}\right)$, algebraice reduci ad $\int \frac{M dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}}$, in quo M polynomium ipsius x est.

Adnotandum est, ex aequatione (113.) etiam exhiberi reductio algebraica integralis $\int \frac{x^\lambda dx}{p_0^{\alpha-1}\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} = \int \frac{x^\lambda dx}{\sqrt[n]{(-(p_0^{n-1} p_n)^\alpha)}}$, quod aequationi $x^n + p_0^{n-1} p_n = 0$ respondet, quae e data $p_0 y^n + p_n = 0$ provenit per p_0^{n-1} multiplicatione facta et posito $p_0 y = x$. Ubi enim ponitur $\frac{B}{p_0^{\alpha-1}}$ loco ipsius B, pars dextra aequationis (113.) formam induit

$$\frac{GB' + HB}{p_0^{\alpha-1}\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} = \frac{GB' + HB}{\sqrt[n]{(-(p_0^{n-1} p_n)^\alpha)}},$$

in qua G et H sunt functiones rationales integrae ipsius x. Sed vidimus

$$\int \frac{x^\lambda dx}{p_0^{\alpha-1}\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}} = \int \frac{x^\lambda dx}{\sqrt[n]{(-(p_0^{n-1} p_n)^\alpha)}}$$

algebraice reduci posse ad integrale $\int \frac{M dx}{\sqrt[n]{(-p_0^{n-\alpha} p_n^\alpha)}}$, in quo M est polynomium ipsius x.

2.

Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Enstehung verdanken.

(Von Herrn Stud. *Gotth. Eisenstein* zu Berlin.)

(Schlufs des Aufsatzes No. 24. im vierten Hefte 28ten Bandes.)

Von der Classification der associirten Formen.

§. 10.

I. Wie schon bemerkt, besteht das Princip der Classification der associirten Formen darin, je zwei Formen in dieselbe oder in verschiedene Classen aufzunehmen, je nachdem dieselben aequivalent sind, oder nicht. Wir wollen zuerst durch eine rein arithmetische Betrachtung nachweisen, dafs die Anzahl dieser Classen immer *endlich* ist; später, bei der Aufsuchung des allgemeinen Gesetzes, welches zwischen der Primzahl p und der Anzahl der Classen stattfindet, wird die Wahrheit dieses wichtigen Satzes durch einen analytischen Beweis aufs neue bekräftigt werden. Es lassen sich jedoch, der nothwendigen Kürze wegen, hier nur die Grundzüge des Beweises geben und es mufs die weitere Ausführung dem Leser überlassen bleiben.

1. *„Die kleinste positive Zahl, welche durch eine gegebene associirte Form darstellbar ist, ist immer* $< \frac{8}{9}p$*."*

Es sei G eine gegebene associirte Form und a die kleinste durch sie darstellbare positive Zahl, also auch $-a$ die kleinste durch sie darstellbare negative Zahl. Da die Darstellung nothwendig eine eigentliche sein wird, so kann man nach §. 6. unendlich viele der G aequivalenten Formen mit dem ersten Coëfficienten a finden, für welche b, c, d in den Formeln

$$b = b_0\varphi + b'_0\psi + ma, \quad c = c_0\varphi + c'_0\psi, \quad d = d_0\varphi + d'_0\psi$$

enthalten sind, wo m und n alle möglichen ganzen Zahlen, φ und ψ alle ganzen Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler vorstellen. Da $2N(c + d\varrho)$, nach φ und ψ geordnet, einer *quadratischen Form* mit den Variabeln φ und ψ

und reellen ganzen Coëfficienten gleich wird, deren Determinante offenbar $= -3(c_0 d'_0 - c'_0 d_0) = -3a^2$ ist, so kann man (nach Disq. arithm. art. 171.) über φ und ψ so disponiren, dafs $N(c+d\varrho)$, also auch $N(c+d\varrho^2)$, $< a$ wird. (Unter dem Zeichen $<$ ist hier immer die Gleichheit mitverstanden.) Ferner kann man über m so disponiren, dafs $N(b) < \frac{1}{4}N(a)$ wird. Es sei der Kürze halber $c+d\varrho = e$, $c+d\varrho^2 = f$. Wir können demnach eine der G aequivalente Form finden, in welcher $N(b) < \frac{1}{4}a^2$, $N(e) = N(f) < a$ ist. Da a die kleinste durch diese Form darstellbare Zahl ist, so wird der Coëfficient von v^3 in derselben, der ebenfalls durch diese Form *darstellbar* ist, absolut genommen, nothwendig $> a$ sein, so dafs

$$N(a^3) < N(b+e\eta+f\vartheta)N(b+e\varrho\eta+f\varrho^2\vartheta)N(b+e\varrho^2\eta+f\varrho\vartheta),$$

also um so mehr, nach einem bekannten Satze und wegen $N(\eta) = N(\vartheta) = p$:

$$N(a^3) < \{N(b)+2pN(e)\}^3,$$
$$N(a) < N(b)+2pN(e)$$

sein wird. Hieraus folgt, wegen $N(b) < \frac{1}{4}a^2$ und $N(e) < a$:

$a^2 < \frac{1}{4}a^2 + 2pa$, $a < \frac{1}{4}a + 2p$, $\frac{3}{4}a < 2p$, $a < \frac{8}{3}p$; was zu beweisen war.

2. Da demnach jede associirte Form wenigstens eine positive Zahl darstellt, die $< \frac{8}{3}p$ ist, so kann man jede associirte Form in eine aequivalente *reducirte* Form (§. 6.) verwandeln, deren erster Coëfficient $< \frac{8}{3}p$ ist. Bildet man demnach alle reducirten Formen, deren erster Coëfficient $< \frac{8}{3}p$ ist, so wird die Anzahl derselben gröfser sein als die Anzahl der Classen, wenn sich unter ihnen aequivalente befinden. Aber aus der Definition der reducirten Formen (§. 6. (9.)) folgt, dafs die Anzahl derselben endlich ist: folglich ist um so mehr *die Anzahl der Classen endlich*, und es ist zugleich eine Methode gegeben, um ein vollständiges System nicht aequivalenter Formen zu construiren. Wäre es gestattet, länger bei dem eben gefundenen, höchst wichtigen Resultate zu verweilen, so würden sich auf dasselbe neue und elegante Lösungen der Probleme des §. 4. und §. 9. gründen lassen; wir behalten es übrigens vor, auf diesen Gegenstand zurückzukommen. Wie schon bemerkt, wird sich weiter unten ein analytischer Beweis des Satzes ergeben; es ist daher vorläufig das bisher Entwickelte zu ignoriren.

II. Es sei

$$(1.) \quad F, \quad F', \quad F'', \quad F''' \quad \text{etc.}$$

ein System von nicht aequivalenten associirten Formen, welche also die Eigenschaft haben, dafs jede associirte Form einer und nur einer von ihnen aequivalent ist. Man suche alle ganzen Zahlen auf, welche durch die Formen (1.)

dargestellt werden können und bestimme für jede von ihnen die Anzahl der eigentlichen Darstellungen, deren dieselbe durch die Gesammtheit der Formen (1.) fähig ist. Damit eine ganze positive Zahl M, welche zu $2(pp_1 - pp_2)$ relative Primzahl vorausgesetzt wird, durch eine der Formen (1.) darstellbar sei, ist nöthig, dafs eine reducirte Form mit dem ersten Coëfficienten M existire, welche einer jener Form aequivalent ist: folglich ist nach §. 7. erforderlich, dafs jeder Primfactor von M zu p *cubischer Rest* sei. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, und ich behaupte, dafs wenn man

$$(2.) \qquad M = q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} \ldots\ldots q_\mu^{n_\mu}$$

setzt, wo q_1, q_2 u. s. w. verschiedene Primfactoren von M und sämmtlich zu p cubische Reste sind, die Anzahl der Gruppen von Darstellungen von M durch die Gesammtheit der Formen (1.) endlich und durch die Formel

$$(3.) \qquad 3n_1 . 3n_2 . 3n_3 \ldots\ldots 3n_\mu$$

ausgedrückt sein wird. In der That: unter der für die Primfactoren q von M gemachten Annahme bezeichnet die eben geschriebene Formel (3.) nach §. 7. die Anzahl der reducirten Formen, deren erster Coëfficient M ist; und da jede dieser reducirten Formen einer und nur einer von den Formen (1.) aequivalent ist, so entspricht nach §. 6. jeder dieser reducirten Formen eine und nur eine Gruppe von Darstellungen der Zahl M durch die Gesammtheit der Formen (1.). Giebt es z. B. unter den reducirten Formen α solche, welche F aequivalent sind, β solche, welche F' aequivalent sind u. s. w., so hat man α Gruppen von Darstellungen von M durch F, β Gruppen von Darstellungen von M durch F' u. s. w. Da nun $\alpha + \beta + \ldots\ldots$ dem Ausdrucke in (3.) gleich ist, so giebt die Formel (3.) die Anzahl der Gruppen von Darstellungen, welche M durch die Gesammtheit der Formen (1.) zuläfst.

Es lassen sich jetzt nach dem vorigen Paragraphen die Variabeln jeder associirten Form Bedingungen unterwerfen, durch welche alle Darstellungen einer Gruppe auf eine dieser Darstellungen zurückgeführt werden. Diese Bedingungen sind für die Form F, wenn man a den ersten Coëfficienten von F vorstellen läfst und $a^2 F = \varphi\psi\chi$ setzt,

$$(4.) \qquad \begin{cases} 0 \leqq (\operatorname{Log}\mathfrak{A} + \operatorname{Log}\mathfrak{B}).\operatorname{Log}(k\varphi) + \operatorname{Log}\mathfrak{B}.\operatorname{Log}(k\psi) < \sigma, \\ 0 \leqq \operatorname{Log}\mathfrak{B}.\operatorname{Log}(k\varphi) - \operatorname{Log}\mathfrak{A}.\operatorname{Log}(k\psi) < \sigma, \end{cases}$$

und von ähnlicher Gestalt für die übrigen Formen. Man sieht also, dafs, wenn man in den Formen (1.) den Variabeln nur solche Werthe in relativen Primzahlen giebt, welche den Bedingungen (4.) genügen, die Anzahl der

Darstellungen von M durch die Formen (1.) endlich und durch die Formel (3.) ausgedrückt sein wird.

Bildet man demnach zwei Reihen von Zahlen, indem man einerseits in den Formen (1.) die Variabeln alle möglichen ganzen Werthe durchlaufen läfst, welche erstlich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, zweitens den Bedingungen (4.) genügen, und welche endlich drittens den Formen (1.) Werthe geben, die zu $2(pp_1-pp_2)$ relative Primzahlen und positiv sind: und indem man andrerseits alle ganzen Zahlen M hinschreibt, deren sämmtliche Primfactoren zu p cubische Reste sind, und zwar jedes M *so oft*, als die Formel (3.) anzeigt: so werden diese beiden Reihen vollkommen identisch sein und sich durch nichts anderes unterscheiden, als durch die Anordnung ihrer Glieder; und diese Identität wird nicht aufhören, wenn man in beiden Reihen von jedem ihrer Glieder eine ganz beliebige Function nimmt. Es ist demnach leicht, die Richtigkeit der folgenden allgemeinen Formel einzusehen, welche wir jetzt schreiben wollen, und in welcher zwei Fälle unterschieden sind, je nachdem die Anzahl der Glieder der Reihe (1.) endlich oder unendlich grofs angenommen wird:

$$(5.)\qquad \Sigma\frac{3n_1.3n_2\ldots.3n_\mu}{M^s} \overset{=}{>} \Sigma\frac{1}{F^s}+\Sigma\frac{1}{F'^s}+\Sigma\frac{1}{F''^s}+\text{etc.}\ ^{*})$$

In dieser Formel bezeichnet der Exponent s eine beliebige Constante >1. Das Zeichen $=$ bezieht sich auf den Fall, wenn man zugiebt, dafs die Anzahl der Formen (1.) *endlich* ist, das Zeichen $>$ auf den andern Fall, wenn man das Gegentheil behauptet: in beiden Fällen soll die Anzahl der Partialsummen rechts *endlich* und $=H$ angenommen werden, während H im ersten der beiden eben unterschiedenen Fälle die Anzahl der Formen (1.), im zweiten Falle eine *beliebig grofse* ganze Zahl bezeichnet. Die Summe zur Linken erstreckt sich über alle positiven ganzen Zahlen M, welche zu $\frac{2(pp_1-pp_2)}{\varrho-\varrho^2}=E$ relative Primzahlen sind und deren sämmtliche Primfactoren q der Bedingung

$$(6.)\qquad \left[\frac{q}{p_1}\right]=1$$

genügen, während μ für jedes dieser unendlich vielen eben definirten M die Anzahl seiner Primfactoren und $n_1, n_2, \ldots. n_\mu$ die Exponenten derselben

*) Obgleich der zweite von diesen beiden Fällen unstatthaft ist, ignoriren wir doch jetzt das in I. Gesagte, und müssen ihn daher so lange mitgelten lassen, bis die Überzeugung von seiner Unmöglichkeit analytisch gegeben sein wird.

bezeichnen. Die Summen zur Rechten beziehen sich auf alle ganzen Werthe der Variabeln der Formen $F, F', \ldots. F^{(H-1)}$, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, den Bedingungen (4.) genügen und den Formen Werthe geben, die zu E relative Primzahlen und positiv sind. Die Richtigkeit der Formel ergiebt sich aus der Identität der beiden oben betrachteten Reihen und aus dem Umstande, dafs die Summe zur Linken aus lauter positiven Gliedern besteht und einen vollkommen bestimmten und, wie hieraus folgt, von der Anordnung ihrer Glieder unabhängigen Werth hat, so lange nur die Constante s über der Einheit liegt. Wenn zuerst die Anzahl der Formen (1.) endlich und $=H$ ist, so entspricht in (5.) jedem Gliede links ein und nur ein Glied rechts, und umgekehrt jedem Gliede rechts ein und nur ein Glied links. Da nun die Summe links von der Aufeinanderfolge ihrer Glieder unabhängig ist, so sind in diesem ersten Falle die beiden Theile der Formel einander vollkommen gleich. Ist hingegen die Anzahl der Formen (1.) unendlich grofs, so werden rechts noch nicht so viele Glieder stehen, als links; und da alle Glieder positiv sind, so wird offenbar die Summe links den Complex der H Summen rechts an Gröfse übertreffen: denn wenn man aus einer Summe von selbst unendlich vielen positiven Gliedern, welche einen ganz bestimmten und von der Anordnung ihrer Glieder unabhängigen Werth hat, eine Anzahl von Gliedern herausfallen läfst, so wird der Werth der Summe dadurch verringert werden.

Behandeln wir zuerst die Reihe auf der linken Seite von (5.). Bezeichnet man durch q das allgemeine Glied aller reellen Primzahlen, welche nicht in E aufgehen und welche der Bedingung (6.) genügen, und bedenkt man, dafs jede ganze Zahl M eine und nur eine Zerfällung in Primfactoren wie in (2.) zuläfst, so ist leicht zu sehen, dafs die Reihe links in (5.) sich auf die Form des unendlichen Productes

$$\Pi\left(1+\frac{3.1}{q^s}+\frac{3.2}{q^{2s}}+\frac{3.3}{q^{3s}}+\frac{3.4}{q^{4s}}+\frac{3.5}{q^{5s}}+\text{ in inf.}\right)$$

bringen läfst, in welchem Π sich auf alle q bezieht.

Da allgemein

$$1+3z+3.2z^2+3.3z^3+3.4z^4+3.5z^5+\text{ in inf.} = \frac{1+z+z^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^3}{(1-z)^3}$$

ist, so ist obiges Product so viel als

$$\frac{\Pi\left(1-\frac{1}{q^{3s}}\right)}{\Pi\left(1-\frac{1}{q^s}\right)^3} = \frac{\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}\right)^3}{\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{3s}}}\right)}.$$

Alle möglichen Primzahlen g, welche nicht in E aufgehen, zerfallen in drei Classen. Die der ersten Classe, welche bereits durch q bezeichnet wurde, genügen der Bedingung (6.), während die der beiden andern Classen, die resp. durch r und s bezeichnet wurden, resp. den Bedingungen

$$(7.)\qquad \left[\frac{r}{p_1}\right]=\varrho,\quad \left[\frac{s}{p_1}\right]=\varrho^2$$

genügen, also die nichtcubischen Reste zu p sind; und man sieht, dafs alle q, alle r und alle s zusammengenommen alle g erschöpfen. Multiplicirt man jetzt Zähler und Nenner des eben geschriebenen Productes mit

$$\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{r^{3s}}}\right)\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{s^{3s}}}\right),$$

und bedenkt, dafs

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{q^s}\right)^3 &= \left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{1}{q^s}\right),\\ 1-\frac{1}{r^{3s}} &= \left(1-\frac{1}{r^s}\right)\left(1-\frac{\varrho}{r^s}\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{r^s}\right),\\ 1-\frac{1}{s^{3s}} &= \left(1-\frac{1}{s^s}\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{s^s}\right)\left(1-\frac{\varrho}{s^s}\right),\end{aligned}$$

so erhält man

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{r^s}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{s^s}}\times\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{\varrho}{r^s}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{\varrho^2}{s^s}}$$

$$\times\,\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{\varrho^2}{r^s}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{\varrho}{s^s}}\quad \text{dividirt durch}\quad \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^{3s}}},$$

oder auch, was wegen (6.) und (7.) Dasselbe ist, wenn man erwägt, dafs

$$\left[\frac{g}{p_1}\right]=1\quad\text{oder}\quad=\varrho\quad\text{oder}\quad=\varrho^2$$

ist, je nachdem $g=q$ oder $=r$ oder $=s$ ist:

$$\frac{\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^s}}\,\Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]\frac{1}{g^s}}\,\Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]^2\frac{1}{g^s}}}{\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^{3s}}}}.$$

Es sind jetzt vier Producte zu betrachten, von welchen drei den Zähler und eines den Nenner des eben geschriebenen Ausdrucks bilden. Von diesen vier Producten läfst sich jedes in eine merkwürdige und sehr einfache

Reihe transformiren, wenn man sein allgemeines Glied nach der Formel

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+ \text{ in inf.}$$

entwickelt und dann die sich über alle g erstreckenden Multiplicationen wirklich ausführt. In der That: bedenkt man, dafs jedes Product aus Primzahlen, wie g, eine ganze Zahl m hervorbringt, die mit E keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, und dafs umgekehrt jede positive ganze Zahl m, die dieser letztern Bedingung genügt, sich auf eine, und nur auf eine Art in Primzahlen g zerlegen läfst, und berücksichtigt man aufserdem die allgemeine Formel (Vergl. „Beweis des cubischen Recipr. Ges.")

$$\left[\frac{g_1}{p_1}\right]^{n_1}\left[\frac{g_2}{p_1}\right]^{n_2}\dots = \left[\frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2}\dots}{p_1}\right],$$

so erhält man offenbar, wenn m das allgemeine Glied aller positiven ganzen Zahlen bezeichnet, welche zu E relative Primzahlen sind,

$$(8.)\quad \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^s}} = \Sigma\frac{1}{m^s},$$

$$(9.)\quad \Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]\frac{1}{g^s}} = \Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]\frac{1}{m^s},$$

$$(10.)\quad \Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]^2\frac{1}{g^s}} = \Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]^2\frac{1}{m^s},$$

$$(11.)\quad \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^{3s}}} = \Sigma\frac{1}{m^{3s}}.$$

Hiernach nimmt die ursprüngliche Reihe in (5.), um deren Transformation es sich handelte, die Form

$$\frac{\Sigma\frac{1}{m^s}\cdot\Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]\frac{1}{m^s}\,\Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]^2\frac{1}{m^s}}{\Sigma\frac{1}{m^{3s}}}$$

an, wo sich jede der vier Summen über alle positiven ganzen Zahlen erstreckt, die mit $E = \frac{2(pp_1-pp_2)}{\varrho-\varrho^2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Fasset man jetzt wieder (5.) ins Auge und multiplicirt dort mit dem Nenner des eben geschriebenen Ausdrucks nach rechts hinüber (was offenbar erlaubt ist, da der Werth dieses aus lauter positiven Gliedern bestehenden Nenners positiv ist),

so erscheint links das Product der drei Reihen im Zähler des eben geschriebenen Ausdrucks, während man rechts einen Complex von H Termen erhält, von welchen sich jeder auf folgende Weise umformen läfst. Der erste Term wird offenbar, wenn man die Multiplication ausführt, der Quadrupelreihe

$$\Sigma \frac{1}{(m^3 F)^s}$$

gleich. Nun ist F eine homogene Function dritten Grades der drei Variabeln u, v, w; folglich ist $m^3 F$ nichts anders, als Das, was man aus F erhält, wenn man an die Stelle der ursprünglichen Variabeln $mu = u_1$, $mv = v_1$, $mw = w_1$ setzt. Da m offenbar von den Werthen von u, v, w ganz unabhängig ist, so ist es erlaubt, in den Ungleichheiten (4.) die Constante k als eine Function von m zu betrachten. Es sei dort km an die Stelle von k gesetzt, und es werde das neue k als von m unabhängig betrachtet. Dadurch gehen $k\varphi$, $k\psi$ resp. in $km\varphi$, $km\psi$ über. Aber da φ, ψ lineare Functionen von u, v, w sind, so ist $m\varphi$ nichts anders als $\varphi(u_1, v_1, w_1)$ und $m\psi$ nichts anders als $\psi(u_1, v_1, w_1)$; folglich behalten die Bedingungen (4.) nach dieser neuen Annahme genau dieselbe Form, welche sie vor derselben hatten, während an die Stelle von u, v, w die neuen Variabeln u_1, v_1, w_1 treten. Sehen wir jetzt, welches die Natur dieser neuen Systeme u_1, v_1, w_1 sei. Da u, v, w keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist m der gröfste gemeinschaftliche Theiler von u_1, v_1, w_1: aber m stellt jede positive ganze Zahl vor, die zu E relative Primzahl ist, und da F zu E relative Primzahl werden soll, so ist es nöthig und hinreichend, dafs $m^3 F$, d. h. F, wenn man statt u, v, w resp. u_1, v_1, w_1 setzt, zu E relative Primzahl werde. Nun können nur solche Werthe von u_1, v_1, w_1 den Werth von E zu einer zu F relativen Primzahl machen, deren gröfster gemeinschaftlicher Theiler zu E relative Primzahl ist. Also repräsentiren u_1, v_1, w_1 alle möglichen ganzen Systeme, welche, in F statt der Variabeln gesetzt, F zu einer zu E relativen Primzahl und positiv machen, und in φ, ψ statt der Variabeln gesetzt, die Bedingungen (4.) erfüllen. Nachdem so die Natur dieser neuen Systeme gefunden ist, können wir wieder u, v, w statt u_1, v_1, w_1 schreiben. Dieses giebt

$$\Sigma \frac{1}{F^s},$$

wo sich die Summation über alle ganzen Werthe von u, v, w erstreckt, die F zu einer zu E relativen Primzahl und positiv machen und den Bedingungen (4.) genügen. Da die $H-1$ übrigen Termen einer ganz ähnlichen Reduction fähig

sind, so ergiebt sich aus (5.) folgendes Resultat:

$$(12.)\quad \Sigma\frac{1}{m^s}.\Sigma\frac{\varrho^{\text{Ind.}m}}{m^s}.\Sigma\frac{\varrho^{2\,\text{Ind.}m}}{m^s} \gtreqless \Sigma\frac{1}{F^s}+\Sigma\frac{1}{F'^s}+\Sigma\frac{1}{F''^s}+ \text{ etc.},$$

wo statt $\left[\frac{m}{p_1}\right]$ der gleichbedeutende Ausdruck $\varrho^{\text{Ind.}m}$ geschrieben, und wo es ganz gleichgültig ist, auf welche primitive Wurzel man Ind. m bezieht, da die Annahme einer andern höchstens eine Vertauschung der zweiten und dritten Reihe links in (12.) zur Folge haben kann, also den Werth ihres Productes nicht ändert. Die drei Summationen links erstrecken sich über alle positiven ganzen Zahlen m, welche mit E keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; während rechts in jeder der H Formen F u. s. w. die Variabeln alle ganzen Werthe durchlaufen, welche den Werth der entsprechenden Form positiv und zu einer zu E relativen Primzahl machen, und welche den jeder Form entsprechenden Bedingungen (4.) genügen.

Die Formel (12.) wird jetzt dazu dienen, die Anzahl der Classen zu bestimmen. Um diesen Zweck zu erreichen, bedienen wir uns der von *Dirichlet* eingeführten, sehr expeditiven und ungemein fruchtbaren Grenzbetrachtungen. Man setze $1+\varepsilon$ an die Stelle von s und multiplicire beide Seiten der Formel mit ε. Für alle Werthe von $\varepsilon>0$ wird, je nach den beiden Fällen, die zu unterscheiden sind, die Gleichheit oder Ungleichheit unverändert bleiben. Kann man nun zeigen, dafs jede der beiden Seiten der so umgewandelten Formel eine vollkommen *stetige* Function von ε ist, die auch für $\varepsilon=0$ ihre Stetigkeit nicht verliert, so folgt, dafs auch für $\varepsilon=0$ die Gleichheit oder Ungleichheit besteht, und dafs im zweiten Falle wenigstens das Zeichen $>$ nicht in $<$, sondern höchstens in $=$ übergehen kann. Die Function $\varepsilon\Sigma\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$ ist stetig für alle abnehmenden positiven Werthe von ε bis $\varepsilon=0$ *inclusive,* und nimmt für $\varepsilon=0$ einen vollkommen bestimmten endlichen Werth an, vorausgesetzt, dafs man die Werthe von m in ihrer natürlichen Reihenfolge, d. h. nach ihrer Gröfse geordnet, auf einander folgen lasse. Unter derselben Voraussetzung sind die Reihen $\Sigma\frac{\varrho^{\text{Ind.}m}}{m^{1+\varepsilon}}$ und $\Sigma\frac{\varrho^{2\,\text{Ind.}m}}{m^{1+\varepsilon}}$ sogar bis $\varepsilon=-1$ (exclusive) stetig und nehmen für $\varepsilon=0$ ebenfalls endliche Werthe an. Endlich sind die Functionen

$$\varepsilon\Sigma\frac{1}{F^{1+\varepsilon}},\qquad \varepsilon\Sigma\frac{1}{F'^{1+\varepsilon}},\quad \text{u. s. w.}$$

bis $\varepsilon=0$ *inclusive* stetig und werden für $\varepsilon=0$ endlich und alle *einander*

gleich, so dafs ihre Summe für $\varepsilon = 0$ zu einem Product aus H und einem endlichen Ausdrucke wird. Es folgt hieraus weiter, mit Evidenz, dafs die Anzahl der Formen in (1.) nicht unendlich grofs sein kann: denn wäre dies möglich, so würde man, während H eine beliebig grofse ganze Zahl vorstellt, aus der Formel für $\varepsilon = 0$ eine Formel von folgender Gestalt herleiten können:

$$L \geqq H . L',$$

während L und L' vollkommen bestimmte endliche positive Werthe sind. Eine solche Formel enthält aber offenbar einen Widerspruch, da von vorn herein $H > \frac{L}{L'}$ angenommen werden konnte.

„Die Anzahl der Classen, in welche sich alle associirten Formen „eintheilen lassen, ist also immer endlich."

Diese Art zu schliefsen ist derjenigen ganz ähnlich, durch welche *Dirichlet* bewiesen hat, dafs für die quadratischen Formen alle *möglichen* Genera wirklich existiren.

Ausdruck der Anzahl der Classen durch das Product zweier conjugirten unendlichen Reihen.

§. 11.

I. Um die am Schlusse des vorigen Paragraphen angedeuteten Untersuchungen auszuführen, ist zu erforschen, was jede der oben erwähnten Functionen wird, wenn man ε gegen seine Grenze Null convergiren läfst. Die beiden Reihen $\Sigma \frac{\varrho^{\text{Ind.}\, m}}{m^{1+\varepsilon}}$ und $\Sigma \frac{\varrho^{2\, \text{Ind.}\, m}}{m^{1+\varepsilon}}$ machen keine Schwierigkeit, denn sie verwandeln sich geradezu in diejenigen Reihen, welche man aus ihnen erhält, wenn man $\varepsilon = 0$ setzt, also in die Reihen

$$(13.) \qquad \frac{\varrho^{\text{Ind.}\, m}}{m} \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{\varrho^{2\, \text{Ind.}\, m}}{m}.$$

(Vergl. *Dirichlet* „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale etc." im 19ten Bande dieses Journals Seite 330.)

Um den Werth der Function $\varepsilon \Sigma \frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$ für $\varepsilon = 0$ zu finden, bemerke man, dafs alle Werthe von m in eine endliche Anzahl von Gruppen getheilt werden können, deren allgemeine Glieder die Form

$$m' E + \alpha = E m_1$$

haben, wo m' alle positiven ganzen Zahlen und α eine bestimmte ganze Zahl

$< E$ vorstellt, so dafs m_1 das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe mit der Differenz 1 wird. Bezeichnet man durch $f_1, f_2, \ldots\ldots$ alle in E aufgehenden Primzahlen, so wird die Anzahl dieser Gruppen durch

$$E\left(1-\frac{1}{f_1}\right)\left(1-\frac{1}{f_2}\right)\ldots\ldots = E\,\Pi\left(1-\frac{1}{f}\right)$$

ausgedrückt; denn α erhält nach und nach alle Werthe, die $< E$ und zu E relative Primzahlen sind. Hiernach zerfällt die Summe $\varepsilon\,\Sigma\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$ in eben so viele Partialsummen von der Form

$$\frac{1}{E^{1+\varepsilon}}\cdot\varepsilon\,\Sigma\frac{1}{m_1^{1+\varepsilon}},$$

und da $\frac{1}{E^{1+\varepsilon}}$ für $\varepsilon = 0$ in $\frac{1}{E}$ übergeht, so ist nur noch zu untersuchen, was $\varepsilon\,\Sigma\frac{1}{m_1^{1+\varepsilon}}$ wird. Dies geschieht nach dem von *Dirichlet* aufgestellten Satze (R. s. d. a. etc. Seite 327). Die Anzahl der Werthe von m_1, welche $< K$ sind, wenn K eine beliebig hohe positive Grenze bezeichnet, liegt immer zwischen K und $K+1$; also ist das Verhältnifs dieser Anzahl zu K, wenn $K = \infty$ wird, $= 1$; mithin ist auch nach dem *Dirichlet*schen Satze der Werth der Partialsumme $= \frac{1}{E}\cdot 1 = \frac{1}{E}$ für $\varepsilon = 0$; folglich ist der Werth der ganzen Summe für $\varepsilon = 0$,

$$(14.)\qquad = \Pi\left(1-\frac{1}{f}\right),$$

nämlich gleich einem endlichen Producte, in welchem sich die Multiplication über alle reellen Primfactoren f von $E = \frac{2(pp_1 - pp_2)}{\varrho - \varrho^2}$ erstreckt.

II. Aufgabe. „Alle Systeme von Werthen der Variabeln zu finden, welche eine associirte Form zu einer zu E relativen Primzahl machen."

Gehen wir zuerst von einer allgemeineren Voraussetzung aus, und nehmen an, dafs G eine beliebige ternäre cubische Form mit ganzen Coëfficienten sei. Da congruente Werthe der Variabeln (mod. E) der Form G selbst congruente Werthe geben, so werden sich offenbar alle Systeme von Werthen der Variabeln u, v, w, welche G zu einer zu E relativen Primzahl machen, durch eine endliche Anzahl von Congruenzen von der Form

$$u \equiv u_0,\quad v \equiv v_0,\quad w \equiv w_0 \quad (\text{mod. } E)$$

darstellen lassen, während u_0, v_0, w_0 aus irgend einem bestimmten Restensysteme (mod. E) genommen sind und ebenfalls der Bedingung genügen. Wir nennen je zwei Systeme *congruent* oder *incongruent*, je nachdem sie in

einer und derselben, oder in verschiedenen dieser Formeln enthalten sind. Ich behaupte jetzt, dafs, wenn die Form G' in G durch eine Substitution

$$(15.)\quad \begin{cases} \alpha u+\alpha' v+\alpha'' w = u', \\ \beta u+\beta' v+\beta'' w = v', \\ \gamma u+\gamma' v+\gamma'' w = w' \end{cases}$$

übergeht, deren Coëfficienten ganz sind, und deren Determinante Δ zu E relative Primzahl ist, die Anzahl der der Bedingung genügenden incongruenten Systeme für G' genau eben so grofs sein wird, wie für G. In der That: betrachtet man die eben geschriebenen Gleichungen (15.) als Congruenzen (mod. E), und löset sie durch Elimination nach u, v, w auf, so erhält man ein System Congruenzen von der Form

$$(16.)\quad \begin{cases} \Delta u \equiv \alpha_1 u'+\alpha'_1 v'+\alpha''_1 w' \pmod{E}, \\ \Delta v \equiv \beta_1 u'+\beta'_1 v'+\beta''_1 w' \pmod{E}, \\ \Delta w \equiv \gamma_1 u'+\gamma'_1 v'+\gamma''_1 w' \pmod{E}; \end{cases}$$

und da Δ zu E relative Primzahl ist, so sieht man aus (16.), dafs jedem Systeme u', v', w' ein, und nur ein vollkommen bestimmtes System u, v, w entspricht; und aus (15.) sieht man, dafs jedem System u, v, w ein vollkommen bestimmtes System u', v', w' entspricht. Andrerseits hat man, wenn man die Variabeln von G und G' durch (15.) oder durch (16.) verknüpft sich vorstellt, in allen Fällen $G \equiv G' \pmod{E}$: folglich entspricht jedem Systeme u, v, w, welches G zu einer zu E relativen Primzahl macht, auch ein solches u', v', w', welches G' zu einer zu E relativen Primzahl macht; und umgekehrt: jedem Systeme u', v', w', welches G' zu einer zu E relativen Primzahl macht, entspricht ein solches u, v, w, welches G zu einer zu E relativen Primzahl macht; immer abgesehn von Vielfachen des Moduls: folglich ist die Anzahl der incongruenten Systeme von Variabeln, welche G' zu einer zu E relativen Primzahl machen, gleich der Anzahl der incongruenten Systeme, welche G zu einer zu E relativen Primzahl machen.

Nach §. 7. und §. 6. kann man jede associirte Form in eine aequivalente transformiren, deren erster Coëfficient zu E relative Primzahl ist; und nach dem Vorigen wird die Anzahl der incongruenten Systeme, welche die neue Form zu einer zu E relativen Primzahl machen, dieselbe sein, wie für die alte Form; denn die Determinante des Transformationssystems ist hier $= 1$, also gewifs relative Primzahl zu E. Es sei also F eine associirte Form, deren erster Coëfficient a zu E relative Primzahl ist, so ist es offenbar nöthig und hinreichend für unsere Bedingung, dafs a^2F zu E relative Primzahl sei. Zer-

legt man $a^2 F$ auf die häufig in dieser Abhandlung vorkommende Weise, so sieht man aus §. 5., dafs $a^2 F$ aus der einfachen Grundform

$$u^3 + pp_1(v+w\varrho)^3 + pp_2(v+w\varrho^2)^3 + 3pu(v+w\varrho)(v+w\varrho^2) = \Phi$$

durch eine Substitution gefunden werden kann, deren Determinante $= a^2$, also zu E relative Primzahl ist. Wir können also wieder den vorhin bewiesenen Satz anwenden und sehen nun, dafs Alles jetzt darauf ankommt, die Anzahl incongruenter Systeme u, v, w zu finden, für welche Φ zu E relative Primzahl wird. Es sei

$$E = f_1^{n_1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} \ldots.$$

Bestimmen wir einzeln die Anzahl von Systemen (mod. $f_1^{n_1}$), (mod. $f_2^{n_2}$) etc, für welche Φ resp. zu $f_1^{n_1}$, $f_2^{n_2}$ etc. relative Primzahl ist. Das Product aller dieser einzelnen Anzahlen wird die gesuchte Anzahl geben; denn jede Combination der nach jenen einzelnen Moduln gefundenen Systeme liefert ein System nach dem Modul E. Um aber alle nach dem Modul f^n incongruenten Systeme zu finden, für welche Φ zu f^n relative Primzahl wird, hat man nur aus allen möglichen f^{3n} nach (mod. f^n) incongruenten Systemen diejenigen auszuscheiden, für welche $\Phi \equiv 0$ (mod. f) wird. Es seien μ Systeme vorhanden, deren Variabeln in der Reihe

$$0, \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; f-1$$

liegen und welche dieser letzteren Congruenz genügen. Aus jedem derselben kann man offenbar durch Hinzufügung von Vielfachen von f $f^{3(n-1)}$ Systeme ableiten, welche in der Reihe

$$0, \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; f^n-1$$

liegen; folglich giebt es nach dem Modul f^n überhaupt $\mu . f^{3(n-1)}$ Systeme, für welche $\Phi \equiv 0$ (mod. f) wird, und mithin giebt die Differenz $f^{3n} - \mu f^{3(n-1)} = f^{3n}\left(1-\frac{\mu}{f^3}\right)$ die Anzahl aller nach dem Modul f^n incongruenten Systeme, für welche Φ zu f^n relative Primzahl ist. Überhaupt ist also die gesuchte Anzahl

$$= f_1^{3n_1}\left(1-\frac{\mu_1}{f_1^3}\right) f_2^{3n_2}\left(1-\frac{\mu_2}{f_2^3}\right) \ldots = E^3\left(1-\frac{\mu_1}{f_1^3}\right)\left(1-\frac{\mu_2}{f_2^3}\right)\ldots,$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots$ resp. die Anzahlen der nicht congruenten Lösungen von $\Phi \equiv 0$ (mod. f_1), $\Phi \equiv 0$ (mod. f_2) u. s. w. bezeichnen. Es handelt sich jetzt darum, für jeden Primfactor f von E das zugehörige μ zu finden.

Für $f = 2$ hat man $(v+w\varrho)^3 \equiv v^3 + v^2 w\varrho + vw^2\varrho^2 + w^3 \equiv v+w+vw(\varrho+\varrho^2) \equiv v+w+vw$ (mod. 2); eben so $(v+w\varrho^2)^3 \equiv v+w+vw$ (mod. 2.); ferner $u^3 \equiv u$, $(v+w\varrho)(v+w\varrho^2) \equiv v+w+vw$, und $p \equiv 1$, $-3p \equiv 1$ (mod. 2); also ergiebt sich $\Phi \equiv u+(p_1+p_2+u)(v+w+vw)$ (mod. 2).

Es kommt also darauf an, alle Systeme u, v, w aus der Reihe 0, 1 zu finden, für welche der zuletzt geschriebene Ausdruck gerade wird. Ist nun erstens p_1+p_2, oder, was dasselbe besagt, p_1-p_2 *gerade*, so hat man blofs $u(1+v+w+vw)=u(1+v)(1+w)\equiv 0 \pmod 2$ zu machen. Setzt man $u=0$, so können v und w jeden Werth haben; und setzt man $u=1$, so kann man für v, w resp. 0, 1; 1, 0; 1, 1 nehmen: also erhält man im Ganzen *sieben* Systeme, die der Bedingung genügen. Ist zweitens $p_1\pm p_2$ *ungerade*, so wird der Ausdruck $u+(p_1+p_2+u)(v+w+vw)$ immer ungerade, wenn man $u=1$ setzt; und für $u=0$ hat man $v+w+vw$ gerade zu machen, welches $v=0$, $w=0$ erfordert; mithin existirt in diesem zweiten Falle nur *ein einziges* System $u=0$, $v=0$, $w=0$, welches $\Phi\equiv 0 \pmod 2$ macht. Also hat man $\mu=7$ oder $\mu=1$, je nachdem p_1-p_2 gerade oder ungerade ist.

Für $f=3$ hat man $pp_1\equiv -1\equiv pp_2 \pmod 3$, $u^3\equiv u$, $(v+w\varrho)^3\equiv v^3+w^3\equiv v+w \pmod 3$; eben so $(v+w\varrho^2)^3\equiv v+w$: also ist $\Phi\equiv u+v+w \pmod 3$ und folglich giebt es zu jedem Werthe von v und w aus 0, 1, 2 einen, und nur einen für u, welcher $\Phi\equiv 0 \pmod 3$ macht. Also ist $\mu=9$.

Für $f=p$ hat man offenbar $\Phi\equiv u^3 \pmod p$; also mufs man nothwendig $u=0$ setzen, und v und w können dann beliebige Werthe aus $0, 1, 2, \ldots . p-1$ bekommen. Dies giebt $\mu=p^2$.

Andere, von 2, 3 und p verschiedene Primfactoren f von E, welche also Theiler von $\frac{p_1-p_2}{\varrho-\varrho^2}$, d. h. Theiler des Coëfficienten von ϱ in p_1 sind, kommen entweder gar nicht, oder nur in geringer Anzahl vor, wenn p nicht eine sehr beträchtliche Gröfse hat. Wirft man z. B. den Blick auf die kleine Tabelle am Ende des §. 3., so sieht man, dafs für alle Werthe von p, unter Hundert, der Coëfficient von ϱ in p_1 keinen einzigen von 2 und 3 verschiedenen Theiler hat. Ich behaupte jetzt, dafs alle diese Theiler, wenn sie vorkommen, zu p *cubische Reste* sind. Denn da für jeden dieser Theiler f, $p_1\equiv p_2 \pmod f$ ist, so folgt, wenn man auf beiden Seiten mit p_1^2 multiplicirt, $p_1^3\equiv pp_1 \pmod f$, folglich, wenn $f\equiv 2 \pmod 3$ ist, $\left[\frac{pp_1}{f}\right]=1$, und wenn $f\equiv 1 \pmod 3$, δ ein complexer Primfactor von f ist, $\left[\frac{pp_1}{\delta}\right]=1$. In beiden Fällen hat man also nach dem cubischen Reciprocitätsgesetze (Vergl. Band 27. Seite 305 und 307 dieses Journals) $\left[\frac{f}{p_1}\right]=1$, mithin ist f cubischer Rest zu p und folglich nach

§. 3. ein Theiler von Φ. Dieser schon an und für sich zierliche Satz vereinfacht die spätern Resultate bedeutend. Da also $pp_1 \equiv p_1^2$ und eben so $pp_2 \equiv p_2^2$ (mod. f) ist, so folgt

$$\Phi \equiv u^3 + (p_1(v+w\varrho))^3 + (p_2(v+w\varrho^2))^3 - 3u(p_1(v+w\varrho))(p_2(v+w\varrho^2)).$$

Letzterer Ausdruck läfst sich aber in das Product folgender drei rationalen Factoren zerlegen:

$$u+p_1 \,.\, (v+w\varrho)+p_2 \,.\, (v+w\varrho^2),$$
$$u+p_1\varrho\,(v+w\varrho)+p_2\varrho^2(v+w\varrho^2),$$
$$u+p_1\varrho^2(v+w\varrho)+p_2\varrho\,(v+w\varrho^2).$$

Jeder dieser drei Factoren $\equiv 0$ (mod. f) gesetzt, giebt zu jedem v und w ein ganz bestimmtes u, also f^2 Systeme u, v, w; folglich giebt es $3f^2$ Systeme, welche irgend einen der drei Factoren durch f theilbar machen. Unter diesen $3f^2$ Systemen kommen aber diejenigen doppelt vor, welche zugleich zwei der drei Factoren $\equiv 0$ (mod. f), aber nicht alle drei durch f theilbar machen; und dasjenige $u=0$, $v=0$, $w=0$, welches alle drei durch f theilbar macht, kommt sogar dreimal vor. Nun ist leicht zu sehen, dafs je zwei der obigen drei Factoren, zu gleicher Zeit $\equiv 0$ (mod. f) gesetzt, für jedes gegebene u ein ganz bestimmtes v und w, also f Systeme geben, so dafs es also $3f-3$ Systeme giebt, welche irgend zwei, aber nicht alle drei Factoren durch f theilbar machen: denn dafs es nur ein System u, v, w giebt, welches alle drei durch f theilbar macht, folgt unmittelbar daraus, dafs die Determinante desjenigen linearen Systems, welches die drei Factoren in u, v, w ausdrückt, $=-9p$ also zu f relative Primzahl ist. Man zieht hieraus $\mu = 3f^2-(3f-3)-2 = 3f^2-3f+1$, und dieser Werth von μ in $1-\frac{\mu}{f^3}$ gesetzt, giebt

$$\frac{f^3-3f^2+3f-1}{f^3} = \left(1-\frac{1}{f}\right)^3.$$

Nun ist immer $\left[\frac{f}{p_1}\right]=1$, also kann man diese Formel auch so schreiben:

$$\left(1-\frac{1}{f}\right)\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}\right)\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]^2\frac{1}{f}\right).$$

Die entsprechenden Werthe für $f=2, 3, p$ sind dagegen resp.

$$1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8} \text{ oder } 1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8};\quad 1-\frac{9}{27}=1-\frac{1}{3};\quad 1-\frac{p^2}{p^3}=1-\frac{1}{p}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe erhält man für die Anzahl der incongruenten Systeme, welche Φ, also auch derer, welche die ursprüngliche associirte Form zu einer zu E relativen Primzahl machen, durch die Formel

$$(17.)\qquad E^3\,\frac{\Pi\left(1-\frac{1}{f}\right)\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}\right)\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]^2\frac{1}{f}\right)}{\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]\frac{1}{3}\right)\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]^2\frac{1}{3}\right)}$$

ausgedrückt; wo sich die Multiplication über alle Primfactoren f von E, $f=2, 3$ und p nicht ausgeschlossen, erstreckt, und wo das Symbol $\left[\frac{f}{p_1}\right]$, wie bisher, den Rest von $f^{\frac{1}{3}(p-1)}$ (mod. p_1) bezeichnet; also die *Null*, wenn f mit p zusammenfällt. Die Richtigkeit dieser Formel erhellet nach dem Vorigen sogleich, wenn man bedenkt, dafs für $f=2$ der Fall $\mu=1$ gar nicht vorkommen kann, so oft 2 ein Theiler von p_1-p_1, also auch 2 ein Theiler von p_1+p_2 ist; denn dann ist $1-\frac{\mu}{8}=\frac{1}{8}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\left[\frac{2}{p_1}\right]\frac{1}{2}\right)\left(1-\left[\frac{2}{p_1}\right]^2\frac{1}{2}\right)$, weil für $p_1-p_2\equiv 0$ (mod. 2) immer $\left[\frac{2}{p_1}\right]=1$ ist; ist hingegen 2 blofs in E, aber nicht in p_1-p_2 enthalten, so gilt $\mu=1$, $1-\frac{\mu}{8}=1-\frac{1}{8}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\varrho\frac{1}{2}\right)\left(1-\varrho^2\frac{1}{2}\right)$; und in der That ist in diesem zweiten Falle $\left[\frac{2}{p_1}\right]=\varrho$ oder $=\varrho^2$, so dafs eine und dieselbe Formel beide Fälle umfafst: denn wäre in dem zweiten Fälle $\left[\frac{2}{p_1}\right]=1$, so hätte man, wegen $\left[\frac{2}{p_1}\right]=\left[\frac{p_1}{2}\right]\equiv p_1$ (mod. 2) und wegen $\left[\frac{2}{p_1}\right]^2=\left[\frac{2}{p_2}\right]=\left[\frac{p_2}{2}\right]\equiv p_2$ (mod. 2), sowohl $p_1\equiv 1$ (mod. 2), als auch $p_2\equiv 1$ (mod. 2) also $p_1-p_2\equiv 0$ (mod. 2); gegen die Voraussetzung. Was endlich den Theiler 3 betrifft, so erhellet, dafs für ihn im Zähler der obigen Formel die beiden Factoren des Nenners zu viel geschrieben worden sind, also mit denselben dividirt werden mufs.

III. Nachdem diese vorbereitende Aufgabe gelöset worden, kommen wir zu der Bestimmung der Functionen

$$\varepsilon.\Sigma\frac{1}{F^{1+\varepsilon}},\quad \varepsilon\Sigma\frac{1}{F'^{1+\varepsilon}},\ \text{u. s. w.}$$

für $\varepsilon=0$. Da die verschiedenen Formen F, F', ... in diesen Functionen sich nur durch ihre Coëfficienten von einander unterscheiden, und da in jeder derselben die Variabeln ganz ähnlichen Bedingungen unterworfen sind, wie in der ersten, so werden wir von den eben geschriebenen Functionen nur die erste, als Repräsentant aller übrigen, betrachten. Man wird später sehen, dafs das Resultat für diese specielle Form von dem Werthe ihrer Coëfficienten ganz unabhängig ist und nur von der Primzahl p abhängt, welche auf alle H

Formen denselben Einfluſs hat. Sobald diese Behauptung bewiesen sein wird, läſst sich schlieſsen, daſs das gefundene Resultat genau eben so für die andern $H-1$ Functionen richtig ist, und noch mehr, daſs man die Summe aller H Functionen für $s=0$ findet, wenn man das Resultat für eine derselben mit H multiplicirt.

Da die Variabeln der Form F zunächst der Bedingung genügen sollen, daſs F zu E relative Primzahl sei, so theilen sie sich in eine Anzahl Systeme von der Form

$$(18.)\quad u = Eu_1, \quad v = Ev_1, \quad w = Ew_1,$$

wo die neuen Variabeln u_1, v_1, w_1 gebrochene Werthe haben und nach beiden Seiten unbegrenzte arithmetische Reihen durchlaufen, deren Differenz $=1$ ist; die Anzahl dieser Systeme wird durch (17.) bestimmt. Untersuchen wir jetzt die Partialsummen, in welche hiernach die Summe $\frac{1}{F^{1+s}}$ zerfällt. Jede dieser Partialsummen hat dieselbe Form wie die ursprüngliche Summe, wenn man nur statt u, v, w die Formeln aus (18.) setzt. Verrichtet man diese Substitution, so folgt aus der Homogeneität der Function F, daſs man nichts anders erhält als E^3, multiplicirt mit demjenigen F, welches aus dem ursprünglichen F hervorgeht, wenn man u_1, v_1, w_1 an die Stelle von u, v, w schreibt. Setzt man andrerseits in die Ungleichheitsbedingungen (4.) $\frac{k}{E}$ statt der noch unbestimmt gelassenen Constante k, so bleiben auch diese ganz unverändert; nur daſs wegen der linearen Beschaffenheit von φ und ψ in diesen letzteren u_1, v_1, w_1 an die Stelle von u, v, w treten; denn es ist $u_1 = \frac{u}{E}$, $v_1 = \frac{v}{E}$, $w_1 = \frac{w}{E}$. Jede der Partialsummen erhält folglich die Form:

$$\frac{1}{E^{3(1+s)}} \sum \frac{1}{F^{1+s}},$$

unter der Bedingung

$$19.\quad \begin{cases} 0 \leqq (\text{Log}\,\mathfrak{A} + \text{Log}\,\mathfrak{B})\,\text{Log}\,k\varphi + \text{Log}\,\mathfrak{B}.\text{Log}\,k\psi < \sigma \text{ und} \\ 0 \leqq \text{Log}\,\mathfrak{B}.\text{Log}\,k\varphi - \text{Log}\,\mathfrak{A}.\text{Log}\,k\psi < \sigma; \end{cases}$$

wo sowohl in F als in φ und ψ die Variabeln nach beiden Seiten unbegrenzte arithmetische Reihen mit der Differenz 1 durchlaufen, und wo F positiv werden muſs. Da $E^{3(1+s)}$ für $s=0$ in E^3 übergeht, so ist jetzt bloſs der Werth von

$$(20.)\quad s\sum \frac{1}{F^{1+s}}$$

zu untersuchen und dieser dann durch E^3 zu dividiren.

Um den *Dirichlet*schen Satz anwenden zu können, mufs die Anzahl der Werthe der Variabeln bestimmt werden, für welche in der Summe (20.) F unter der Grenze K liegt, oder vielmehr der Werth des Verhältnisses dieser Anzahl zu K, wenn K ins Unendliche wächst. Es sei der Kürze wegen $K=\frac{1}{\zeta^3}$, $k=\zeta$ und ζ unendlich klein. Es ist also zu bestimmen, wie viele Werthe der vorhin definirten Variabeln es gebe, für welche $F\leqq\frac{1}{\zeta^3}$, d. h. $\zeta^3 F\leqq 1$ und F positiv ist; und für welche die Bedingungen (19.) erfüllt werden, wenn man dort ζ an die Stelle von k setzt. Da aber $\zeta^3 F$ nichts anders ist als F, wenn man die Variabeln mit ζ multiplicirt, und da eben so $\zeta\varphi$ und $\zeta\psi$ aus φ und ψ entstehen, so ist die Anzahl der Werthe solcher Variabeln zu suchen, welche unbegrenzte arithmetische Reihen mit der Differenz ζ durchlaufen, und welche den Bedingungen

$$(21.)\qquad 0<\varphi\psi\chi\leqq a^2,$$

$$(22.)\qquad \begin{cases} 0\leqq(\operatorname{Log}\mathfrak{A}+\operatorname{Log}\mathfrak{B})\operatorname{Log}\varphi+\operatorname{Log}\mathfrak{B}.\operatorname{Log}\psi<\sigma, \\ 0\leqq\operatorname{Log}\mathfrak{B}.\operatorname{Log}\varphi-\operatorname{Log}\mathfrak{A}.\operatorname{Log}\psi<\sigma \end{cases}$$

genügen; wo a den ersten Coëfficienten von F bezeichnet und $a^2F=\varphi\psi\chi$ ist. Diese Anzahl, durch k dividirt oder mit ζ^3 multiplicirt, ist offenbar nichts anders als der Werth des folgenden Tripel-Integrals:

$$(23.)\qquad \iiint\partial u\,\partial v\,\partial w=A,$$

welches sich über alle stetigen Werthe von u, v, w erstreckt, die den Bedingungen (21.) und (22.) genügen. In der That: betrachtet man die Bedingungen, welchen die Variabeln des eben geschriebenen Integrals unterworfen sind, so sieht man, dafs dasselbe, wenn u, v, w auf rechtwinklige Coordinaten-Axen bezogen werden, einen nach allen Seiten völlig begrenzten Körper ausdrückt. Es werde für einen Augenblick ζ noch als *endlich* angesehen, wenn auch als sehr klein; und es sei das Product aus ζ^3 und der oft erwähnten Anzahl $=B$; n sei diejenige endliche ganze Zahl, welche ausdrückt, wie oft die Oberfläche des Körpers, dessen Inhalt $=A$ ist, höchstens von einer geraden Linie geschnitten werden kann. Man stelle sich den unendlichen Raum durch Parallel-Ebenen mit den drei Coordinaten-Ebenen, jede von der andern in dem Abstande $=\zeta$ gezogen, in lauter kleine Würfelchen $=\zeta^3$ zerlegt vor; zu jedem Würfeleckpuncte betrachte man *einen* der 8 um ihn herumliegenden Würfelchen nach einem bestimmten Princip als zu dem Eckpuncte *gehörig*, z. B. denjenigen, welcher nach *oben*, nach *rechts* und nach

vorn liegt. Der Complex aller Würfelchen welche zu den sämmtlichen, innerhalb oder auf der Oberfläche des Körpers A liegenden Eckpuncten gehören, wird einen Körper bilden, dessen Inhalt $= B$ ist. Die Oberfläche dieses neuen Körpers B, welche sehr complicirt aber geradflächig sein wird, kann die des Körpers A mannigfaltig durchschneiden und bald aufserhalb bald innerhalb derselben liegen. Fassen wir eine der drei Coordinaten-Ebenen ins Auge, welche in lauter kleine Quadrate ζ^2 zerschnitten sein wird, und auf welcher sich nach beiden Seiten über jedem dieser kleinen Quadrate ein viereckiges Prisma erhebt. Jedes dieser kleinen Prismen wird die Oberfläche des Körpers A (höchstens n mal) durchbrechen und aus derselben kleine Stückchen herausschneiden, die wir durch ω bezeichnen; eben so wird jedes dieser Prismen aus der Oberfläche des Körpers B Würfelwände ζ^2 herausschneiden. Dasjenige Stück eines solchen Prisma k, welches zu A gehört, sei a, das zu B gehörende b. Rückt man in einem der Prismen k hinauf oder hinunter, bis man für ein bestimmtes ω zum *ersten* Male zu einer Würfelwand gelangt, die ganz aufserhalb ω fällt, so wird diese entweder mit der b beschliefsenden Würfelwand identisch sein, oder unmittelbar auf dieselbe folgen; das von diesen neuen Würfelwänden begrenzte Stück c des Prisma wird also höchstens um $2\zeta^3$ gröfser sein als b. Nimmt man statt der zum ersten Male aufserhalb ω fallenden Würfelwände die zum ersten Male ganz innerhalb ω fallenden, so wird das dieser Begrenzung entsprechende Stück d des Prisma höchstens um $2\zeta^3$ kleiner sein als b; jedenfalls liegen a und b beide zwischen c und d, so dafs also der absolute Werth der Differenz $a-b$ kleiner sein wird als $c-d$. Das kleine Stück $c-d=e$ enthält den Oberflächentheil ω ganz in sich und ist gleich dem Producte aus ζ in eine seiner Seitenwände; aber der höchste und der niedrigste Punct, in welchem diese Seitenwände ω begrenzen ist von resp. den höchsten und niedrigsten Puncten der Seitenwand selbst um weniger als ζ entfernt, und da ω krumm ist, so ist jede Seitenwand von e nothwendig $<\omega+2\zeta^2$: also ist e selbst $<\zeta.\omega+2\zeta^3$ und folglich kleiner als ein cylindrischer Körper, dessen Höhe ζ und dessen Grundfläche $\omega +$ der doppelten Grundfläche des viereckigen Prisma ist. Die Summe aller e innerhalb des Prisma k wird also kleiner sein als ein cylindrischer Körper, dessen Höhe ζ und dessen Grundfläche gleich ist dem ganzen innerhalb k liegenden Theil der Oberfläche $A +$ dem $2n$fachen Grundschnitt von k: um so mehr wird also der absolute Werth der Differenz zwischen allen a und allen b innerhalb des k kleiner sein, als der eben bezeichnete Körper. Dieses Resultat gilt für alle viereckigen Prismen k.

Summirt man also für alle k, so ergiebt sich, dafs $\pm(A-B)$ kleiner ist als ein cylindrischer Körper, dessen Höhe ζ und dessen Grundfläche der ganzen krummen Oberfläche O von A gleich ist, vermehrt um die $2n$fache Einfassungsfläche ihres Grundschnitts. Wir nennen nämlich *Einfassung* einer ebenen Curve diejenige Curve, welche der ursprünglichen zunächst liegt, aber ganz aufserhalb derselben, und dabei aus lauter ebenen Elementen $=\zeta$ zusammengesetzt ist; den von dieser Einfassung umschlossenen Theil der Ebene aber die *Einfassungsfläche*. Nun läfst sich ganz durch dieselbe Betrachtung, wie oben bei Körpern, zeigen, dafs die Differenz zwischen der Einfassungsfläche einer ebenen Curve und der Curve selbst, kleiner ist als ein Rechteck, dessen Höhe $=\zeta$ und dessen Grundlinie $=$ dem Umfange der Curve ist, vermehrt um das $2n$fache Stück eine Coordinaten-Axe, welches innerhalb der Einfassung liegt. Dieses letztere Stück ist wieder kleiner als das um $2n\zeta$ vermehrte Stück der Coordinaten-Axe, welches innerhalb der Curve selbst liegt. Bezeichnet man also durch O, P, q und λ respective die krumme Oberfläche von A, den Inhalt, den Umfang und die Axe des Grundschnitts von A, so erhält man

$$\pm(A-B) < \zeta O + 2n\zeta[P + q\zeta + 2n\zeta(\lambda + 2n\zeta)], \quad \text{d. h.}$$
$$\pm(A-B) < (O + 2nP).\zeta + (2nq + 4n^2\lambda).\zeta^2 + 8n^3.\zeta^3;$$

und zwar streng richtig für alle *endlichen* Werthe von ζ. Da nun O, P, q, λ, n ganz bestimmte und von ζ ganz unabhängige Werthe sind, so kann, für abnehmende Werthe von ζ, $\pm(A-B)$ jede Grenze der Kleinheit erreichen; folglich hat man ganz genau $B=A$ für ζ unendlich klein; was zu beweisen war. Man könnte dem Beweise mit Hülfe einer Figur mehr Entwicklung geben: indessen wird sich Jeder selbst durch Anschauung den Gegenstand klarer machen können, als es durch Worte möglich ist.

Sobald der Werth des Integrals A bestimmt ist, folgt aus dem *Dirichlet*schen Satze (Bd. 19. Seite 327 dieses Journals), dafs der Werth von (20.) endlich und ebenfalls $=A$ ist.

IV. Der allgemeine Fundamentalsatz, welcher jeder Transformation von Integralen zum Grunde liegt, ist folgender.

„Wenn in einem Integrale mit dem Elemente

$$\partial u\,.\,\partial v\;\partial w\;\ldots.$$

die Variabeln u, v, w, ... durch neue Variabeln x, y, z, ... ersetzt werden, von denen die alten Functionen sind, so mufs das eben geschriebene Element durch

$$\Delta.\partial x\;\partial y\;\partial z\;\ldots.$$

ersetzt werden, wo Δ die sogenannte *Functionaldeterminante*, nämlich der absolute Werth der Determinante des Systems partieller Differentialquotienten

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z}, & \ldots\ldots \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z}, & \ldots\ldots \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial z}, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Bmatrix}$$

ist." Sind die alten Variabeln in die neuen blofs durch lineare Systeme

$$\begin{aligned} u &= \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \ldots\ldots, \\ v &= \beta x + \beta' y + \beta'' z + \ldots\ldots, \\ w &= \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z + \ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ausgedrückt, so ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha'$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha''$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \beta$ u. s. w.; folglich ist für eine solche Substitution die Functionaldeterminante nichts anderes als die Determinante des linearen Systems, welches $u, v, w, \ldots\ldots$ in $x, y, z, \ldots\ldots$ ausdrückt, mithin eine Constante, mit der das ganze Integral zu multipliciren ist. Weit häufiger kommt indessen der Fall vor, dafs die neuen Variabeln als lineare Verbindungen der alten eingeführt werden. In diesem Falle müfste man also erst die Gleichungen nach den alten Variabeln auflösen und die Determinante des so erhaltenen umgekehrten Systems suchen. Aber da wir *a priori* wissen, dafs die Determinante eines umgekehrten Systems gleich ist dem reciproken Werthe der Determinante des ursprünglichen Systems, so läfst sich folgender allgemeine Satz aufstellen, in welchem wir, wie in dem vorigen voraussetzen, dafs die Integrale vollkommen bestimmt und von der Anordnung ihrer Elemente unabhängig sind.

„Will man in ein vielfaches Integral mit den Variabeln $u, v, w, \ldots\ldots$ statt dieser lineare Verbindungen derselben $x, y, z, \ldots\ldots$ substituiren, so ist, aufser der Einführung der neuen Variabeln selbst, nichts anders zu thun, als $\partial u\ \partial v\ \partial w \ldots\ldots$ durch $\partial x\ \partial y\ \partial z \ldots\ldots$ zu ersetzen und das neue Integral durch den absoluten Werth der Determinante desjenigen linearen Systems zu dividiren, welches die neuen Variabeln in die alten ausdrückt."

Es versteht sich von selbst, dafs hierbei alle Coëfficienten *reelle* Werthe haben müssen.

Um diesen Satz auf das vorliegende Integral (23.) anzuwenden, führen wir zunächst φ, ψ, χ an die Stelle von u, v, w ein. Da die Determinante desjenigen Systems, welches φ, ψ, χ in u, v, w ausdrückt, wie schon oft bemerkt, $=-9pa^2$ ist, so erhält man

$$A=\frac{1}{9pa^2}\int\!\!\int\!\!\int\partial\varphi\,\partial\psi\,\partial\chi,$$

während die Ungleichheitsbedingungen dieselben bleiben wie in (21.) und (22.). Da das Product $\varphi\psi\chi$ positiv ist, so lassen sich für φ, ψ, χ nur die folgenden vier Zeichencombinationen

$$+,+,+;\quad +,-,-;\quad -,+,-;\quad -,-,+$$

denken; und da für jede dieser vier Zeichencombinationen das Integral denselben Werth annimmt, so ist es erlaubt, dasselbe mit 4 zu multipliciren und φ, ψ, χ als positiv zu betrachten. Da ferner aus (21.)

$$0<\chi\leqq\frac{a^2}{\varphi\psi}$$

folgt, und da für χ gar keine andere Bedingung Statt findet, so können wir die Integration nach χ ausführen, von $\chi=0$ bis $\chi=\frac{a^2}{\varphi\psi}$, und erhalten so

$$A=\frac{4}{9p}\int\!\!\int\frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\varphi\psi},$$

unter der Bedingung

$$0\leqq(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A}+\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})\log\varphi+\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}.\log\psi<\sigma \text{ und}$$
$$0\leqq\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}.\log\varphi-\mathrm{Log}\,\mathfrak{A}.\log\psi<\sigma,$$

wo φ und ψ nur positive Werthe bekommen, und wo deshalb $\log\varphi$ und $\log\psi$ an die Stelle von $\mathrm{Log}\,\varphi$ und $\mathrm{Log}\,\psi$ geschrieben worden ist.

Nun werde $\log\varphi=y$, $\log\psi=z$ gesetzt, also $\varphi=e^y$, $\psi=e^z$. Für diese Substitution wird die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}=e^y.e^z=\varphi\psi,$$

also ergiebt sich

$$A=\frac{4}{9p}\int\!\!\int\partial y\,\partial z,$$
$$0\leqq(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A}+\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})y+\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}.z<\sigma,$$
$$0\leqq\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}.y-\mathrm{Log}\,\mathfrak{A}.z<\sigma.$$

Führt man endlich die zwischen 0 und σ in den eben geschriebenen Ungleichheiten stehenden linearen Ausdrücke von y und z als neue Variabeln u und v ein, und bemerkt, dafs die Determinante des dieser Substitution entsprechenden linearen Systems $=-\mathrm{Log}\,\mathfrak{A}.(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A}+\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})-(\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})^2=-\sigma$

ist, so ergiebt sich

$$A = \frac{4}{9p\sigma}\iint \partial u\, \partial v,$$

$$0 \leqq u < \sigma, \qquad 0 \leqq v < \sigma;$$

folglich, wenn man die jetzt von einander ganz unabhängigen Integrationen nach u und v ausführt,

$$A = \frac{4\sigma}{9p}.$$

Dies ist der Werth von A. Da derselbe von der Natur der speciellen Partialreihe, und auch von der der Totalreihe, welcher dieselbe ihre Entstehung verdankte, ganz unabhängig ist, so erhält man den Werth der Summe aller am Anfange von III. aufgestellten Functionen, wenn man A mit E^0 dividirt und mit der Anzahl der Partialreihen (17.) und mit H multiplicirt, also:

$$(24.) \qquad \frac{4H\sigma}{9p}\cdot\frac{\Pi\left(1-\frac{1}{f}\right)\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}\right)\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]^2\frac{1}{f}\right)}{\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]\frac{1}{3}\right)\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]^2\frac{1}{3}\right)}.$$

Da dieser Ausdruck in der That diejenige Beschaffenheit hat, die am Ende des vorigen Paragraphen vorausgesagt wurde, so bestehen die dortigen Schlüsse in voller Kraft, und folglich mufs in den Gleichungen (5.) und (12.) des vorigen Paragraphen statt der beiden Zeichen $\lesseqgtr$ blofs das Zeichen $=$ gesetzt werden. Der Ausdruck in (24.) ist also gleich dem Producte der Ausdrücke in (13.) und (14.). Der Ausdruck (14.) hebt sich gegen den entsprechenden Factor in (24.) auf, und nach den Gleichungen (9.) und (10.), welche auch für $s=1$ gelten, ist

$$\frac{\Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]\frac{1}{m}}{\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}\right)} = \Pi\frac{1}{1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}}\,\Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]\frac{1}{g}},$$

und eben so, wenn überall $[-]^2$ statt $[-]$ geschrieben wird. Alle f und g zusammengenommen erschöpfen aber die ganze Reihe der positiven Primzahlen ohne Ausnahme: also können nach demselben Princip, welches im vorigen Paragraphen angewandt wurde, die Ausdrücke rechts die einfachere Form

$$\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]^2\frac{1}{n}$$

annehmen, wo n alle positiven ganzen Zahlen ohne Ausnahme vorstellt.

Fafst man Alles dieses zusammen, so giebt (13.), (14.) und (24.):

$$(25.) \qquad H = \frac{9p}{4\sigma}\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]\frac{1}{3}\right)\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]^2\frac{1}{3}\right)\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]\frac{1}{n}\cdot\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]^2\frac{1}{n}.$$

Dies ist der Ausdruck der Anzahl der nicht aequivalenten associirten Formen durch das Product zweier Summen, die einander conjugirt sind und deren Product folglich als die *Norm* jeder von beiden dargestellt werden kann. Man bemerke, dafs $9\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]\frac{1}{3}\right)\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]^2\frac{1}{3}\right)=(3-1)(3-1)=4$, oder $=(3-\rho)(3-\rho^2)=13$ ist, je nachdem der Coëfficient von ρ in p_1 durch 3 theilbar ist, oder nicht. (Vergl. die Abhandlung: „Nachtrag zum cubischen Reciprocitätssatze" Seite 34 im 28ten Bande dieses Journals.)

Lehrsatz 8.

„Die Anzahl der Classen von associirten Formen ist durch die Gleichung

$$(26.)\quad H=\frac{\lambda p}{4\sigma}\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]\frac{1}{n}\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]^2\frac{1}{n}$$

gegeben, wo σ die Norm des Regulators einer Fundamental-Auflösung von $\Phi=1$ und n alle positiven ganzen Zahlen vorstellt, und wo $\lambda=4$ oder $\lambda=13$ ist, je nachdem der Coëfficient von ρ in p_1 durch 3 theilbar ist, oder nicht."

V. Ehe wir zu der Summation der beiden Reihen übergehen, durch welche die Anzahl der Classen ausgedrückt wird, müssen wir noch einmal den Blick auf die Gleichung (12.) des vorigen Paragraphen werfen, in welcher $=$ statt $\gtreqless$ zu setzen ist, und auf eine merkwürdige Folgerung aufmerksam machen, die sich aus jener Gleichung ziehen läfst. Wenn man in der zweiten und dritten der beiden Summen zur Linken dieser Gleichung an die Stelle von m resp. m' und m'' setzt und die Multiplication ausführt, so erhält man die Tripelreihe

$$\Sigma\frac{\rho^{\text{Ind.}\,m'+2\,\text{Ind.}\,m''}}{(mm'm'')^s}.$$

Setzt man

$$mm'm''=M,$$

so kommt in dieser Tripelreihe für einen bestimmten Werth von M das Glied $\frac{1}{M^s}$ gerade so oft vor, als es die Summe

$$\Sigma\rho^{\text{Ind.}\,m'+2\,\text{Ind.}\,m''}$$

anzeigt; wo sich die Summation über alle Werthe von m' und m'' erstreckt, die man erhält, wenn man die ganze Zahl M, welche zu E relative Primzahl ist, auf alle möglichen Arten in das Product dreier (positiven) Factoren $M=mm'm''$ zerlegt. Gerade so oft mufs also auch in der Totalität der Summen rechts in (12.), wenn man dieselben nach der Gröfse ihres Nenners ordnet, d. h. wenn

man in ihnen die Glieder nach der Gröfse des Nenners auf einander folgen läfst, das Glied $\frac{1}{M^s}$ erscheinen; und gerade so oft wird also auch die Zahl M durch die Totalität der Formen (1.) eigentlich oder uneigentlich darstellbar sein, wenn man die Variabeln dieser Formen den Ungleichheiten (4.) unterwirft. Dies giebt folgenden merkwürdigen Satz:

Lehrsatz 9.

„Jede positive ganze Zahl M, welche zu $E = \frac{2(pp_1 - pp_2)}{\varrho - \varrho^2}$ relative Primzahl ist, d. h. welche weder durch 2, noch durch p, noch durch irgend einen der Primfactoren des Coëfficienten von ϱ in p_1 theilbar ist, gestattet durch die den Ungleichheiten (4.) unterworfenen nicht aequivalenten associirten Formen immer genau so viele Darstellungen, als die Formel

$$(27.) \qquad \Sigma \varrho^{\text{Ind.}\, m' + 2\, \text{Ind.}\, m''}$$

anzeigt, wenn Ind. sich auf die Primzahl p bezieht und $mm'm''$ alle möglichen Zerfällungen von M in das Product dreier Factoren vorstellt.

Während also die analoge Anzahl bei den quadratischen Formen durch eine einfache Summe (durch den Überschufs u. s. w.) gegeben ist, erscheint sie hier als Doppelsumme.

Beispiel. Es sei M eine Primzahl; dann hat man blofs die drei Zerlegungen $1.1.M$, $1.M.1$, $M.1.1$, und da Ind. $1 = 0$ ist, so ergiebt sich nach (27.) blofs $\varrho^{2\,\text{Ind.}\,M} + \varrho^{\text{Ind.}\,M} + 1$; also entweder 3 oder 0, je nachdem Ind. M durch 3 theilbar ist, oder nicht. Wenn also M zu p nicht cubischer Rest ist, so giebt es gar keine Darstellungen; und ist M zu p cubischer Rest, so giebt es 3 Darstellungen, welche immer zu einer und derselben, oder zu correspondirenden Formen gehören und aus einander durch Permutation der Linearfactoren abgeleitet werden können. Es zeigt sich also, dafs alle Primzahlen nach den Formen, durch welche sie darstellbar sind, in Classen getheilt werden können.

Besonders merkwürdig ist der Fall, wenn nur eine Classe vorhanden ist, d. h. wenn $H = 1$ ist. In diesem speciellen Falle wird diese eine Classe immer durch die Form Φ repräsentirt, und der Satz 9. gilt von dieser Grundform Φ allein. Eben so gelten dann auch die am Anfange von §. 10. entwickelten Betrachtungen von der Form Φ allein, und es läfst sich auf diesen Umstand eine Theorie der complexen Zahlen von der Form

$$u + (v + w\varrho)\sqrt[3]{(pp_1)} + (v + w\varrho^2)\sqrt[3]{(pp_2)}$$

gründen, welche in diesem Falle in Beziehung auf Zerfällung in complexe Prim-

actoren u. s. w. ganz die Eigenschaften der gewöhnlichen Zahlen theilen; auch könnte man für diese neuen complexen Zahlen eine Theorie der quadratischen Formen aufstellen, indem man die Coëfficienten und Variabeln der Formen selbst von dieser complexen Form annimmt u. s. w.

Das Resultat des Lehrsatzes 9. läfst sich in analytischer Form durch die Identität der beiden folgenden Reihen aussprechen, in welchen $\varLambda$ eine ganz willkürliche Function bezeichnet:

$$(28.)\qquad \Sigma \varrho^{\text{Ind.}\,m'+2\,\text{Ind.}\,m''}\varLambda(mm'm'') = \Sigma\varLambda(F)+\Sigma\varLambda(F')+\text{ etc.}$$

Alle vorkommenden Summen sind Tripelreihen; m, m', m'' bedeuten, unabhängig von einander, alle ganzen positiven Zahlen, welche zu E relative Primzahlen sind, und die Summen rechts erstrecken sich über alle ganzen Werthe der Variabeln in den Formen F, F', ... $F^{(E-1)}$, welche den Ungleichheiten (4.) genügen und den Formen positive Werthe geben, und auf solche, die zu E relative Primzahlen sind. Setzt man z. B. $\varLambda(x)=q^x$, wo $q<1$ ist, so erhält man

$$(29.)\qquad \Sigma\varrho^{\text{Ind.}\,m'+2\,\text{Ind.}\,m''}q^{m\,m'm''} = \Sigma q^F+\Sigma q^{F'}+\text{ etc.}$$

Eine der drei Summationen links läfst sich mit Hülfe der *Kreisfunctionen* ausführen und eine *zweite* mit Hülfe der *elliptischen* Functionen, und man erhält dann links einfache Reihen, welche nach *elliptischen Functionen der Vielfachen eines Arguments* fortlaufen, so dafs man auf diesem Wege zu einer merkwürdigen Transformation einer transcendenten Function gelangt, die bisher von den Analysten noch nicht untersucht worden ist. Alles dies berühren wir jedoch hier nur im Vorbeigehen, weil diese Sätze nur ganz specielle Fälle viel allgemeinerer Wahrheiten sind, von welchen wir am passenden Orte mit aller Ausführlichkeit sprechen werden. Wir wollen blofs noch zeigen, dafs die Tripelreihe in (29.) convergirt und dafs sie von der Anordnung ihrer Glieder, also auch von der Ordnung, in welcher man die beiden Summationen ausführt, ganz unabhängig ist. In der That wird diese Reihe die eben erwähnte Eigenschaft in um so höherem Maafse besitzen, wenn die Reihe $\Sigma q^{m_1 m_2 m_3}$ sie besitzt, in welcher m_1, m_2, m_3 nicht mehr blofs die relativen Primzahlen zu E, sondern alle möglichen positiven ganzen Zahlen als Werthe erhalten. Es läfst sich aber allgemein zeigen, dafs jede Reihe von der Form

$$\Sigma q^{m_1 m_2 m_3 \ldots m_\mu} = S,\qquad q<1,$$

in welcher m_1, ... m_μ, unabhängig von einander, alle positiven ganzen Werthe erhalten, convergent und von der Anordnung ihrer Glieder unabhängig ist. Es sei M eine bestimmte positive ganze Zahl, so wird die Potenz q^M so oft

in der Reihe vorkommen, als diejenige Anzahl anzeigt, welche man erhält, wenn man auf alle mögliche Arten

$$M = m_1 m_2 \ldots . m_\mu$$

setzt, statt jedes dieser Producte $m_1 m_2 \ldots . m_\mu$ das folgende $1.1 \ldots . 1$ schreibt, und die Summe aller dieser Einheiten nimmt. Diese Anzahl wird aber gewifs kleiner sein als diejenige, welche man erhält, wenn man, statt in dem Producte $m_1 m_2 \ldots . m_\mu$ die Elemente blofs Factoren von M durchlaufen zu lassen, denselben vielmehr alle Werthe aus der Reihe 1, 2, 3, 4 bis M giebt; letztere Anzahl ist aber offenbar $= M^\mu$. Da nun die Reihe

$$\sum_{M=1}^{M=\infty} M^\mu q^M$$

immer convergirt, so wird die Reihe S dieselbe Eigenschaft in noch viel höherem Grade besitzen.

Wir bemerken noch, dafs, analog der Gleichung (28.), auch die folgende Statt findet:

$$(30.) \qquad \Pi\left(\varLambda(m m' m'')^{\rho^{\text{Ind.}\, m' + 2\,\text{Ind.}\, m''}}\right) = \Pi\varLambda(F).\Pi\varLambda(F') \ldots .;$$

wo aber ebenfalls, wie für die Summen in (28.), nöthig ist, dafs vermöge der Form der allgemeinen Function $\varLambda$ die unendlichen Producte von der Anordnung ihrer Factoren unabhängig sind.

Definitive Bestimmung der Anzahl der Classen.

§. 12.

Wir kommen zu der Summation der beiden Reihen, durch deren Product die Anzahl der Classen ausgedrückt wird. Da die zweite dieser beiden Reihen aus der ersten durch die Vertauschung von ρ mit ρ^2 hervorgeht, so braucht man nur die Summe der ersten zu suchen und wird daraus die der zweiten erhalten, wenn man in dem Resultate ρ mit ρ^2 vertauscht.

Die Summe $\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]\frac{1}{n}$ ist ganz gleichbedeutend mit $\Sigma\rho^{\text{Ind.}\, n}\frac{1}{n}$, wenn man nur festsetzt, dafs $\rho^{\text{Ind.}\, n}$ für den Fall $n \equiv 0 \pmod{p}$, wo diese Potenz eigentlich ohne Sinn ist, die *Null* vorstellen soll. Um die Summation auszuführen, mufs man sich der Formeln in §. 1. bedienen.

Nach dem ersten Paragraphen ist, wenn r eine imaginäre $p$te Wurzel der Einheit bezeichnet, $\sum_{k=1}^{k=p-1} \rho^{2\,\text{Ind.}\, k} r^{nk} = \rho^{\text{Ind.}\, n} . \sum_{k=1}^{k=p-1} \rho^{2\,\text{Ind.}\, k} r^k$, also

$$\rho^{\text{Ind.}\, n} = \frac{\Sigma\rho^{2\,\text{Ind.}\, k} r^{nk}}{\Sigma\rho^{2\,\text{Ind.}\, k} r^k}.$$

Diese Formel gilt, wie dort bewiesen wurde, für alle nicht durch p theilbaren Werthe von n: aber sie gilt auch, nach der getroffenen Übereinkunft, wie man sieht, für $n\equiv 0 \pmod{p}$. Dieser Werth von $\varrho^{\text{Ind.}\,n}$, in die Summe nach n gesetzt, giebt

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho^{\text{Ind.}\,n}\frac{1}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1}\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\frac{r^{nk}}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1}\varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\,r^k}.$$

Die Summation nach n läfst sich jetzt vermöge bekannter Formeln ausführen. Es ist nämlich, wenn Log den natürlichen Logarithmen des analytischen Moduls eines imaginären Ausdrucks bezeichnet, da r^k und $r^{-k}=r^{(p-k)}$ conjugirte Werthe sind,

$$\left.\begin{array}{l} r^k+\frac{r^{2k}}{2}+\frac{r^{3k}}{3}+\frac{r^{4k}}{4}+\dots \\ +r^{p-k}+\frac{r^{2(p-k)}}{2}+\frac{r^{3(p-k)}}{3}+\frac{r^{4(p-k)}}{4}+\dots \end{array}\right\} = -\text{Log}(1-r^k)-\text{Log}(1-r^{p-k});$$

also erhält man, da $\text{Ind.}(-1)=\frac{1}{2}(p-1)\equiv 0 \pmod{3}$, folglich $\varrho^{2\,\text{Ind.}(p-k)}=\varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}$ ist,

$$\sum_{k=1}^{k=p-1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\frac{r^{nk}}{n} = \sum_{k=1}^{k=p-1}[-\varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\,\text{Log}(1-r^k)],\ \text{mithin}$$

$$(31.)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\varrho^{\text{Ind.}\,n}\frac{1}{n} = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1}\varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\,\text{Log}(1-r^k)}{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1}\varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\,r^k}.$$

Eben so ergiebt sich also auch für die Summe der andern Reihe:

$$(32.)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\varrho^{2\,\text{Ind.}\,n}\frac{1}{n} = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1}\varrho^{\text{Ind.}\,k}\,\text{Log}(1-r^k)}{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1}\varrho^{\text{Ind.}\,k}\,r^k}$$

Das Product der beiden Nenner rechts in (31.) und (32.) ist nach §. 1. Formel (5.) $=p$, und die Zähler können folgendermafsen transformirt werden. Setzt man, wie in §. 2.,

$$\frac{x^p-1}{x-1}=\xi\eta\zeta,$$

wo ξ, η, ζ dieselbe Bedeutung haben sollen, wie in §. 2., und bezeichnet durch r^α, $r^{\alpha'}$, $r^{\alpha''}$, ...; r^β, $r^{\beta'}$, $r^{\beta''}$, ...; r^γ, $r^{\gamma'}$, $r^{\gamma''}$, ... resp. die in der ersten, zweiten, dritten Periode enthaltenen Wurzeln der Einheit, so dafs für alle α, $\text{Ind.}\,\alpha\equiv 0 \pmod{3}$, für alle β, $\text{Ind.}\,\beta\equiv 1 \pmod{3}$, für alle γ, $\text{Ind.}\,\gamma\equiv 2 \pmod{3}$ wird, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\xi &= (1-r^{\alpha})(1-r^{\alpha'})(1-r^{\alpha''})\ldots\\ \eta &= (1-r^{\beta})(1-r^{\beta'})(1-r^{\beta''})\ldots\\ \zeta &= (1-r^{\gamma})(1-r^{\gamma'})(1-r^{\gamma''})\ldots\end{aligned}\right\}\text{wenn in } \xi,\ \eta,\ \zeta \text{ der Werth } x=1 \text{ substituirt wird,}$$

folglich

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{\text{Ind.}k} \operatorname{Log}(1-r^k) = \operatorname{Log}\xi + \varrho \operatorname{Log}\eta + \varrho^2 \operatorname{Log}\zeta,$$

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{2\,\text{Ind.}k} \operatorname{Log}(1-r^k) = \operatorname{Log}\xi + \varrho^2 \operatorname{Log}\eta + \varrho \operatorname{Log}\zeta;$$

und zwar ξ, η, ζ für den speciellen Werth $x=1$ genommen. Substituirt man nun die Werthe aus (31.) und (32.) für die Reihen in (26.) und benutzt das eben Gesagte, so ergiebt sich

$$(33.)\qquad H = \frac{\lambda}{4\sigma}(\operatorname{Log}\xi + \varrho \operatorname{Log}\eta + \varrho^2 \operatorname{Log}\zeta)(\operatorname{Log}\xi + \varrho^2 \operatorname{Log}\eta + \varrho \operatorname{Log}\zeta);$$

wo $\lambda = 4$ oder $= 13$, je nachdem der Coëfficient von ϱ in p_1 durch 3 theilbar ist, oder nicht.

Es handelt sich jetzt darum, das eben gefundene Resultat in seiner definitiven Form aufzustellen.

Man bemerke zuerst, dafs diejenigen Ausdrücke, welche wir hier durch ξ, η, ζ bezeichnen, nichts anders sind, als was in §. 4. durch resp.

$$\tfrac{1}{3}(U_1 + Y_1 \sqrt[3]{(pp_1)} + Z_1 \sqrt[3]{(pp_2)}) = \xi,$$

$$\tfrac{1}{3}(U_1 + Y_1 \varrho \sqrt[3]{(pp_1)} + Z_1 \varrho^2 \sqrt[3]{(pp_2)}) = \eta,$$

$$\tfrac{1}{3}(U_1 + Y_1 \varrho^2 \sqrt[3]{(pp_1)} + Z_1 \varrho \sqrt[3]{(pp_2)}) = \zeta$$

bezeichnet wurde; dafs folglich die Formel (3.) im eben citirten Paragraphen, welche unendlich viele Auflösungen der Gleichung $\Phi = 27$ lieferte, auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$3.\left(\frac{\xi}{\sqrt[3]{p}}\right)^{3^n}.$$

In §. 4. III. zeigte sich nun, dafs aus zweien der in dieser Formel enthaltenen Lösungen von $\Phi = 27$ eine Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ abgeleitet werden kann. Es sei der Kürze wegen

$$\frac{\xi}{\sqrt[3]{p}} = \xi', \quad \frac{\eta}{\sqrt[3]{p}} = \eta', \quad \frac{\zeta}{\sqrt[3]{p}} = \zeta',$$

und es seien

$$3(\xi')^{3^m} \quad\text{und}\quad 3(\xi')^{3^n}$$

zwei solche Lösungen der Gleichung $\Phi = 27$, welche nach §. 4. III. durch ihren Quotienten den ersten Linearfactor einer Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ geben. Da also

$$(\xi')^{3^m - 3^n}$$

den ersten Linearfactor A für eine Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ giebt, so mufs der Regulator dieses Ausdrucks in der Form $(k+l\varrho)(\operatorname{Log}\mathfrak{A}-\varrho\operatorname{Log}\mathfrak{B})$ enthalten sein; wo k und l ganze Zahlen sind. Die dem A correspondirenden Linearfactoren sind nun

$$B = (\eta')^{3^m-3^n}, \qquad C = (\zeta')^{3^m-3^n},$$

also ist der Regulator

$$= (3^m-3^n)(\operatorname{Log}\xi'-\varrho\operatorname{Log}\eta'),$$

so dafs man

(34.) $(3^m-3^n)(\operatorname{Log}\xi'-\varrho\operatorname{Log}\eta') = (k+l\varrho)(\operatorname{Log}\mathfrak{A}-\varrho\operatorname{Log}\mathfrak{B})$ setzen kann.

Von der andern Seite ist

$$\operatorname{Log}\xi+\varrho\operatorname{Log}\eta+\varrho^2\operatorname{Log}\zeta = \operatorname{Log}\xi'+\varrho\operatorname{Log}\eta'+\varrho^2\operatorname{Log}\zeta' = \operatorname{Log}\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)-\varrho^2\operatorname{Log}\left(\frac{\eta'}{\zeta'}\right).$$

Aber da $\xi'\eta'\zeta' = 1$, so ist offenbar

$$\operatorname{Log}\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)-\varrho^2\operatorname{Log}\left(\frac{\eta'}{\zeta'}\right) = (1-\varrho^2)(\operatorname{Log}\xi'-\varrho^2\operatorname{Log}\eta'),$$

also ergiebt sich

$$\operatorname{Log}\xi+\varrho\operatorname{Log}\eta+\varrho^2\operatorname{Log}\zeta = (1-\varrho^2)(\operatorname{Log}\xi'-\varrho^2\operatorname{Log}\eta'), \text{ eben so}$$
$$\operatorname{Log}\xi+\varrho^2\operatorname{Log}\eta+\varrho\operatorname{Log}\zeta = (1-\varrho)(\operatorname{Log}\xi'-\varrho\operatorname{Log}\eta'),$$

und folglich aus (33.):

(35.) $4H\sigma = 3\lambda(\operatorname{Log}\xi'-\varrho^2\operatorname{Log}\eta')(\operatorname{Log}\xi'-\varrho\operatorname{Log}\eta') = 3\lambda N(\operatorname{Log}\xi'-\varrho\operatorname{Log}\eta')$;

also mit Hülfe von (34.)

$$H\sigma = \frac{3\lambda N(\operatorname{Log}\mathfrak{A}-\varrho\operatorname{Log}\mathfrak{B})N(k+l\varrho)}{4N(3^m-3^n)}, \qquad H = \frac{3\lambda N(k+l\varrho)}{4N(3^m-3^n)}, \text{ weil}$$
$$N(\operatorname{Log}\mathfrak{A}-\varrho\operatorname{Log}\mathfrak{B}) = \sigma \text{ ist.}$$

Da nun 3, λ und 4 selbst Normen ganzer complexer Zahlen sind, so ist die ganze Zahl H ein Quotient aus zwei Normen, mithin, nach bekannten Elementarsätzen der complexen Zahlen, selbst eine Norm, so dafs man

$$(36.) \qquad H = \mu^2-\mu\nu+\nu^2$$

setzen kann, wo μ und ν ganze Zahlen sind. Setzt man diesen Werth in (35.), so folgt

$$N(\mu+\nu\varrho)\sigma = \frac{3\lambda N(\operatorname{Log}\xi'-\varrho\operatorname{Log}\eta')}{4};$$

also zeigt sich, dafs der Ausdruck zur Rechten in der eben geschriebenen Gleichung, welcher durch die Kreistheilung vollkommen bestimmt ist, *die Norm eines Regulators für eine Lösung der Gleichung* $\Phi = 1$ darstellt. Diese Lösung nennen wir die *Kreistheilungslösung*. Die Anzahl der Classen wird also gefunden, wenn man die Norm des Regulators einer solchen Kreistheilungslösung durch σ dividirt.

Lehrsatz 10.

„Wenn man irgend eine Lösung der Gleichung

$$u^3+pp_1(v+w\varrho)^3+pp_2(v+w\varrho^2)^3-3pu(v+w\varrho)(v+w\varrho^2) = 1$$

bestimmt, für welche die Norm des Regulators

$$= \frac{3\lambda N\left\{\operatorname{Log}\left(\frac{\xi}{\sqrt[3]{p}}\right)-\varrho\operatorname{Log}\left(\frac{\eta}{\sqrt[3]{p}}\right)\right\}}{4}$$

wird (wo $\lambda = 4$ oder $= 13$ ist, je nachdem der Coëfficient von ϱ in p_1 durch 3 theilbar ist oder nicht, und wo ξ und η die Werthe bezeichnen, welche die beiden ersten der drei Linear-Factoren von

$$\frac{x^p-1}{x-1} \quad (\S.\ 2.)$$

für $x = 1$ annehmen), *und für diese den Regulator*

$$= (\mu+\nu\varrho)(\operatorname{Log}\mathfrak{A}-\varrho\operatorname{Log}\mathfrak{B})$$

setzt, so giebt $\mu^2-\mu\nu+\nu^2 = H$ *die Anzahl der Classen associirter Formen.*"

Oder kürzer:

*„Die Anzahl der Classen ist gleich dem Quotienten aus der Norm des Regulators einer **Kreistheilungslösung** und der Norm des Regulators einer **Fundamental-Auflösung** der Gleichung* $\Phi = 1$."

Dieses Resultat gehört, wenn wir nicht irren, zu den interessantesten und merkwürdigsten der höheren Arithmetik, und enthüllt wieder eine jener verborgenen Beziehungen, welche den zahlentheoretischen Untersuchungen ihren hohen Reiz verleihen. Das Merkwürdigste des Satzes besteht darin, dafs sich die Anzahl der Classen durch eine *quadratische Form* $\mu^2-\mu\nu+\nu^2$ ausgedrückt ergiebt; und dieser Umstand gewährt einen tiefen Blick in Untersuchungen ähnlicher, aber höherer Art.

Die in dieser Abhandlung betrachteten Formen verhalten sich zu einer allgemeineren Gattung etwa wie die quadratischen Formen, deren Determinante eine Primzahl ist, zu den übrigen, obwohl dieser Vergleich nicht ganz genau ist, da die cubischen Formen eine weit gröfsere Mannigfaltigkeit haben, als die quadratischen. In einer nächsten Abhandlung werden wir die zerlegbaren Formen des dritten Grades mit drei Variabeln in ihrer ganzen Allgemeinheit behandeln und auch besonders auf die merkwürdige Eintheilung derselben in Geschlechter (*genera*) (deren Anzahl immer eine Potenz von 3 ist) Rücksicht nehmen.

Schliefslich bemerke ich, dafs die Formel (26.) im vorigen Paragraphen nicht ohne Wichtigkeit für den von *Dirichlet* gegebenen Beweis des Satzes über die arithmetische Progression ist: denn da $H \geqq 1$, also von *Null* verschieden ist, so ist auch das Product der beiden Reihen rechts, folglich jede derselben, von *Null* verschieden. Allgemein haben wir durch eine analoge und bemerkenswerthe Betrachtung bewiesen, dafs das *Product der sämmtlichen* von *Dirichlet* in der Abhandlung über die arithmetische Progression betrachteten Reihen, also auch *jede* derselben, von *Null* verschieden ist.

Berlin, im September 1844.

Zusätze und Berichtigungen.

In §. 4. IV. lese man statt „und A gegen die Voraussetzung *irrational*" „und A gegen die Voraussetzung *rational*".

In §. 7. I. 13te Zeile, statt „die andern sind ungerade" lese man „die andere ist ungerade"

Zu §. 10. I. Dort wird in 1. behauptet, dafs die kleinste positive Zahl, welche durch eine associirte Form darstellbar ist, immer $< \frac{8}{9}p$ sei: statt dessen ist zu lesen, dafs diese kleinste Zahl immer $< 16p$ ist. In dem Beweise dieses Satzes lese man nach der Ungleichheit

$$N(a^3) < N(b+e\eta+f\vartheta)\,N(b+e\varrho\eta+f\varrho^2\vartheta)\,N(b+e\varrho^2\eta+f\varrho\vartheta)$$

statt des dort Stehenden, wie folgt. „Hieraus ergiebt sich

$$a^3 < \sqrt{N(b+e\eta+f\vartheta)}\,\sqrt{N(b+e\varrho\eta+f\varrho^2\vartheta)}\,\sqrt{N(b+e\varrho^2\eta+f\varrho\vartheta)},$$

also um so mehr noch, nach einem bekannten Satze und wegen $N(\eta) = N(\vartheta) = p$, $N(\varrho) = N(\varrho^2) = 1$, $N(e) = N(f)$:

$$a^3 < \{\sqrt{N(b)} + 2\sqrt{p}\sqrt{N(e)}\}^3,$$
$$a < \sqrt{N(b)} + 2\sqrt{p}\sqrt{N(e)}.$$

Aber $\sqrt{N(b)} < \frac{1}{2}a$ und $\sqrt{N(e)} < \sqrt{a}$, folglich

$$a < \tfrac{1}{2}a + 2\sqrt{p}\sqrt{a}, \quad \tfrac{1}{2}a < 2\sqrt{p}\sqrt{a}, \quad a < 4\sqrt{p}\sqrt{a}$$

mithin, wenn man durch $\sqrt{a}$ dividirt: $\sqrt{a} < 4\sqrt{p}$ und $a < 16p$." In I. 2. ist

nun auch überall $< 16p$ statt $< \frac{8}{3}p$ zu lesen. Wenn man jedoch dem Beweise eine andere Wendung giebt, so kann man die Grenze für a noch bedeutend reduciren. Dies ist jedoch für unsern Zweck von keinem grofsen Belang, da es nur darauf ankommt, eine Grenze für a zu haben, die von a selbst unabhängig ist und nur von p abhängt. — Um zu irgend einer gegebenen associirten Form eine aequivalente zu finden, deren erster Coëfficient unter einer solchen Grenze, z. B. unter $16p$ liegt, verfahre man wie folgt. Der erste Coëfficient der gegebenen Form heifse a. Man verwandele dieselbe in eine aequivalente mit dem ersten Coëfficienten a, in welcher die in den Linearfactoren vorkommenden ganzen Zahlen b, c, d den in §. 10. I. 1. aufgestellten Bedingungen genügen. Wenn in dieser neuen Form der Coëfficient von v^3, d. h. vom Cubus der zweiten Variabeln, absolut genommen, $\geqq a$ ist, so wird nothwendig $a < 16p$ sein. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn der Coëfficient von v^3, den wir durch a_1 bezeichnen, absolut genommen, $< a$ ist, so transformire man die zweite Form in eine dritte, deren erster Coëfficient a_1 ist und in welcher b, c, d den erwähnten Bedingungen in Bezug auf a_1 genügen. Diese Transformation ist offenbar möglich, da a_1 durch die zweite Form eigentlich darstellbar ist, wenn man den Variabeln die Werthe $u = 0$, $v = 1$, $w = 0$ giebt. Ist in der dritten Form der Coëfficient von v^3, $a_2 \geqq a_1$, so ist dieselbe die verlangte: ist hingegen wiederum $a_2 < a_1$, so transformire man die dritte Form in eine vierte, deren erster Coëfficient $= a_2$ ist und in welcher wiederum b, c, d den Bedingungen $N(b) \leqq \frac{1}{4}a_2^2$, $N(c + d\varrho) \leqq a_2$ genügen. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man endlich zu einer Form gelangt, in welcher $a_{\mu+1} \geqq a_\mu$ ist; was nothwendig geschehen mufs, da die Reihe der ganzen Zahlen

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots .$$

ihrem absoluten Werthe nach fortwährend abnehmen soll, die Null aber in derselben nicht vorkommen kann. Die letzte Form, deren erster Coëfficient $= a_\mu$ ist, wird allen verlangten Bedingungen genügen. Statt der Zahlen b, c, d kann man auf dieselbe Weise die Zahlen b', c', d' nehmen; man mufs dann den Coëfficienten von w^3 in den verschiedenen Formen demselben Verfahren unterwerfen, welches so eben auf den Coëfficienten von v^3 angewandt wurde. Am schnellsten gelangt man zum Ziele, wenn man abwechselnd bald den Coëfficienten von v^3, bald den von w^3, der angegebenen Reduction unterwirft. Ein in diesen Betrachtungen geübter Leser wird übrigens leicht wahrnehmen, dafs dieser letztere Theil des Problems der bekannten Reductionsmethode bei den

quadratischen Formen ganz analog ist, und dafs die Hauptschwierigkeit nur in der Angabe der Grenzen für die Zahlen b, c, d in Bezug auf den ersten Coëfficienten besteht.

Die *Construction eines vollständigen Systems nicht aequivalenter associirter Formen* geschieht auf folgende Weise. Man bilde alle Systeme von *nicht negativen ganzen* Werthen der Zahlen $a, b, c, d, b', c', d', t, t'$, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$0 < a < 16p,\quad tt' = a,\quad b < a,\quad c = t,\quad d < t',$$
$$b' < a,\quad c' = 0,\quad d' = t'.$$

Jedes dieser Systeme, deren Anzahl offenbar endlich ist, setze man in das Product der drei Linearfactoren (13.) in §. 5., und versuche, ob für dasselbe a^2 gröfster gemeinschaftlicher Theiler der Coëfficienten des entwickelten Productes (13.) wird. Alle Systeme, welche dieser letztern Bedingung genügen, geben eben so viele associirte Formen; und jede andere associirte Form wird einer von diesen aequivalent sein. Nachdem man die so gefundenen Formen in einer beliebigen Ordnung hingestellt hat, vergleiche man die erste (nach §. 9.) mit allen folgenden, um diejenigen zu streichen, welche ihr aequivalent sind; hierauf vergleiche man wiederum unter denjenigen Formen, welche diese erste Operation übrig gelassen hat, die zweite mit allen folgenden und streiche die ihr aequivalenten, u. s. w. Man braucht übrigens nur diejenigen Werthe von a zuzulassen, deren Primfactoren 3, oder p, oder cubische Reste zu p sind; auch wird man sicher sein, keine Formen auszulassen, wenn man nur diejenigen Werthe von a betrachtet, welche unter der Grenze $4p$ liegen.

Wenn F irgend eine associirte Form vorstellt, deren erster Coëfficient $= a$ ist, so läfst sich $a^2 F$ auf die Form $u^3 + pp_1 y^3 + pp_2 z^3 - 3puyz$ bringen: also hat man $a^2 F \equiv u^3$ (mod. p_1), folglich $\left[\frac{a^2 F}{p_1}\right] = 1$, $\left[\frac{F}{p_1}\right] = \left[\frac{a}{p_1}\right]$: d. h. alle durch die Form F darstellbaren Zahlen haben zu p_1 *denselben cubischen Character* (es wird vorausgesetzt, dafs a und der Werth von F zu p relative Primzahlen sind). Da eine ganze Classe von Formen dieselben Zahlen darstellt, wie jede in ihr enthaltene Form, so entspricht jeder Classe *ein ganz bestimmter cubischer Character* in Bezug auf die complexe Primzahl p_1. Man könnte hierauf eine Eintheilung sämmtlicher Classen associirter Formen in *drei Genera* gründen. Es ist nun leicht, mit Hülfe des cubischen Reciprocitätsge-

setzes und des in §. 7. bewiesenen Satzes, dafs für jeden complexen Primtheiler δ einer durch eine associirte Form darstellbaren Zahl $\left[\frac{pp_1}{\delta}\right] = 1$ ist, zu zeigen, dafs *nur eines dieser 3 Genera wirklich existirt.* Aber man kann dieses letztere Resultat auch ohne Hülfe des Reciprocitätsgesetzes ableiten; und zwar auf einem Wege, demjenigen ähnlich, welchen *Gaufs* in dem, an den tiefsten Gedanken so reichhaltigen, leider noch so wenig gekannten zweiten Theile der 5ten Section seiner *Disq. arithm.* eingeschlagen hat *). Hieraus ergiebt sich dann endlich auf umgekehrtem Wege ein neuer Beweis des cubischen Reciprocitätsgesetzes.

---

*) Nämlich durch Betrachtung der correspondirenden Formen der Classen (§. 5. III.)

3.

Note sur deux formules données par M. M. Eisenstein et Hesse.

(Par Mr. *A. Cayley* à Cambridge.)

Mr. *Eisenstein* a donné cette formule assez remarquable:

$$(a^2d^2-3b^2c^2+4ac^3+4db^3-6abcd)^3$$
$$=A^2D^2-3B^2C^2+4AC^3+4DB^3-6ABCD,$$

où A, B, C, D sont des fonctions données de a, b, c, d. Cela peut se généraliser comme suit.

Soit

$$u = a^2h^2+b^2g^2+c^2f^2+d^2e^2-2ahbg-2ahcf-2ahde$$
$$-2bgcf-2bgde-2cfde+4adfg+4bceh,$$

et de plus

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{da},\quad B=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{db},\quad C=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{dc},\quad \ldots\ldots\quad H=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{dh}.$$

Représentons par U la même fonction de $A, B, C, \ldots\ldots H$, que la fonction u l'est des quantités $a, b, c, \ldots\ldots h$, l'on a l'équation

$$U=u^3.$$

C'est un cas particulier d'une propriété générale de la fonction u, que l'on peut énoncer ainsi. Imaginons la fonction

$$ax_1y_1z_1+bx_1y_1z_2+cx_1y_2z_1+dx_1y_2z_1$$
$$+ex_2y_1z_1+fx_2y_1z_2+gx_2y_2z_1+hx_2y_2z_1$$

transformée en

$$a'x_1'y_1'z_1'+b'x_1'y_1'z_2'+\ldots\ldots+h'x_2'y_2'z_2'$$

par les substitutions

$$x_1=\lambda_1x_1'+\lambda_2x_2',\quad y_1=\mu_1y_1'+\mu_2y_2',\quad z_1=\nu_1z_1'+\nu_2z_2',$$
$$x_2=\lambda_1'x_1'+\lambda_2'x_2',\quad y_2=\mu_1'y_1'+\mu_2'y_2',\quad z_2=\nu_1'z_1'+\nu_2'z_2';$$

et soit u', la fonction analogue à u, des nouveaux coefficients $a', b', c', \ldots\ldots h'$:

$$u' = (\lambda_1\lambda_2'-\lambda_2\lambda_1')^2(\mu_1\mu_2'-\mu_2\mu_1')^2(\nu_1\nu_2'-\nu_2\nu_1')^2.u.$$

En échangeant seulement les z, ceci donne

$$u' = (\nu_1\nu_2'-\nu_2\nu_1')^2.u,$$

ou

$$a' = \nu_1 a + \nu'_1 e,\quad b' = \nu_1 b + \nu'_1 f,\quad c' = \nu_1 c + \nu'_1 g,\quad d' = \nu_1 d + \nu'_1 h,$$
$$e' = \nu_2 a + \nu'_2 e,\quad f' = \nu_2 b + \nu'_2 f,\quad g' = \nu_2 c + \nu'_2 g,\quad h' = \nu_2 d + \nu'_2 h.$$

Soit

$$\begin{aligned}\nu_1 &= ah - bg - cf - de,\\ \nu'_1 &= -2(ad - bc),\\ \nu_2 &= -2(eh - fg),\\ \nu'_2 &= ah - bg - cf - de \quad (= \nu_1),\end{aligned}$$

on trouve d'abord

$$(\nu_1\nu'_2 - \nu_2\nu'_1) = u^2 \quad \text{ou} \quad u' = u^3,$$

et puis. en ayant égard aux valeurs de A, B, C, ... H:

$$a' = H,\quad b' = -G,\quad c' = -F,\quad d' = E,$$
$$e' = D,\quad f' = -B,\quad g' = -C,\quad h' = A,$$

de manière que $u' = U$, d'où enfin

$$U = u^3.$$

La propriété de la fonction u que je viens d'énoncer, se rapporte à une théorie assez générale, d'une nouvelle espèce de fonctions algébriques dont je m'occupe actuellement, et lesquelles à cause de leur analogie avec les déterminantes, on pourrait comme je crois nommer „Hyperdéterminantes." Je me propose de poser les premiers fondemens de cette théorie dans un mémoire qui va paraître dans le prochain No. du „Cambridge Mathematical Journal" (No. XXIII.).

A présent je passe à une formule de Mr. *Hesse*, qui se rapporte aussi à la même théorie. Soit V, une fonction homogène du troisième ordre, et à trois variables x, y, z. Soit ∇U, la déterminante formée avec les coefficients du second ordre de V, arrangés en cette forme:

$$\begin{matrix}\frac{d^2V}{dx^2}, & \frac{d^2V}{dx\,dy}, & \frac{d^2V}{dx\,dz},\\ \frac{d^2V}{dy\,dx}, & \frac{d^2V}{dy^2}, & \frac{d^2V}{dy\,dz},\\ \frac{d^2V}{dz\,dx}, & \frac{d^2V}{dz\,dy}, & \frac{d^2V}{dz^2};\end{matrix}$$

soit a une quantité constante quelconque et soient A et B deux autres constantes déterminés: Mr. *Hesse* à démontré l'équation remarquable

$$\nabla(U + a\nabla U) = AU + B\nabla U;$$

mais sans donner la forme des coefficients A et B, ce qui parait être très difficile à effectuer. En considérant le cas d'une fonction homogène de deux

variables seulement, mais d'ailleurs d'un ordre quelconque, on parvient à un théorème analogue qui m'a paru intéressant.

„Soit U une fonction homogène et de l'ordre ν des deux variables x, y, et ∇U la déterminante $\frac{d^2 V}{dx^2}\cdot\frac{d^2 V}{dy^2}-\left(\frac{d^2 V}{dx\,dy}\right)^2$, l'on a

$$(\nu-2)(\nu-3)^3.\nabla(U+a\nabla U)=$$
$$\{-\nu.(\nu-1)(\nu-3)^2.Ja+\nu.(\nu-1)(2\nu-5)^2Ia^2\}\,U$$
$$+\{(\nu-2)(\nu-3)^3+(\nu-2)(\nu-3)(2\nu-5)Ja^2\}\nabla U.$$

En représentant par i, j, k, l, m les coefficients différentiels du quatrième ordre de U, on a

$$I=ikm-il^2-mj^2-k^3+2jkl,$$
$$J=4jl-3k^2-mi,$$

de manière que I, J sont des fonctions de x, y des ordres $3(\nu-4)$ et $2(\nu-4)$ respectivement."

Ce qu'il y a de remarquable, c'est la forme de ces deux quantités I, J. On voit d'abord que la fonction I est la déterminante formée avec les termes

$$\begin{matrix} i, & j, & k \\ j, & k, & l \\ k, & l, & m. \end{matrix}$$

Mais de plus les deux fonctions I, J ont la propriété suivante. Si l'on imagine une fonction du quatrième ordre

$$l\xi^4+4j\xi^3\eta+6k\xi^2\eta^2+4l\xi\eta^3+m\eta^4,$$

transformée en

$$l'\xi'^4+4j'\xi'^3\eta'+6k'\xi'^2\eta'^2+4l'\xi'\eta'^3+m'\eta'^4,$$

au moyen de

$$\xi=\lambda\xi'+\mu\eta',$$
$$\eta=\lambda'\xi'+\mu'\eta',$$

en représentant par I', J', les mêmes fonctions de i', j', k', l', m', on a

$$J'=(\lambda\mu'-\lambda'\mu)^4.J,\qquad I'=(\lambda\mu'-\lambda'\mu)^6.I.$$

L'on parviendrait, je crois, à des résultats plus simples en considérant une fonction U, homogène en x, y, et aussi en x_1, y_1, et en posant

$$\nabla U=\frac{d^2 V}{dx\,dx_1}\cdot\frac{d^2 V}{dy\,dy_1}-\frac{d^2 V}{dx\,dy_1}\cdot\frac{d^2 V}{dy\,dx_1}$$

Par exemple, si U est du second ordre en x, y et aussi en x_1, y_1, de manière que

$$\begin{aligned} U= &\ x_1^2.(Ax^2+2Bxy+Cy^2) \\ &+2x_1y_1(A'x^2+2B'xy+C'y^2) \\ &+y_1^2.(A''x^2+2B''xy+C''y^2), \end{aligned}$$

On a simplement

$$\nabla\nabla U = \mathfrak{A}\, U,$$

en représentant par $\mathfrak{A}$ la déterminante formée avec les coefficients

$$\begin{array}{ccc} A, & B, & C; \\ A', & B', & C'; \\ A'', & B'', & C''; \end{array}$$

et multipliée par 2^3. Mais il faudrait développer tout cela beaucoup plus loin.

P. S. Je ne sais pas si l'on a jamais discuté la question suivante, qui doit conduire, il me semble, à des résultats importants. Soient L, M, L', M', U, V des fonctions de x. En éliminant cette variable entre les équations $LU+MV=0$ et $L'U+M'V=0$, et en représentant l'équation ainsi obtenue par $[LU+MV, L'U+M'V]=0$, et de même par $[U, V]=0$ l'équation obtenue en éliminant x entre $U=0$, $V=0$, il est clair que $[LU+MU, L'U+M'V]$ contiendra $[U, V]$ comme facteur: quelles sont maintenant les propriétés de l'autre facteur qu'on peut écrire sous les trois formes: $[LU+MV, L'U+M'V]:[U, V]$, $[LU+MV, LM'-L'M]:[L, M]$ et $[L'U+M'V, LM'-L'M]:[L', M']$)?

4.

Encyklopädische und elementare Darstellung der Theorie der Zahlen.

(Vom Herausgeber dieses Journals.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 2. im 1ten, No. 10. im 2ten, No. 26. im 3ten Hefte 27ten und No. 13. im 2ten Hefte 28ten Bandes.)

---

§. 74.

Lehrsatz.

Wenn die x *in der Gleichung*

$$1.\quad a_1\overset{1}{x}+a_2\overset{2}{x}+a_3\overset{3}{x}+\ldots\ldots+a_n\overset{n}{x}=z$$

der Reihe nach $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ *verschiedene Werthe haben können, während die* a *immer dieselben Werthe behalten, so kann die Anzahl der verschiedenen Werthe, welche* z *bekommen kann,*

$$2.\quad = m_1 m_2 m_3 \ldots\ldots m_n$$

sein; nicht gröfser, wohl aber kleiner.

Beweis *A*. Zu jedem der m_1 verschiedenen Werthe, welche $\overset{1}{x}$ soll haben können, gehört ein, und *nur ein* Werth von z, wenn die übrigen x, eben wie die a, *dieselben* Werthe behalten. Also bekommt z, wenn zunächst nur $\overset{1}{x}$ *allein* seinen Werth ändert, m_1 Werthe; und nicht mehrere. Und zwar sind alle diese m_1 Werthe von z *nothwendig* von einander verschieden. Denn gesetzt, zwei verschiedene Werthe $\overset{1}{x}_1$ und $\overset{1}{x}_2$ von $\overset{1}{x}$ gäben, mit *gleichen* Werthen der übrigen x, so wie der a, *gleiche* Werthe z_1 von z, so müfste

$$3.\quad \begin{cases} a_1\overset{1}{x}_1+a_2\overset{2}{x}+a_3\overset{3}{x}+\ldots\ldots+a_n\overset{n}{x}=z_1 \text{ und zugleich} \\ a_1\overset{1}{x}_2+a_2\overset{2}{x}+a_3\overset{3}{x}+\ldots\ldots+a_n\overset{n}{x}=z_1, \end{cases}$$

also, Eins von dem Andern abgezogen,

$$4.\quad a_1(\overset{1}{x}_1-\overset{1}{x}_2)=0$$

sein; was nicht sein kann, insofern $\overset{1}{x}_1$ und $\overset{1}{x}_2$ nicht einander *gleich* sein sollen.

B. Bezeichnet man nun die z, welche für die verschiedenen m_1 Werthe von $\overset{1}{x}$ entstehen, während die übrigen x, so wie die a, *dieselben* Werthe behalten, durch $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{m_1}$ und läfst darauf $\overset{2}{x}$ für den ersten Werth von $\overset{1}{x}$ seine m_2 verschiedenen Werthe annehmen, so bekommt das dem ersten Werth von $\overset{1}{x}$ entsprechende z_1 gemäfs (*A.*) seinerseits m_2, *nothwendig* verschiedene Werthe. Läfst man $\overset{2}{x}$ für den zweiten Werth von $\overset{1}{x}$ seine m_2 verschiedenen Werthe annehmen, so bekommt das dem zweiten Werth von $\overset{1}{x}$ entsprechende z_2 ebenfalls m_2, *nothwendig* unter sich verschiedene Werthe. So bekommen für *jeden* der m_1 verschiedenen Werthe von $\overset{1}{x}$ die demselben entsprechenden $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{m_1}$ *jedes* m_2 unter sich verschiedene Werthe; also ergeben sich überhaupt m_1 *mal* m_2 oder $m_1 m_2$ Werthe von z, die alle *gruppenweise* unter sich verschieden sind; und *nicht mehrere*, da zu *jedem* Werth von $\overset{1}{x}$ oder $\overset{2}{x}$ *nur ein* Werth von z gehört.

C. Aber diese $m_1 m_2$ Werthe von z, aus den verschiedenen Gruppen, sind schon nicht mehr nothwendig *alle* von einander verschieden. Denn gesetzt, die beiden bestimmten Werthe $\overset{1}{x}_1$ und $\overset{2}{x}_1$ von $\overset{1}{x}$ und $\overset{2}{x}$ gäben den Werth $\overset{1}{z}$ von z und die beiden andern Werthe $\overset{1}{x}_2$ und $\overset{2}{x}_2$ von $\overset{1}{x}$ und $\overset{2}{x}$ gäben den Werth $\overset{2}{z}$ von z, beides während die übrigen x, so wie die a, *denselben* Werth behalten, so dafs also

$$5.\quad a_1\overset{1}{x}_1 + a_2\overset{2}{x}_1 + a_3\overset{3}{x} + a_4\overset{4}{x} + \ldots + a_n\overset{n}{x} = z_1 \text{ und}$$

$$6.\quad a_1\overset{1}{x}_2 + a_2\overset{2}{x}_2 + a_3\overset{3}{x} + a_4\overset{4}{x} + \ldots + a_n\overset{n}{x} = z_2$$

wäre, woraus, wenn man Eins vom Andern abzieht,

$$7.\quad a_1(\overset{1}{x}_1 - \overset{1}{x}_2) + a_2(\overset{2}{x}_1 - \overset{2}{x}_2) = z_1 - z_2$$

folgt, so kann allerdings in (7.) z_1 *gleich* z_2 sein; denn dies giebt vermöge (7.)

$$8.\quad a_1(\overset{1}{x}_1 - \overset{1}{x}_2) + a_2(\overset{2}{x}_1 - \overset{2}{x}_2) = 0 \quad \text{oder} \quad a_1(\overset{1}{x}_1 - \overset{1}{x}_2) = a_2(\overset{2}{x}_2 - \overset{2}{x}_1);$$

und diese Gleichung *kann* Statt finden, sobald nur die Differenzen $\overset{1}{x}_1 - \overset{1}{x}_2$ der ungleichen $\overset{1}{x}$ mit a_2 und die Differenz $\overset{2}{x}_2 - \overset{2}{x}_1$ der ungleichen $\overset{2}{x}$ mit a_1 aufgeht.

Also kann, wenn in (1.) $\overset{1}{x}$ seine m_1 und $\overset{2}{x}$ seine m_2 verschiedenen Werthe annimmt, während die übrigen x, gleich den a, dieselben Werthe

behalten, z zwar nicht ***nicht mehr*** als $m_1 m_2$ verschiedene Werthe bekommen, wohl aber ***weniger.***

D. Bezeichnet man wieder die $m_1 m_2$ verschiedenen Werthe, welche nach (*C.*) z in (1.) dadurch bekommen kann, dafs $\overset{1}{x}$ und $\overset{2}{x}$ ihre m_1 und m_2 verschiedenen Werthe annehmen, durch $z_1, z_2, z_3, \dots z_{m_1 m_2}$ und läfst $\overset{3}{x}$ seine m_3 verschiedenen Werthe für ***jeden*** der Werthe von $\overset{1}{x}$ und $\overset{2}{x}$ annehmen, während die noch übrigen x, gleich den a, ***dieselben*** Werthe behalten, so bekommen wieder die entsprechenden $z_1, z_2, z_3, \dots$ ***jedes*** m_3 ***unter sich*** verschiedene Werthe, und folglich ***kann,*** da $m_1 m_2$ solcher z vorhanden sind, z in (1.) überhaupt $m_1 m_2$ ***mal*** m_3 oder $m_1 m_2 m_3$ verschiedene Werthe bekommen; und ***nicht mehr,*** da immer zu jedem Werth eines x ***nur ein*** Werth von z gehört.

E. Aber nothwendig sind diese $m_1 m_2 m_3$ von z ***nicht*** alle verschieden. Denn gesetzt die bestimmten Werthe $\overset{1}{x}_1$, $\overset{2}{x}_1$ und $\overset{3}{x}_1$ von $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$ und $\overset{3}{x}$ gäben den Werth z_1 von z und die andern bestimmten Werthe $\overset{1}{x}_2$, $\overset{2}{x}_2$ und $\overset{3}{x}_2$ von $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$ und $\overset{3}{x}$ gäben den Werth z_2 von z, während die übrigen x, gleich den a, ***dieselben*** Werthe behalten, so dafs also

$$9. \quad a_1\overset{1}{x}_1 + a_2\overset{2}{x}_1 + a_3\overset{3}{x}_1 + a_4\overset{4}{x} \dots + a_n\overset{n}{x} = z_1 \quad \text{und}$$

$$10. \quad a_1\overset{1}{x}_2 + a_2\overset{2}{x}_2 + a_3\overset{3}{x}_2 + a_4\overset{4}{x} \dots + a_n\overset{n}{x} = z_2,$$

und folglich, Eins vom Andern abgezogen,

$$11. \quad a_1(\overset{1}{x}_1 - \overset{1}{x}_2) + a_2(\overset{2}{x}_1 - \overset{2}{x}_2) + a_3(\overset{3}{x}_1 - \overset{3}{x}_2) = z_1 - z_2$$

wäre, so kann allerdings in (11.) z_1 ***gleich*** z_2, oder

$$12. \quad a_1(\overset{1}{x}_1 - \overset{1}{x}_2) + a_2(\overset{2}{x}_1 - \overset{2}{x}_2) = a_3(\overset{3}{x}_2 - \overset{3}{x}_1)$$

sein: denn die x, obgleich unter sich verschieden, dürfen nur von der Art sein, dafs $a_1(\overset{1}{x}_1 - \overset{1}{x}_2) + a_2(\overset{2}{x}_1 - \overset{2}{x}_2)$ mit a_3 aufgeht, so kann die Gleichung schon bestehen.

Also kann wieder, wenn in (1.) $\overset{1}{x}$ seine m_1, $\overset{2}{x}$ seine m_2 und $\overset{3}{x}$ seine m_3 verschiedenen Werthe annimmt, während die übrigen x, gleich den a, dieselben Werthe behalten, z zwar ***nicht mehr*** als $m_1 m_2 m_3$ verschiedene Werthe bekommen, wohl aber weniger.

F. Fährt man auf diese Weise weiter fort, nemlich für jeden der durch die Veränderung der Werthe der ersten x entstehenden Werthe von z die

folgenden x der Reihe nach ihre verschiedenen Werthe annehmen zu lassen, so folgt was der Lehrsatz behauptet.

§. 75.

Lehrsatz.

Es sei von der ganzen Zahl

$$1.\quad E = e_1 e_2 e_3 \ldots . e_n$$

jeder der Theiler e *zu jedem der übrigen theilerfremd. Ferner sei*

$$2.\quad \frac{E}{e_1} = E_1,\quad \frac{E}{e_2} = E_2,\quad \frac{E}{e_3} = E_3,\quad \ldots . \quad \frac{E}{e_n} = E_n.$$

Setzt man dann in der Gleichung

$$3.\quad E_1 x_1 + E_2 x_2 + E_3 x_3 + \ldots . + E_n x_n = \mathfrak{G} E + r,$$

in welcher $E_1, E_2, E_3, \ldots . E_n$ *nach Belieben positiv oder negativ genommen werden können, der Reihe nach*

$$4.\quad \begin{cases} x_1 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots .\ e_1, \\ x_2 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots .\ e_2, \\ x_3 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots .\ e_3, \\ \ldots \ldots \ldots \\ x_n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots .\ e_n, \end{cases}$$

und nimmt das willkürliche $\mathfrak{G}$ *in* (3.) *so, dafs* $r > 0$ *und nicht gröfser als* E *ist, so durchläuft:*

I. *In* (3.)

$$5.\quad r \text{ alle die Zahlen } 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots .\ E;$$

und keiner dieser Werthe von r *kommt mehr als einmal vor.*

II. *Dieselben Zahlen, welche in* x_1 *und* e_1, *oder in* x_2 *und* e_2, *oder in* x_3 *und* e_3 *u. s. w. bis zu* x_n *und* e_n, *zugleich aufgehen, gehen auch in das zugehörige* r *auf.*

III. *Alle* r, *welche zu Werthen von* $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ *gehören, die der Reihe nach zu* $e_1, e_2, e_3, \ldots . e_n$, *nemlich* x_1 *zu* e_1, x_2 *zu* e_2, x_3 *zu* e_3 *u. s. w. theilerfremd sind, und zwar dies alles zugleich, sind auch zu* E *theilerfremd; und nur diese* r *sind es.*

Beispiel. Es sei

$$6.\quad E = 84 = 3.4.7,\quad \text{also}\quad e_1 = 3,\quad e_2 = 4,\quad e_3 = 7,\quad \text{und}$$

$$7.\quad E_1 = 28,\quad E_2 = 21\quad \text{und}\quad E_3 = 12.$$

Zu I. Für (3.) setze man

$$8.\quad 28x_1 - 21x_2 + 12x_3 = \mathfrak{G}.84 + r.$$

Macht nun hierin nach (4.) $x_1 = 1, 2, 3,$ $x_2 = 1, 2, 3, 4$ und

$x_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, und nimmt immer $\mathfrak{G}$ so, dafs $r > 0$ und $< E+1$ ist, so ergiebt sich

9. Für $x_1 = 1$ und $x_3 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$:

$$r = \begin{cases} 19\ 31\ 43\ 55\ 67\ 79\ \ 7 & \text{Für } x_2 = 1, \\ 82\ 10\ 22\ 34\ 46\ 58\ 70 & \text{-}\ \ x_2 = 2, \\ 61\ 73\ \ 1\ 13\ 25\ 37\ 49 & \text{-}\ \ x_2 = 3, \\ 40\ 52\ 64\ 76\ \ 4\ 16\ 28 & \text{-}\ \ x_2 = 4. \end{cases}$$

10. Für $x_1 = 2$ und $x_3 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$:

$$r = \begin{cases} 47\ 59\ 71\ 83\ 11\ 23\ 35 & \text{Für } x_2 = 1, \\ 26\ 38\ 50\ 62\ 74\ \ 2\ 14 & \text{-}\ \ x_2 = 2, \\ \ 5\ 17\ 29\ 41\ 53\ 65\ 77 & \text{-}\ \ x_2 = 3, \\ 68\ 80\ \ 8\ 20\ 32\ 44\ 56 & \text{-}\ \ x_2 = 4. \end{cases}$$

11. Für $x_1 = 3$ und $x_3 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$:

$$r = \begin{cases} 75\ \ 3\ 15\ 27\ 39\ 51\ 63 & \text{Für } x_2 = 1, \\ 54\ 66\ 78\ \ 6\ 18\ 30\ 42 & \text{-}\ \ x_2 = 2, \\ 33\ 45\ 57\ 69\ 81\ \ 9\ 21 & \text{-}\ \ x_2 = 3, \\ 12\ 24\ 36\ 48\ 60\ 72\ 84 & \text{-}\ \ x_2 = 4. \end{cases}$$

Die Werthe von r in (9. 10. 11.) zusammengenommen sind alle die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... 84, und keine kommt mehr als einmal vor; gemäfs (I.).

Zu II. Die Zahl 2 geht in $x_2 = 2$ und $e_2 = 4$ auf, und alle r, die in (9. 10. 11.) zu $x_2 = 2$ gehören, gehen ebenfalls mit 2 auf; gemäfs (II.).

Zu III. $x_1 = 2$ ist zu $e_1 = 3$, $x_2 = 3$ zu $e_2 = 4$ und $x_3 = 5$ zu $e_3 = 7$ theilerfremd; das zu $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 5$ gehörige r ist nach (10.) $= 53$, welches zu $E = 84$ theilerfremd ist; gemäfs (III.).

Beweis *A*. Da dem x_1 in (8.) gemäfs (4.) e_1, dem x_2, e_2, dem x_3, e_3 u. s. w. verschiedene Werthe gegeben werden sollen, so *kann* $E_1 x_1 + E_2 x_2 + E_3 x_3 + \ldots + E_n x_n$ nach (§. 74.) $e_1 e_2 e_3 \ldots e_n = E$ verschiedene Werthe bekommen, und *nicht mehrere;* also auch r *kann* eben so viele verschiedene Werthe bekommen, die alle > 0 und nicht gröfser als E sind. Es fragt sich nun, ob von den Werthen, welche r *wirklich* bekommt, diese oder jene für *verschiedene* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ einander *gleich* sein können. Ist dies *nicht* der Fall, so durchläuft r nothwendig *alle* die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... E.

B. Man setze, für die beiden Werthe $\overset{1}{x}_1$ und $\overset{2}{x}_1$ von x_1, $\overset{1}{x}_2$ und $\overset{2}{x}_2$ von x_2, $\overset{1}{x}_3$ und $\overset{2}{x}_3$ von x_3 u. s. w. hätte r *denselben* Werth, so wäre in (8.)

$$12. \quad E_1\overset{1}{x}_1+E_2\overset{1}{x}_2+E_3\overset{1}{x}_3+\ldots+E_n\overset{1}{x}_n = \mathfrak{G}E+r,$$

und *zugleich*

$$13. \quad E_1\overset{2}{x}_1+E_2\overset{2}{x}_2+E_3\overset{2}{x}_3+\ldots+E_n\overset{2}{x}_n = \mathfrak{G}E+r.$$

Eins von dem Andern abgezogen, giebt

$$14. \quad E_1(\overset{1}{x}_1-\overset{2}{x}_1)+E_2(\overset{1}{x}_2-\overset{2}{x}_2)+E_3(\overset{1}{x}_3-\overset{2}{x}_3)+\ldots+E_n(\overset{1}{x}_n-\overset{2}{x}_n)=\mathfrak{G}E.$$

C. In dieser Gleichung haben z. B. E_2, E_3, E_4, ... E_n, wie aus (2.) zu sehen, sämmtlich den Theiler e_1; denn sie haben der Reihe nach *nur* die Theiler e_2, e_3, e_4, ... e_n *weniger* als E, *nicht* den Theiler e_1 *weniger*. Sodann enthält auch E selbst rechts in (14.) den Theiler e_1. Also gehen *alle* Glieder in (14.) rechts und links, *bis auf das erste* links, mit e_1 auf: Deshalb mufs nach (§. 18.) auch dieses erste Glied $E_1(\overset{1}{x}_1-\overset{2}{x}_1)$ mit e_1 *aufgehen*. Aber E_1 enthält gemäfs (2.) den Factor e_1 *nicht*, und auch keinen Theiler von e_1, weil die sämmtlichen Theiler e_2, e_3, e_4, ... e_n, die E_1 hat, nach der Voraussetzung zu e_1 *theilerfremd* sind. Also mufs e_1 in $\overset{1}{x}_1-\overset{2}{x}_1$ *allein* aufgehen. Dies aber ist nicht möglich, da $\overset{1}{x}_1$ und $\overset{2}{x}_1$ nach (4.) beide >0 und nicht gröfser als e_1 sind. Also geht e_1 *nicht* in $E_1(\overset{1}{x}_1-\overset{2}{x}_1)$ auf, sondern $E_1(\overset{1}{x}_1-\overset{2}{x}_1)$, dividirt durch e_1, ist ein *Bruch*, und keine *ganze* Zahl. Und da nun ein Bruch einer ganzen Zahl nicht gleich sein kann, wie es, um die Gleichung (14.) zu erfüllen, sein müfste, so kann diese Gleichung *nicht* Statt finden. Folglich kann *kein* r für die verschiedenen x_1, x_2, x_3, ... x_n *denselben* Werth haben. Mithin sind *alle r verschieden*, und folglich sind sie nach (*A.*) alle die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... E (5.); gemäfs (I.).

D. Geht die Zahl z z. B. in x_1 und e_1 *zugleich* auf, so geht sie auch in E_2, E_3, E_4, ... E_n, so wie in E auf; denn alle diese E enthalten, wie in (*C.*) erinnert, den Theiler e_1. Desgleichen geht z nach der Voraussetzung in x_1 auf. Also geht z in *alle* Glieder der Gleichung (3.), bis zu r, auf. Mithin mufs es nach (§. 18.) auch in r aufgehen. Ganz eben so verhält es sich mit Zahlen z, die in x_2 und e_2, oder in x_3 und e_3 u. s. w. zugleich aufgehen; gemäfs (II.).

E. Man setze, eine Zahl z gehe in E und r *zugleich* auf, während x_1 zu e_1, x_2 zu e_2, x_3 zu e_3 u. s. w. *theilerfremd* ist. Da z in E aufgehen soll, so mufs es irgend einen seiner *Stammfactoren*, z. B. $p>1$, mit E, und folglich auch mit einem der *Theiler* e_1, e_2, e_3, ... e_n von E gemein haben;

aber ***nur mit einem*** dieser Theiler, z. B. mit e_1; denn da jeder der Theiler e von E zu allen übrigen der Voraussetzung nach ***theilerfremd*** sein soll, so hat jedes e ***andere*** Stammfactoren (§. 27.). Es mufs also p in r und e_1 ***zugleich*** aufgehen.

F. Nun enthalten in ***allen*** Gliedern links in (3.), bis auf das ***erste*** $E_1 x_1$, die E_2, E_3, E_4, ... E_n den Theiler e_1 (*C.*): also mufs p auch in alle diese Glieder aufgehen. So ginge denn also p in ***alle*** Glieder von (3.) rechts und links bis zu dem ***ersten*** $E_1 x_1$ auf, und deshalb müfste es nach (§. 18.) auch in $E_1 x_1$ aufgehen. Aber E_1 enthält den Theiler e_1 ***nicht***, sondern nur die Theiler e_2, e_3, e_4, ... e_n: also kann p in E_1 ***nicht*** aufgehen. Mithin müfste es in x_1 aufgehen, also hätte x_1 mit e_1 den Theiler $p > 1$ gemein. Dies ist der Voraussetzung in (*E.*) entgegen, und folglich können E und r nicht mit der Zahl z ***zugleich*** aufgehen, wenn x_1 zu e_1 ***theilerfremd*** ist.

G. Aber es reicht nicht hin, dafs x_1 zu e_1 theilerfremd sei, wenn E und r es sein sollen. Denn es könnte x, statt mit e_1, mit e_2, e_3, e_4, ... einen Theiler > 1 gemein haben. Damit alles Dieses nicht sein könne, und also wirklich r zu E völlig theilerfremd sei, mufs, aus denselben Gründen wie vorhin, ***zugleich*** auch x_2 zu e_2, x_3 zu e_3 u. s. w. theilerfremd sein. Erst dann, wenn ***alles*** dieses Statt findet, ist r zu E völlig theilerfremd; gemäfs (III.).

H. Jedes r, für welches nicht x_1 zu e_1, x_2 zu e_2, x_3 zu e_3, ... x_n zu e_n zugleich theilerfremd ist, ist ***nicht*** zu E theilerfremd. Denn, wenn auch nur allein z. B. x_1 und e_1 ***nicht*** zu einander theilerfremd wären, sondern den Stammtheiler $p > 1$ gemein hätten, so würde dieser in ***alle*** Glieder rechts und links bis auf r aufgehen und müfste daher nach (§. 18.) auch in r aufgehen, so dafs also dann E und r nicht mehr theilerfremd wären, sondern den Theiler $p > 1$ gemein hätten.

Anm. *I.* Es ändert sich an den Resultaten nichts, wenn man den x statt der Werthe (4.) folgende Werthe beilegt:

$$15. \quad \begin{cases} x_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ e_1 - 1, \\ x_2 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ e_2 - 1, \\ x_3 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ e_3 - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ e_n - 1. \end{cases}$$

Der Werth 0 vertritt alsdann unter den Werthen von x (15.) die Stelle der

Werthe $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n$ in (4.); denn z. B. $x_1 = e_1$ giebt in (3.) $E_1 x_1 = E_1 e_1 = E$ (2.), also in (3.)

$$16.\quad E_2 x_2 + E_3 x_3 + E_4 x_4 + \ldots + E_n x_n = \mathfrak{G}E + r;$$

und eben das giebt in (3.) der Werth 0 von x.

§. 76.

Lehrsatz.

Es seien

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{a}_1, & \mathrm{a}_2, & \mathrm{a}_3, & \ldots & \mathrm{a}_{\mathrm{m}_1}, \\ \mathrm{b}_1, & \mathrm{b}_2, & \mathrm{b}_3, & \ldots & \mathrm{b}_{\mathrm{m}_2}, \\ \mathrm{c}_1, & \mathrm{c}_2, & \mathrm{c}_3, & \ldots & \mathrm{c}_{\mathrm{m}_3}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{n}_1, & \mathrm{n}_2, & \mathrm{n}_3, & \ldots & \mathrm{n}_{\mathrm{m}_n} \end{cases}$$

n *Reihen, die erste von* m_1, *die zweite von* m_2, *die dritte von* m_3 *u. s. w. Gröfsen, welche alle, entweder ihren Werthen nach, oder durch sonst etwas, von einander verschieden sind.*

Stellt man diese Gröfsen in Gruppen, jede von n *Gröfsen, zusammen, etwa nebeneinander, und ohne weitere Rücksicht in welcher Ordnung, aber auf die Weise, dafs jede Gruppe aus jeder* **Reihe** *in* (1.) ***nur eine*** *Gröfse enthält, so ist die* ***Anzahl*** x_n *der auf solche Weise möglichen* ***verschiedenen*** *Gruppen oder Verbindungen*

$$2.\quad \mathrm{x}_n = \mathrm{m}_1 . \mathrm{m}_2 . \mathrm{m}_3 \ldots \mathrm{m}_n .$$

Beispiel. Es seien die $n = 3$ Reihen

$$3.\quad \begin{cases} a_1, a_2, a_3 & \text{von } m_1 = 3 \text{ Gröfsen,} \\ b_1, b_2 & \text{von } m_2 = 2 \text{ - -} \\ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 & \text{von } m_3 = 5 \text{ - -} \end{cases}$$

gegeben, so sind die möglichen Gruppen von $n = 3$ Gröfsen folgende:

$$4.\quad \begin{cases} a_1b_1c_1, & a_1b_1c_2, & a_1b_1c_3, & a_1b_1c_4, & a_1b_1c_5, \\ a_1b_2c_1, & a_1b_2c_2, & a_1b_2c_3, & a_1b_2c_4, & a_1b_2c_5, \\ a_2b_1c_1, & a_2b_1c_2, & a_2b_1c_3, & a_2b_1c_4, & a_2b_1c_5, \\ a_2b_2c_1, & a_2b_2c_2, & a_2b_2c_3, & a_2b_2c_4, & a_2b_2c_5, \\ a_3b_1c_1, & a_3b_1c_2, & a_3b_1c_3, & a_3b_1c_4, & a_3b_1c_5, \\ a_3b_2c_1, & a_3b_2c_2, & a_3b_2c_3, & a_3b_2c_4, & a_3b_2c_5. \end{cases}$$

Die Anzahl dieser Gruppen ist $30 = 3.2.5 = m_1 m_2 m_3$; gemäfs (2.).

Beweis. *A.* Die noch unbekannte Anzahl der möglichen *verschiedenen* Gruppen von $n-1$ Gröfsen aus den $n-1$ *ersten* Reihen (1.), also aus *allen* Reihen mit Ausnahme der *letzten*, wird ähnlich von (2.), durch x_{n-1} bezeichnet.

B. *Jede* dieser x_{n-1} Gruppen, noch mit der *ersten* Gröfse n_1 der *letzten* Reihe verbunden, giebt eine Gruppe von n Gröfsen; und die daraus entstehenden x_{n-1} Gruppen von n Gröfsen sind nothwendig alle unter einander *verschieden;* denn die x_{n-1} Gruppen von $n-1$ Gröfsen, aus welchen sie entstanden, sind es nach der *Voraussetzung.*

C. Die x_{n-1} Gruppen von $n-1$ Gröfsen, mit der *zweiten* Gröfse n_2 der *letzten* Reihe verbunden, geben auf gleiche Weise x_{n-1} sämmtlich *unter sich verschiedene* Gruppen von n Gröfsen. Zugleich sind aber diese x_{n-1} Gruppen von n Gröfsen auch alle von denen in (*B.*) verschieden: denn jene enthalten alle n_1, die gegenwärtigen alle n_2.

D. Auf diese Weise geben die x_{n-1} Gruppen von $n-1$ Gröfsen, welche aus den $n-1$ ersten Reihen aufgestellt werden können, mit *jeder* der m_n Gröfsen der *letzten* Reihe verbunden, *jede* x_{n-1}, also zusammen $m_n . x_{n-1}$ Gruppen von n Gröfsen, die *alle* von einander verschieden sind; denn die erste Reihe derselben enthält aus der letzten Reihe in (1.) nur n_1, die zweite nur n_2, die dritte nur n_3 u. s. w. Die so gefundenen $m_n . x_{n-1}$ Gruppen sind aber offenbar *alle möglichen* Gruppen von n Gröfsen.

E. Da nun die Anzahl dieser letzten durch x_n bezeichnet wurde, so ist

$$5. \quad x_n = m_n . x_{n-1}.$$

Hieraus folgt, $n-1$ statt n gesetzt,

$$6. \quad x_{n-1} = m_{n-1} . x_{n-2},$$

und Dieses in (5.) substituirt, giebt

$$7. \quad x_n = m_n . m_{n-1} . x_{n-2}.$$

Ferner folgt aus (6.), $n-1$ statt n gesetzt,

$$8. \quad x_{n-2} = m_{n-2} . x_{n-3},$$

und Dies in (7.) substituirt, giebt

$$9. \quad x_n = m_n . m_{n-1} . m_{n-2} . x_{n-3}.$$

Und so weiter; zuletzt

$$x_n = m_n . m_{n-1} . m_{n-2} . m_{n-3} \ldots . m_1 \text{ oder}$$

$$10. \quad x_n = m_1 . m_2 . m_3 . m_4 \ldots . m_n;$$

wie in (2.).

§. 77.

Lehrsatz.

Es sei von der ganzen Zahl

$$1. \quad \mathrm{E} = \mathrm{e}_1 \mathrm{e}_2 . \mathrm{e}_3 \ldots . \mathrm{e}_n$$

jeder der Theiler e *zu jedem der übrigen theilerfremd.*

Es sei ferner

2. z *eine der Zahlen* $1, 2, 3, 4, \ldots . E$

und man setze, für ***einen und denselben*** *Werth von* z:

$$3. \quad \begin{cases} z = m_1 e_1 + r_1, & \textit{wo } r_1 \textit{ eine der Zahlen } 0, 1, 2, 3, \ldots . e_1 - 1, \\ z = m_2 e_2 + r_2, & \textit{wo } r_2 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 0, 1, 2, 3, \ldots . e_2 - 1, \\ z = m_3 e_3 + r_3, & \textit{wo } r_3 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 0, 1, 2, 3, \ldots . e_3 - 1, \\ \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ z = m_n e_n + r_n, & \textit{wo } r_n \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 0, 1, 2, 3, \ldots . e_n - 1 \end{cases}$$

ist. Alsdann können

I. *Für zwei verschiedene Werthe von* z *niemals* ***alle*** r ***dieselben*** *Werthe haben. Zu jedem* ***andern*** *Werth von* z *gehört eine* ***andere*** *Gruppe der* n *Reste* r; *und umgekehrt.*

II. *Zu den* E *verschiedenen Werthen* (2.), *welche* z *soll bekommen können, gehören* ***alle verschiedene*** *Gruppen der Werthe der* n *Reste* r *in* (3.), *welche* ***möglich*** *sind.*

III. *Nur diejenigen* z *sind zu* E ***theilerfremd***, *für welche* ***zugleich*** r_1 *zu* e_1, r_2 *zu* e_2, r_3 zu e_3, ... r_n *zu* e_n ***theilerfremd*** *ist.*

Beispiel. Es sei

4. $E = 60, \quad e_1 = 4, \quad e_2 = 15.$

Alsdann giebt (3.)

5.

Für z =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
r_1 =	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
r_2 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0
Für z =	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
r_1 =	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
r_2 =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0.

Zu I. Zu keinen *zwei* Werthen von z in (5.) gehört *dasselbe* r_1 und *zugleich dasselbe* r_2; gemäfs (I.).

Zu II. Alle *möglichen* verschiedenen Gruppen aus den 4 Werthen 0, 1, 2, 3 von r_1 und 0, 1, 2, 3, ... 14 von r_2 (3.) sind folgende:

6.

0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	0 10	0 11	0 12	0 13	0 14
1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 11	1 12	1 13	1 14
2 0	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	2 10	2 11	2 12	2 13	2 14
3 0	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6	3 7	3 8	3 9	3 10	3 11	3 12	3 13	3 14

Alle diese Gruppen von r kommen in (5.) vor. Sie gehören der Reihe nach zu

$$7. \quad \left\{ z = \begin{cases} 60 \; 16 \; 32 \; 48 \;\; 4 \; 20 \; 36 \; 52 \;\; 8 \; 24 \; 40 \; 56 \; 12 \; 28 \; 44 \\ 45 \;\; 1 \; 17 \; 33 \; 49 \;\; 5 \; 21 \; 37 \; 53 \;\; 9 \; 25 \; 41 \; 57 \; 13 \; 29 \\ 30 \; 46 \;\; 2 \; 18 \; 34 \; 50 \;\; 6 \; 22 \; 38 \; 54 \; 10 \; 26 \; 42 \; 58 \; 14 \\ 15 \; 31 \; 47 \;\; 3 \; 19 \; 35 \; 51 \;\; 7 \; 23 \; 39 \; 55 \; 11 \; 27 \; 43 \; 59, \end{cases} \right.$$

also zu *allen* den Zahlen 1, 2, 3, ... 60; gemäfs (II.).

Zu III. Z. B. $z = 19$ ist zu $E = 60$ theilerfremd, und das zugehörige $r_1 = 3$ ist es zu $e_1 = 4$ und $r_2 = 4$ zu $e_2 = 15$. $z = 49$ ist zu $E = 60$ theilerfremd, und das zugehörige $r_1 = 1$ ist es zu $e_1 = 4$ und $r_2 = 4$ zu $e_2 = 15$. Dagegen $z = 35$ ist zu $E = 60$ nicht theilerfremd, und nur das zugehörige $r_1 = 3$ ist zu $e_1 = 4$ theilerfremd, nicht das zugehörige $r_2 = 5$ zu $e_2 = 15$; gemäfs (III.).

Beweis. *A.* Könnten für zwei *verschiedene* Werthe z_1 und z_2 von z (3.) *alle* die Reste r dieselben sein, so müfste gemäfs (3.)

$$8. \quad z_1 = \overset{1}{m}_1 e_1 + r_1 = \overset{1}{m}_2 e_2 + r_2 = \overset{1}{m}_3 e_3 + r_3 = \ldots = \overset{1}{m}_n e_n + r_n \text{ und } \textit{zugleich}$$

$$9. \quad z_2 = \overset{2}{m}_1 e_1 + r_1 = \overset{2}{m}_2 e_2 + r_2 = \overset{2}{m}_3 e_3 + r_3 = \ldots = \overset{2}{m}_n e_n + r_n$$

sein. Daraus folgt, Eins von dem Andern abgezogen,

$$10. \quad z_1 - z_2 = (\overset{1}{m}_1 - \overset{2}{m}_1) e_1 = (\overset{1}{m}_2 - \overset{2}{m}_2) e_2 = (\overset{1}{m}_3 - \overset{2}{m}_3) e_3 = \ldots = (\overset{1}{m}_n - \overset{2}{m}_n) e_n,$$

also müfste zufolge (10.) $z_1 - z_2$ durch e_1 und *zugleich* auch durch e_2, e_3, e_4, ... e_n, also, da die e sämmtlich zu einander theilerfremd sein sollen, gemäfs (§. 26.) auch durch das *Product* $e_1 e_2 e_3 \ldots e_n$, also durch E (1.) selbst theilbar sein. Dies aber ist nicht möglich, da z_1 und z_2 beide nicht gröfser sein sollen als E (2.) und folglich $z_1 - z_2$ nothwendig $< E$ ist. Also können nicht *alle* r zugleich für zwei verschiedene Werthe von z *dieselben* Werthe haben; gemäfs (I.).

B. Die Reste r in (3.) können der Reihe nach e_1, e_2, e_3, ... e_n verschiedene Werthe haben, nämlich r_1 die e_1 Werthe 0, 1, 2, 3, ... $e_1 - 1$, r_2 die e_2 Werthe 0, 1, 2, 3, ... $e_2 - 1$ u. s. w. Demnach sind zufolge (§. 76.) $e_1 e_2 e_3 \ldots e_n = E$ *verschiedene Gruppen*, jede mit *einem* Werthe *jeder* der n Reste r_1, r_2, r_3, ... r_n *möglich*. Nun gehört zu *jedem* der E verschiedenen Werthe 1, 2, 3, ... E (2.), welche z soll haben können, nach (I.) eine *andere* Gruppe der n Reste r, also müssen die E möglichen Gruppen der Reste *alle* Statt finden, zu den verschiedenen Werthen von z gehörend; gemäfs (II.).

C. Haben z. B. r_1 und e_1 keinen Theiler > 1 gemein, so müssen auch vermöge $z = m_1 e_1 + r_1$ (3.) z und e_1 theilerfremd sein: denn ginge z. B. $\delta > 1$

in z und e_1 zugleich auf, so müfste es auch in r_1 aufgehen, und e_1 und r_1 wären also dann *nicht* theilerfremd. Eben so müssen, wenn r_2 und e_2 theilerfremd sind, auch z und e_2 es sein; wenn r_3 und e_3 theilerfremd sind, auch z und e_3 u. s. w. Also, wenn *zugleich* r_1 zu e_1, r_2 zu e_2, r_3 zu e_3, ... r_n zu e_n theilerfremd ist, so ist es auch z zu e_1, e_2, e_3, ... e_n und folglich auch zu E (1.). Hat dagegen auch nur einer der Reste, z. B. r_1, mit e_1 einen Theiler $\delta > 1$ gemein, so mufs δ vermöge der ersten Gleichung (3.) auch in z aufgehen, und es ist also alsdann z *nicht* zu e_1 und folglich auch nicht zu E (1.) theilerfremd; gemäfs (III.).

§. 78.

Lehrsatz.

Es sei von der ganzen Zahl

$$1.\quad \mathrm{E} = \mathrm{e}_1 \mathrm{e}_2 \mathrm{e}_3 \ldots\ldots \mathrm{e}_n$$

jeder der Theiler e *zu jedem der übrigen theilerfremd.*

Es seien ferner

$$2.\begin{cases} 1.\ \overset{1}{\mathrm{d}}_1,\ \overset{2}{\mathrm{d}}_1,\ \overset{3}{\mathrm{d}}_1,\ \ldots\ldots > 1 \textit{ Theiler von } \mathrm{e}_1, \textit{ die zu einander theilerfremd sind;} \\ 2.\ \overset{1}{\mathrm{d}}_2,\ \overset{2}{\mathrm{d}}_2,\ \overset{3}{\mathrm{d}}_2,\ \ldots\ldots > 1 \textit{ Theiler von } \mathrm{e}_2, \textit{ eben so;} \\ 3.\ \overset{1}{\mathrm{d}}_3,\ \overset{2}{\mathrm{d}}_3,\ \overset{3}{\mathrm{d}}_3,\ \ldots\ldots > 1 \textit{ Theiler von } \mathrm{e}_3, \textit{ eben so;} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n.\ \overset{n}{\mathrm{d}}_n,\ \overset{n}{\mathrm{d}}_n,\ \overset{n}{\mathrm{d}}_n,\ \ldots\ldots > 1 \textit{ Theiler von } \mathrm{e}_n, \textit{ eben so;} \end{cases}$$

wo also nun die d_1, *die* d_2, *die* d_3, ... *sämmtlich andere Zahlen sind, da die* e *untereinander keinen Theiler gemein haben sollen, während die sämmtlichen* d *in* E *aufgehen.*

Bezeichnet man dann aus den Zahlenreihen

$$3.\begin{cases} 1.\ \mathrm{x}_1 = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \mathrm{e}_1, \\ 2.\ \mathrm{x}_2 = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \mathrm{e}_2, \\ 3.\ \mathrm{x}_3 = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \mathrm{e}_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n.\ \mathrm{x}_n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \mathrm{e}_n \end{cases}$$

die Anzahl

$$4.\begin{cases} \textit{Derjenigen in (3. 1.), die mit keinem der } \mathrm{d}_1 \textit{ aufgehen, durch } \psi\mathrm{e}_1, \\ \textit{Derjenigen in (3. 2.), die mit keinem der } \mathrm{d}_2 \textit{ aufgehen, durch } \psi\mathrm{e}_2, \\ \textit{Derjenigen in (3. 3.), die mit keinem der } \mathrm{d}_3 \textit{ aufgehen, durch } \psi\mathrm{e}_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \textit{Derjenigen in (3. n.), die mit keinem der } \mathrm{d}_n \textit{ aufgehen, durch } \psi\mathrm{e}_n, \end{cases}$$

und endlich, eben so, aus der Zahlenreihe

$$5.\quad z = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots E$$

die ***Anzahl***

6. *Derjenigen, die mit keinem der* ***sämmtlichen*** d (2.) *aufgehen, durch* ψE: *so ist*

I. *Die* d *in* (2.) *mögen Stammzahlen, und* ***alle*** *Theiler von* e_1, e_2, e_3, ... e_n *sein, oder nicht,*

$$7.\quad \psi e_1 . \psi e_2 . \psi e_3 \ldots\ldots \psi e_n = \psi E.$$

II. *Schreibt man, in dem Falle, wo die* d *in* (2.) *die* ***sämmtlichen*** *Stammtheiler* >1 *der* e *und mithin von* E *sind, also für den Fall, wo* ψe_1, ψe_2, ψe_3, ... ψe_n *und* ψE *die Anzahl der zu den* e *und zu* E ***theilerfremden*** *Zahlen* $<$e *und* $<$E *bezeichnen, zum Unterschiede* φ *statt* ψ, *so ist eben so:*

$$8.\quad \varphi e_1 . \varphi e_2 . \varphi e_3 \ldots\ldots \varphi e_n = \varphi E.$$

Beispiel zu I. Es sei

$$9.\quad e_1 = 28,\quad e_2 = 15,\quad \text{also}\quad E = 28.15 = 420.$$

Man nehme von dem Theiler von e_1 nur den einen $\overset{1}{d}_1 = 4$, und von den Theilern von e_2 nur den einen $\overset{1}{d}_2 = 5$.

Von den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... e_1 gehen die 7 Zahlen 4, 8, 12, 16, 20, 24 und 28 mit $\overset{1}{d}_1 = 4$ auf, also bleiben $\psi e_1 = 28 - 7 = 21$ Zahlen, die *nicht* mit $\overset{1}{d}_1$ aufgehen. Von den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... e_2 gehen die 3 Zahlen 5, 10 und 15 mit $\overset{1}{d}_2 = 5$ auf, also bleiben $\psi e_2 = 15 - 3 = 12$ Zahlen, die *nicht* mit $\overset{1}{d}_2$ aufgehen.

Es soll also nun nach dem Lehrsatze (I.)

$$10.\quad \psi e_1 . \psi e_2 = 21.12 = 252$$

die Anzahl ψE der Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ... 420 sein, die weder mit $\overset{1}{d}_1 = 4$, noch mit $\overset{1}{d}_2 = 5$ aufgehen.

Zunächst gehen die $\frac{420}{4} = 105$ Zahlen 4, 8, 12, 16, ... 420 mit 4 und dann die $\frac{420}{5} = 84$ Zahlen 5, 10, 15, 20, ... 420 mit 5 auf. Aber die $\frac{420}{4.5} = 21$ Zahlen 20, 40, 80, ... 420 unter den letzteren sind schon unter denen gezählt, die mit 4 aufgehen, also sind von den 420 Zahlen 1, 2, 3, 4, ... 420 nur $105 + 84 - 21 = 168$ Zahlen als diejenigen auszuschliefsen,

die mit 4 oder mit 5 aufgehen. Es ergiebt sich daher für die Anzahl der Zahlen aus denen 1, 2, 3, 4, ... 420, die weder mit 4 noch mit 5 aufgehen, nur $420-168=252=\psi E$; wie es nach (10.) und nach (I. 7.) sein soll.

Zu II. Zu $e_1=28$ *theilerfremd* sind die $\varphi e_1=12$ Zahlen 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25 und 27. Zu $e_2=15$ sind es die $\varphi e_2=8$ Zahlen 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 und 14. Zu $E=420$ sind es zunächst folgende 48 Zahlen: 1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 98, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 121, 127, 131, 137, 139, 143, 149, 151, 157, 163, 167, 169, 173, 179, 181, 187, 191, 193, 197, 199, 209, und dann die 48 andern, welche sich ergeben, wenn man die hingeschriebenen 48 Zahlen von 420 abzieht (§. 65. I.). Also ist $\varphi E = 96=8.12=\varphi e_1.\varphi e_2$; wie es nach (II. 8.) sein soll.

Erster Beweis. *A.* Man setze, wie in (§. 75.):

$$11.\quad \frac{E}{e_1}=E_1,\quad \frac{E}{e_2}=E_2,\quad \frac{E}{e_3}=E_3,\quad \dots\dots \quad \frac{E}{e_n}=E_n$$

und dann die Gleichung

$$12.\quad E_1x_1+E_2x_2+E_3x_3+\dots\dots+E_nx_n = \mathfrak{S}E+r,$$

wo die x aus den Zahlen (3.) genommen sind und das willkürliche $\mathfrak{S}$ so angenommen wird, dafs r nicht gröfser sei als E.

In dieser Gleichung gehört nach (§. 75.) zu jedem andern x ein anderes r, und wenn die x alle die Zahlen (3.) durchlaufen, so durchlaufen die r *alle* die Zahlen (5.).

B. Gesetzt nun ein x_1 (3. 1.) gehe *nicht* mit dem Theiler $\overset{1}{d}_1$ von e_1 (2.) auf, so kann auch das zugehörige r nicht mit $\overset{1}{d}_1$ aufgehen, und umgekehrt. Denn $E_2, E_3, E_4, \dots\dots E_n$ und E enthalten sämmtlich e_1 als Factor, also ist $\overset{1}{d}_1$ von den *sämmtlichen* Gliedern von (12.), bis auf das *erste* E_1x_1 und bis auf r, ein Theiler. Geht nun $\overset{1}{d}_1$ *nicht* in x_1 auf, so geht es auch nicht in E_1x_1 auf, denn E_1 (11.) enthält e_1 *nicht* als Theiler und folglich auch $\overset{1}{d}_1$ nicht, da die *Stammtheiler* von e_1, und folglich von $\overset{1}{d}_1$, in $e_2, e_3, e_4, \dots\dots e_n$ und mithin in $E_1=e_2e_3e_4\dots\dots e_n$ *nicht* vorkommen. Also kann $\overset{1}{d}_1$, da es in E_1x_1 nicht aufgeht, auch in r nicht aufgehen. Umgekehrt kann $\overset{1}{d}_1$, wenn es in r nicht aufgeht, in E_1x_1 nicht aufgehen, und folglich, da $\overset{1}{d}_1$ in E_1 nicht aufgeht, in x_1 nicht, denn sonst wäre $\frac{E_1x_1}{\overset{1}{d}_1}$ eine ganze Zahl und $\frac{r}{\overset{1}{d}_1}$ nicht.

C. Es gehört daher zu jedem x_1, welches mit $\overset{1}{d_1}$ *nicht* aufgeht, ein r, das heifst eine der Zahlen aus der Reihe der (5.), und *nur* eine, die ebenfalls mit $\overset{1}{d_1}$ *nicht* aufgeht.

Eben so gehört zu jedem x_1, welches mit $\overset{2}{d_1}$, mit $\overset{3}{d_1}$ u. s. w. nicht aufgeht, ein r, und nur eins, und immer ein anderes r zu jedem andern x_1.

Giebt es also unter den Zahlen $x_1 = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots e_1$ (3. 1.), ψe_1 verschiedene Zahlen, die mit *keinem* der d_1 (2. 1.) aufgehen, so giebt es *eben so viele verschiedene* dazu gehörige r, die ebenfalls mit keinem der d_1 aufgehen.

D. Auf gleiche Weise folgt, dafs, wenn es unter den Zahlen x_2, x_3, $x_4, \ldots\ldots x_n$ (3.) der Reihe nach $\psi e_2, \psi e_3, \psi e_4, \ldots\ldots \psi e_n$ verschiedene Zahlen giebt, die der Reihe nach mit keinem $d_2, d_3, d_4, \ldots\ldots d_n$ aufgehen, *eben so viele verschiedene* r aus der Reihe der Zahlen (5.) ebenfalls mit keinem $d_2, d_3, d_4, \ldots\ldots d_n$ aufgehen werden.

E. Legt man nun in der Gleichung (12.) den x der Reihe nach die $\psi e_1, \psi e_2, \psi e_3, \ldots\ldots \psi e_n$ verschiedenen Werthe bei, die der Reihe nach mit den $d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots d_n$ *nicht* aufgehen, so bekommt dadurch nach (§. 74.) $\mathfrak{S}E + r$, oder, was dasselbe ist, r, $\psi e_1 . \psi e_2 . \psi e_3 \ldots\ldots \psi e_n$ verschiedene Werthe; woraus denn folgt, dafs es gerade eben so viele verschiedene r, das heifst Zahlen aus der Reihe der (5.) giebt, die mit den verschiedenen d (2.) *nicht* aufgehen; und da nun die Anzahl dieser Zahlen in (6.) durch ψE bezeichnet wurde, so folgt dafs

$$13. \quad \psi e_1 . \psi e_2 . \psi e_3 \ldots\ldots \psi e_n = \psi E$$

ist; gemäfs (I. 7.).

F. Die Gleichung (II. 8.) folgt unmittelbar aus (7.), denn Alles in dem Beweise bleibt *dasselbe*, wenn man für die Bedeutung des Zeichens φ statt ψ, die d in (2.) die *sämmtlichen Stammtheiler* von $e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots e_n$, also von E bezeichnen läfst.

Zweiter Beweis. *G.* Man setze wie in (§. 77.)

$$14. \begin{cases} 1. & z = m_1 e_1 + r_1, \text{ wo } r_1 \text{ eine der Zahlen } 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots e_1 - 1 \text{ ist,} \\ 2. & z = m_2 e_2 + r_2, \text{ wo } r_2 \text{ - - - - } 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots e_2 - 1 \text{ ist,} \\ 3. & z = m_3 e_3 + r_3, \text{ wo } r_3 \text{ - - - - } 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots e_3 - 1 \text{ ist,} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n. & z = m_n e_n + r_n, \text{ wo } r_n \text{ - - - - } 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots e_n - 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Geht hier z. B. der Theiler $\overset{1}{d}_1$ von e_1 in r_1 *nicht* auf, so kann er, da er in e_1 aufgeht, vermöge (14. 1.) auch in z *nicht* aufgehen; und umgekehrt.

Eben so verhält es sich mit den andern Theilern $\overset{2}{d}_1$, $\overset{3}{d}_1$, ... von e_1.

Also zu jedem r_1, welches weder mit $\overset{1}{d}_1$, noch mit $\overset{2}{d}_1$, $\overset{3}{d}_1$ etc. und überhaupt mit keinem d_1 aufgeht, gehört ein z, und immer ein anderes z, welches ebenfalls mit keinem d_1 aufgeht.

Setzt man demnach für die r_1 die Zahlen x_1 (3. 1.), so folgt, dafs zu den ψe_1 Zahlen r_1 oder x_1, die nach der Voraussetzung mit keinem d_1 aufgehen sollen, *eben so viele verschiedene* z gehören, die ebenfalls mit keinem d_1 aufgehen.

H. Auf gleiche Weise folgt, dafs zu den ψe_2, ψe_3, ... ψe_n Zahlen r_2, r_3, ... r_n, oder x_2, x_3, ... x_n (14. oder 3.), die der Reihe nach mit keinem d_2, d_3, ... d_n aufgehen, *eben so viele verschiedene* z gehören werden, die ebenfalls der Reihe nach nicht mit d_2, d_3, ... d_n aufgehen.

I. Legt man hierauf dem r in (14.) die ψe_1, ψe_2, ψe_3, ... ψe_n Werthe bei, welche der Reihe nach nicht mit den d_1, d_2, d_3, ... d_n aufgehen, und zwar so, dafs in (14.) die r niemals *sämmtlich* dieselben Werthe bekommen, so entstehen in den Gleichungen (14.) zusammengenommen nach (§. 76.) $\psi e_1 . \psi e_2 . \psi e_3 .... \psi e_n$ *verschiedene Gruppen* der r, deren keine *alle dieselben* r hat. Zu jeder solcher Gruppe gehört nach (§. 77. I.) ein *anderes* z. Also giebt es auch $\psi e_1 . \psi e_2 . \psi e_3 .... \psi e_n$ verschiedene z, die nicht mit d_1, d_2, d_3, ... d_n aufgehen; und da nun die Anzahl dieser z durch ψE bezeichnet worden ist, so ist wieder, wie in (7. und 13.),

$$15. \quad \psi e_1 . \psi e_2 . \psi e_3 .... \psi e_n = \psi E.$$

K. Auch kann es keine andern z geben, welche mit den d *nicht* aufgingen, als diejenigen, für welche das Gleiche mit den r Statt findet. Denn geht z. B. r_1 in (14. 1.) mit dem Theiler $\overset{1}{d}_1$ von e_1 auf, so mufs vermöge der oben genannten Gleichung auch z mit $\overset{1}{d}_1$ aufgehen.

L. Die Gleichung (8.) findet sich wieder, wie in (*F.*), aus (7.) unmittelbar.

Anm. *M.* Weiter unten wird sich noch ein anderer, auf völlig verschiedene Vordersätze gegründeter Beweis des Lehrsatzes finden.

§. 79.

Lehrsatz.

Es seien x *und* y *zwei beliebige, zu einander theilerfremde, oder nicht theilerfremde ganze Zahlen. Ihr* ***Product*** xy *sei*

$$1.\quad xy = z.$$

Es seien $d_1, d_2, d_3, \ldots d_m$ *beliebige, unter einander theilerfremde Theiler von* y, *Stammtheiler oder Nicht-Stammtheiler. Jede Zahl aus der Reihe der Zahlen*

$$2.\quad 1, 2, 3, 4, \ldots y,$$

welche mit ***keinem*** *der* d ***aufgeht,*** *werde durch* y_φ *bezeichnet, ihre* ***Anzahl,*** *wie in* (§. 78.), *durch* ψy *und, wenn* ***alle*** *Theiler von* y *berücksichtigt werden, durch* φy. *Eben so werde jede Zahl aus der Reihe der Zahlen*

$$3.\quad 1, 2, 3, 4, \ldots z,$$

welche mit ***keinem*** *der* d ***aufgeht,*** *durch* z_φ *bezeichnet, ihre* ***Anzahl*** *durch* ψz *und für* ***alle*** d *durch* φz.

Alsdann ist

$$4.\quad \psi z = x.\psi y \quad \text{und} \quad \varphi z = x.\varphi y.$$

Beispiel. Es sei

$$5.\quad x = 15,\ y = 24, \quad \text{also} \quad z = xy = 15.24 = 360.$$

Man berücksichtige nur die *zwei* Theiler

$$6.\quad d_1 = 3 \quad \text{und} \quad d_2 = 4$$

von $y = 24$, so sind die Zahlen y_φ aus der Reihe der Zahlen

$$7.\quad 1, 2, 3, 4, \ldots 24\ (= y),$$

welche weder mit $d_1 = 3$, noch mit $d_2 = 4$ *aufgehen*, folgende:

$$8.\quad y_\varphi = 1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19, 22 \text{ und } 23.$$

Ihre *Anzahl* ist

$$9.\quad \psi y = 12.$$

Dagegen sind die Zahlen z_φ aus der Reihe der Zahlen

$$10.\quad 1, 2, 3, 4, \ldots 360\ (= z),$$

welche weder mit $d_1 = 3$, noch mit $d_2 = 4$ aufgehen, folgende:

11. $z_\varphi =$ 1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19, 22, 23,
25, 26, 29, 31, 34, 35, 37, 38, 41, 43, 46, 47,
49, 50, 53, 55, 58, 59, 61, 62, 65, 67, 70, 71,
73, 74, 77, 79, 82, 83, 85, 86, 89, 91, 94, 95,
97, 98, 101, 103, 106, 107, 109, 110, 113, 115, 118, 119,
121, 122, 125, 127, 130, 131, 133, 134, 137, 139, 142, 143,
. . . .

Ihre Anzahl $\overset{1}{\psi}z$ ist, da es 15 Zeilen, jede zu 12 Zahlen giebt,

$$12. \quad \overset{1}{\psi}z = 15.12 = 180 = 15.\overset{1}{\psi}y = x.\overset{1}{\psi}y;$$

gemäfs (4.).

Beweis *A.* Die *sämmtlichen* Zahlen 1, 2, 3, 4, ... *z*, deren jede beliebige durch z_1 bezeichnet werden mag, können offenbar durch

$$13. \quad z_1 = ny + r$$

ausgedrückt werden, wenn man der Reihe nach für

$$14. \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots x-1,$$
$$15. \quad r = 1, 2, 3, 4, \dots y$$

setzt.

B. Geht nun *r* in (13.) mit einem der Theiler *d* von *y* auf, so mufs nach (§. 18.), da *y* mit *d* aufgeht, auch z_1 mit *d* aufgehen. Also alle z_1 in (13.), welche zu Resten *r* (15.) gehören, die mit einem *d* aufgehen, sind *keine* der Zahlen z_φ die mit keinem *d* aufgehen.

C. Geht dagegen *r* in (13.) mit *keinem* der Theiler *d* von *y* auf, so kann auch z_1 mit *keinem* dieser Theiler aufgehen; denn ginge z_1 mit einem solchen Theiler auf, so müfste nach (§. 18.), weil *y* damit aufgeht, auch *r* damit aufgehen; gegen die Voraussetzung. Also *alle* z_1 in (13.), welche zu Resten *r* (15.) gehören, die mit keinem *d* aufgehen, sind durch z_φ bezeichnete Zahlen, und es giebt *keine andern* z_φ. Gäbe es noch andere, so könnten sie nur zu Resten *r* gehören, die mit einem *d aufgehen;* denn die z_1, zu Resten *r* gehörig, welche mit *keinem d* aufgehen, sind berücksichtigt; diese zu Resten *r*, mit einem *d* aufgehend, gehörige z_1 sind aber nach (*B.*) *keine* z_φ.

D. Nun ist die Anzahl der $r = z_\varphi$ in (13. und 15.), zu einem *bestimmten* Werthe von *n* (14.) gehörig, gleich ψy; eben so grofs also ist die Anzahl der $z_1 = z_\varphi$ für einen *bestimmten* Werth von *n*. Der Werth von *n* in (13.) aber ist ganz *gleichgültig:* also gehören zu *jedem* der *x* Werthe (15.) von *n*, ψy Zahlen $r = z_\varphi$, und folglich eben so viele $z_1 = z_\varphi$. Mithin giebt es überhaupt $x.\psi y$ Werthe von $z_1 = z_\varphi$, die mit keinem der *d* aufgehen, und es ist

$$16. \quad \overset{1}{\psi}z = x.\psi y, \text{ und}$$
$$17. \quad \varphi z = x.\varphi y \text{ für } \textit{alle} \text{ Theiler von } y;$$

wie es der Lehrsatz in (4.) behauptet.

§. 80.

Lehrsatz.

Es seien x *und* y *zwei beliebige, zu einander* ***theilerfremde*** *ganze Zahlen. Ihr* ***Product*** xy *sei*

1. $\quad xy = z.$

Es seien $d_1, d_2, d_3, \dots d_n$ *beliebige, unter einander theilerfremde Theiler von* y, *Stammtheiler oder Nicht-Stammtheiler, und* x *habe keinen dieser Theiler mit* y *gemein. Jede Zahl aus der Reihe der Zahlen*

2. $\quad 1, 2, 3, 4, \dots y,$

welche mit ***keinem*** *der* d ***aufgeht,*** *werde durch* y_φ *bezeichnet, ihre* ***Anzahl*** *wie in* (§. 78.) *durch* ψy, *und für* ***alle Theiler*** *von* y *durch* φy. *Ähnlich werde jede Zahl aus der Reihe der Zahlen*

3. $\quad 1, 2, 3, 4, \dots z,$

welche mit ***keinem*** d *und* **zugleich mit x selbst** *nicht aufgeht, durch* z_φ *bezeichnet, ihre Anzahl durch* $\overset{2}{\psi} z$, *und für alle* d *durch* $\overset{2}{\varphi} z$.

Alsdann ist

4. $\quad \overset{2}{\psi} z = (x-1)\psi y \quad \text{und} \quad \overset{2}{\varphi} z = (x-1)\varphi y.$

Beispiel. Es sei

5. $\quad x = 9, \quad y = 40, \quad \text{also} \quad z = xy = 9.40 = 360.$

Man berücksichtige die zwei Theiler

6. $\quad d_1 = 4 \quad \text{und} \quad d_2 = 5$

von $y = 40$, so sind die Zahlen y_φ aus der Reihe der Zahlen

7. $\quad y = 1, 2, 3, 4, \dots 40\ (=y),$

welche weder mit $d_1 = 4$, noch mit $d_2 = 5$ *aufgehen*, folgende:

8. $y_\varphi = 1,2,3,6,7,9,11,13,14,17,18,19,21,22,23,26,27,29,31,33,34,37,38$ und 39.

Ihre *Anzahl* ist

9. $\quad \psi y = 24.$

Dagegen sind die Zahlen z_φ aus der Reihe der Zahlen

10. $\quad 1, 2, 3, 4, \dots 360\ (=z),$

welche weder mit 4, noch mit 5 aufgehen, und *zugleich auch nicht mit* $x = 9$,

11. $z_\varphi =$ 1, 2, 3, 6, 7, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 31, 33, 34, 37, 38, 39,
41, 42, 43, 46, 47, 49, 51, 53, 57, 58, 59, 61, 62, 66, 67, 69, 71, 73, 74, 77, 78, 79,
82, 83, 86, 87, 89, 91, 93, 94, 97, 98, 101, 102, 103, 106, 107, 109, 111, 113, 114, 118, 119,
121, 122, 123, 127, 129, 131, 133, 134, 137, 138, 139, 141, 142, 143, 146, 147, 149, 151, 154, 157, 158, 159,
161, 163, 166, 167, 169, 173, 174, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 186, 187, 191, 193, 194, 197, 199,
201, 202, 203, 206, 209, 211, 213, 214, 217, 218, 219, 221, 222, 223, 226, 227, 229, 231, 233, 237, 238, 239,
241, 242, 246, 247, 249, 251, 253, 254, 257, 258, 259, 262, 263, 266, 267, 269, 271, 273, 274, 277, 278,
281, 282, 283, 286, 287, 289, 291, 293, 294, 298, 299, 301, 302, 303, 307, 309, 311, 313, 314, 317, 318, 319,
321, 322, 323, 326, 327, 329, 331, 334, 337, 338, 339, 341, 343, 346, 347, 349, 353, 354, 357, 358, 359,
. . . .

Ihre *Anzahl* $\overset{2}{\psi} x$ ist 192 und

12. $\overset{2}{\psi} x = 192$ ist $= 8.24 = (x-1)\psi y$ (5. und 9.);

wie es der Lehrsatz in (4.) behauptet.

Beweis. *A.* Die *sämmtlichen* Zahlen 1, 2, 3, 4, ... x, deren jede beliebige durch x_1 bezeichnet werden mag, können wieder offenbar durch

$$13. \quad x_1 = ny + r$$

ausgedrückt werden, wenn man der Reihe nach für

$$14. \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots . x-1,$$

$$15. \quad r = 1, 2, 3, 4, \ldots . y$$

setzt.

B. Geht nun r in (13.) mit einem der Theiler d von y auf, so mufs nach (§. 18.), weil y mit d aufgeht, auch x_1 mit d aufgehen. Also alle x_1 in (13.), welche zu Resten r (15.) gehören, die mit einem d aufgehen, sind *keine* der Zahlen x_φ, welche weder mit einem d, noch mit x aufgehen sollen.

C. Geht dagegen r in (10.) mit *keinem* der Theiler d von y auf, so kann auch x_1 mit *keinem* dieser Theiler d aufgehen; denn ginge x_1 mit einem d auf, so müfste nach (§. 18.), weil d damit aufgeht, auch r damit aufgehen; gegen die Voraussetzung. Also können sich die Zahlen x_φ, welche wed mit einem d, noch mit x aufgehen sollen, nur unter denen befinden, für welche in (13.) r mit *keinem* d aufgeht. Solcher r aus den Zahlen (15. oder 2.) giebt es nach der Voraussetzung ψy für *jedes n;* denn für *jedes n* in (13.) sind die r *dieselben.* Auch giebt es *keine andern* x_1, unter welchen sich die x_φ befinden könnten, als diejenigen, für welche r mit *keinem* d aufgeht. Denn gäbe es dergleichen, so könnten sie nur zu r gehören, die mit einem d *aufgehen,* da die andern x_1 zu den r, die mit *keinem* d aufgehen, schon berücksichtigt sind. Ein x_1, zu einem mit einem d aufgehenden r müfste aber nach (*B.*) mit d aufgehen, und wäre also kein x_φ.

D. Da es demnach nur ψy verschiedene x_1 für *jedes n* giebt, unter welchen sich die x_φ befinden können, und x verschiedene Werthe von n Statt finden (14.), diese aber für x_1 in Beziehung auf r ganz gleichgültig sind, so giebt es überhaupt nur

$$16. \quad x.\psi y$$

Werthe von x_1 in (13.), die mit *keinem* d aufgehen, und unter welchen sich nur die x_φ, welche mit *keinem* d und zugleich mit x nicht aufgehen sollen, befinden können.

Es fragt sich nun aber noch, wieviele es unter den $x.\psi y$ mit keinem d aufgehenden Werthen von z_1 giebt, die ***mit x aufgehen.*** Schliefst man diese davon aus, so werden die z_v übrig bleiben, die weder mit einem d, noch mit x aufgehen.

E. Die mit x aufgehenden z_1 werden offenbar durch mx bezeichnet, wo

$$17. \quad m = 1, 2, 3, 4, \ldots . y$$

ist, so dafs also für sie vermöge (13.)

$$18. \quad mx = ny + r$$

sein mufs, wo r mit y keinen der Theiler d gemein hat.

F. In der Gleichung (18.) mufs aber nothwendig m mit y ***keinen der Theiler d gemein haben;*** denn ginge ein d in m und y zugleich auf, so müfste es nach (§. 18.) auch nothwendig in r aufgehen, und y und r hätten diesen Theiler gemein; gegen die Bedingung in (*E.*).

Also kann m je nur eine der ψy Zahlen aus der Reihe der Zahlen (17. oder 2.) sein, die mit y ***keinen*** der Theiler d gemein haben. Mithin giebt es unter den $x.\psi y$ Werthen von z_1, die mit y keinen Theiler d gemein haben, nur ψy verschiedene Werthe, die noch mit x aufgehen, und folglich sind nur diese noch von den $x.\psi y$ Werthen der z_1 auszuschliefsen.

Geschieht solches, so bleiben

$$19. \quad x.\psi y - \psi y = (x-1)\psi y$$

Werthe von z_1 aus der Reihe der Zahlen (3.) übrig, die weder mit einem d, ***noch mit x*** aufgehen. Folglich ist die durch $\overset{2}{\psi} z$ bezeichnete Anzahl dieser Zahlen

$$20. \quad \overset{2}{\psi} z = (x-1)\psi y, \text{ und}$$

$$21. \quad \overset{2}{\varphi} z = (x-1)\varphi y \text{ für } \textit{alle} \text{ Theiler } d \text{ von } y:$$

wie es der Lehrsatz in (4.) behauptet.

Anm. 1. *G.* Findet die Bedingung nicht Statt, dafs x mit y keinen der Theiler d gemein haben soll, so gehen ***alle*** die $x.\varphi y$ verschiedenen z_1 (16.), die mit keinem d aufgehen, auch schon mit x nicht auf. Denn ginge ein solches z_1 mit x auf, so müfste es auch mit denjenigen Theilern, die x und y gemein haben, aufgehen, und hätte also ***diesen*** Theiler mit y gemein; was nicht der Fall ist. Hat daher x mit y Theiler d gemein, so sind von $x.\varphi y$ Werthen von z_1, die mit y kein d gemein haben, ***keine x*** wegen mehr auszuschliefsen, sondern die Anzahl φz der Zahlen aus der Reihe der Zahlen (3.), welche mit keinem d und auch mit x nicht aufgehen, ist $= x.\varphi y$ selbst; wie in dem Falle des Lehrsatzes (§. 79.).

Anm. 2. *H.* Die Erwägungen in (*E.* und *F.*) sind die Hauptmomente in dem Beweise des gegenwärtigen Lehrsatzes.

§. 81.

Lehrsatz.

Wenn man eine beliebige ganze Zahl Z *nach* (§. 21.) *durch*

$$1.\quad Z = p_1^{e_1}.p_2^{e_2}.p_3^{e_3}\ldots\ldots p_\mu^{e_\mu}$$

ausdrückt, wo die p *die sämmtlichen* μ ***Stammtheiler*** *von* Z ***und*** *die* e *beliebige ganze* ***positive*** *Zahlen, Null eingeschlossen, ausdrücken, dann aber das Product*

$$2.\quad p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_\mu = z \quad \textit{und}$$

$$3.\quad Z = nz,\quad \textit{also}\quad n = \frac{Z}{z} = p_1^{e_1-1}.p_2^{e_2-1}.p_3^{e_3-1}\ldots\ldots p_\mu^{e_\mu-1}$$

setzt, und die zu z *und* Z ***theilerfremden*** *Zahlen* >0 *und* $<z$ *oder* $<Z$ *wie oben durch* z_φ *und* Z_φ, *die* ***Anzahl*** *dieser* z_φ *und* Z_φ *durch* φz *und* φZ *bezeichnet, so werden*

I. ***Alle*** *zu* Z *theilerfremden Zahlen* Z_φ *durch die zu* z *theilerfremden Zahlen* z_φ *vermittels der Gleichung*

$$4.\quad Z_\varphi = \nu z + z_\varphi$$

ausgedrückt, wenn man in derselben dem z_φ *der Reihe nach für*

$$5.\quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n-1\ (3.)$$

alle die Werthe giebt, die es haben kann; so daſs also bloſs die zu $z = p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_\mu$ *theilerfremden Zahlen* z_φ *nöthig sind, um* ***alle*** *zu* $Z = p_1^{e_1}.p_2^{e_2}.p_3^{e_3}\ldots\ldots p_\mu^{e_\mu}$ *theilerfremden Zahlen* Z_φ *zu finden.*

II. *a.* *Die* ***Anzahl*** φz *der zu* z ***theilerfremden*** *Zahlen* z_φ >0 und $<z$ *ist*

$$6.\quad \varphi z = (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots\ldots(p_\mu-1).$$

b. *Die Anzahl* φZ *der zu* Z ***theilerfremden*** *Zahlen* $Z_\varphi > 0$ *und* $<Z$ *ist*

$$7.\quad \varphi Z = n\varphi z = p_1^{e_1-1}.p_2^{e_2-1}.p_3^{e_3-1}\ldots\ldots p_\mu^{e_\mu}.(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots\ldots(p_\mu-1).$$

III. *a.* *Ist der* ***kleinste*** *Stammtheiler* p_1 *von* Z (1.) $= 2$, *und sind* x *andere Stammtheiler* p *von der Form* $2^{\tau+2}.n+1$, *wo* n *nicht weiter durch* 2 *theilbar angenommen wird, und welches dann für* $\tau = 0$ *die Form* $4n+1$ *einschlieſst, die übrigen* $\mu - x - 1$ *Stammtheiler von der Form* $4n-1$, *so ist*

$$8.\quad \varphi Z \textit{ durch } 2^{\mu+x+\tau_1+\tau_2\ldots\ldots+e_1-2} \textit{ theilbar.}$$

b. *Ist der kleinste Stammtheiler* p_1 *von* Z (1.) > 2, *so ist*

$$9. \quad \varphi Z \textit{ durch } 2^{\mu+\varkappa+\tau_1+\tau_2 \ldots} \textit{ theilbar.}$$

IV. *a.* *Die Summe* $S\varphi z$ *der sämmtlichen zu* z *theilerfremden Zahlen* $z_\varphi > 0$ *und* $< z$ *ist*

$$10. \quad S\varphi z = \tfrac{1}{2} z \varphi z = \tfrac{1}{2} p_1 . p_2 . p_3 \ldots p_\mu (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) \ldots (p_{\mu-1} - 1).$$

b. *Die Summe* $S\varphi Z$ *der sämmtlichen zu* Z *theilerfremden Zahlen* $Z\varphi > 0$ *und* $< Z$ *ist*

$$11. \quad S\varphi Z = \tfrac{1}{2} Z \varphi Z = \tfrac{1}{2} n Z \varphi z = \tfrac{1}{2} n^2 z \varphi z = \tfrac{1}{2} Z^2 \frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_\mu-1)}{p_1 . p_2 . p_3 \ldots p_\mu}.$$

Beispiel zu I. Es sei

$$12. \quad Z = 360 = 2^3 . 3^2 . 5,$$

also

$$13. \quad \begin{cases} p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad \mu = 3, \\ e_1 = 3, \quad e_2 = 2, \quad e_3 = 1, \\ z = 2.3.5 = 30, \\ n = \dfrac{Z}{z} = 12. \end{cases}$$

Die zu $z = 30$ theilerfremden Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ sind

$$14. \quad z_\varphi = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \text{ und } 29.$$

Man erhält also nach (4.) die zu $Z = 360$ theilerfremden Zahlen $Z_\varphi > 0$ und $< Z$, wenn man zu den z_φ (14.) der Reihe 1.30; 2.30; 3.30 bis 11.30 hinzuthut. Dies giebt

15. $Z_\varphi =$

1	31	61	91	121	151	181	211	241	271	301	331
7	37	67	97	127	157	187	217	247	277	307	337
11	41	71	101	131	161	191	221	251	281	311	341
13	43	73	103	133	163	193	223	253	283	313	343
17	47	77	107	137	167	197	227	257	287	317	347
19	49	79	109	139	169	199	229	259	289	319	349
23	53	83	113	143	173	203	233	263	293	323	353
29	59	89	119	149	179	209	239	269	299	329	359;

und alle diese Zahlen, und nur sie, sind wirklich zu $Z = 360$ theilerfremd.

Zu II. Der Ausdruck (6.) giebt hier, zufolge (13.),

$$16. \quad \varphi z = \varphi . 30 = (2-1)(3-1)(5-1) = 1.2.4 = 8;$$

und dies ist *Anzahl* der zu $z = 30$ theilerfremden Zahlen z_φ (14.).

Der Ausdruck (7.) giebt, da $n = 12$ und $\varphi z = 8$ ist (13. und 16.),

$$17. \quad \varphi Z = 12.8 = 96;$$

und dies ist die *Anzahl* der zu $Z = 360$ theilerfremden Zahlen $Z\varphi$ (15.)

Zu III. In (12.) ist der *kleinste* Stammtheiler p_1 von Z gleich 2, und nur $p_3 = 5$ ist von der Form $4n+1$, also $x = 1$. Es soll daher nach (8.) $\varphi Z = 96$ (17.) durch $2^{3+3+1-2} = 2^5 = 32$ *theilbar* sein; was auch der Fall ist.

Wäre $Z = 3^2.5.7^3.17^2$, so wäre $z = 3.5.7.17$, $\varphi z = 2.4.6.16$ (6.) $= 768$, $n = \frac{Z}{z} = 3.7^2.17 = 2499$ und $\varphi Z = n\varphi z$ (7.) $= 2499.768$. Dies soll, da hier $p_2 = 5 = 2^2+1$ und $p_4 = 17 = 2^4+1$, also $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 2$, $x = 2$, $\mu = 4$ ist, nach (9.) durch $2^{\mu+x+\tau_1+\tau_2} = 2^{4+2+0+2} = 2^8 = 256$ theilbar sein; was auch der Fall ist.

Zu IV. Nach (10.) soll für $z = 30$ (13.), also für $\varphi z = 8$ (16.),

$$18. \quad S\varphi z = \tfrac{1}{2}.30.8 = 120$$

sein; und dies ist auch die *Summe* der zu $z = 30$ theilerfremden 8 Zahlen z_φ (14.).

Nach (11.) soll für $Z = 360$, also für $\varphi Z = 96$ (17.),

$$19. \quad S\varphi Z = \tfrac{1}{2}.360.96 = 17280$$

sein; und dies ist auch die Summe der zu $Z = 360$ theilerfremden 96 Zahlen Z_φ (15.).

Beweis von I. *A.* In der Gleichung

$$20. \quad Z_\varphi = \nu z + z_\varphi \text{ (4.)}$$

geht

$$21. \quad z = p_1.p_2.p_3 \ldots . p_\mu \text{ (2.)}$$

mit *allen* den Stammtheilern p von Z (1.) auf, z_φ dagegen mit *keinem* derselben, weil es nach der Voraussetzung zu z *theilerfremd* ist. Also kann auch Z_φ in (20.) mit *keinem* der p aufgehen, was auch ν sei. Denn ginge Z_φ mit einem der p auf, so müfste, weil z damit aufgeht, auch z_φ mit dem p aufgehen, und folglich wäre z_φ zu z *nicht* theilerfremd; gegen die Voraussetzung. Also ist Z_φ in (20.) für *jedes* z_φ und *jedes* ν nothwendig zu z und folglich auch zu Z *theilerfremd.*

B. Denn es giebt auch *keine anderen* zu Z theilerfremden Zahlen Z_φ, als die, welche (20.) ausdrückt. Denn gäbe es eine solche, so könnte sie nur zu einem z_φ gehören, welches *nicht* zu z theilerfremd wäre und folglich mit irgend einem p aufginge. Geht aber z_φ mit irgend einem p auf, so müfste vermöge (20.), da z mit *jedem* p aufgeht, auch Z_φ mit dem p aufgehen, und wäre also zu z und folglich zu Z *nicht* theilerfremd.

C. Endlich sind alle Z_φ, welche (4.) oder (20.) ausdrückt, > 0 und $< Z$, wenn man ν nach (5.) nicht gröfser als $n-1$ setzt; denn erst nz ist $= Z$ (3.), und z_φ ist $< z$, also $(n-1)z + z_\varphi$ noch $< Z$.

Mithin folgt, zusammengenommen, dafs (4.) *alle* zu Z theilerfremden Zahlen $Z_\varphi > 0$ und $< Z$ ausdrückt; wie es (I.) behauptet.

Erster Beweis von II. *D.* Alle Zahlen $y > 0$ und $< p_1^{e_1}$, die *nicht* mit dem Stammtheiler p_1 aufgehen, sind zu $p_1^{e_1}$ *theilerfremd;* denn mit welchem *andern* Stammtheiler auch y aufgehen mag: $p_1^{e_1}$ geht damit nicht auf.

E. Nun gehen von den Zahlen

$$22.\quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.\ p_1^{e_1}$$

23. *nur* die Zahlen $p_1,\ 2p_1,\ 3p_1,\ 4p_1,\ \ldots.\ p_1^{e_1-1}.p_1 = p_1^{e_1}$ mit p_1 auf. Alle *zwischen* denselben liegenden, die allgemein durch $\mathfrak{G}p_1 + r$ ausgedrückt werden können, gehen nicht mit p_1 auf, weil $r < p_1$ und > 0 ist.

Die *Anzahl* der Zahlen (23.) ist $= p_1^{e_1-1}$. Werden also diese von den $p_1^{e_1}$ Zahlen (22.) *ausgeschlossen*, so bleiben $p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1} = p_1^{e_1-1}(p_1 - 1)$ Zahlen übrig, die *nicht* mit p_1 aufgehen und die also sämmtlich zu $p_1^{e_1}$ *theilerfremd* sind. Folglich ist

$$24.\quad \varphi p_1^{e_1} = p_1^{e_1-1}(p_1 - 1).$$

Ganz aus *denselben* Gründen ist

$$25.\quad \begin{cases} \varphi p_2^{e_2} = p_2^{e_2-1}(p_2 - 1), \\ \varphi p_3^{e_3} = p_3^{e_3-1}(p_3 - 1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi p_\mu^{e_\mu} = p_\mu^{e_\mu-1}(p_\mu - 1). \end{cases}$$

F. Nun ist allgemein nach (§. 78. 8.)

$$26.\quad \varphi p_1^{e_1}.\varphi p_2^{e_2}.\varphi p_3^{e_3}\ldots.\varphi p_\mu^{e_\mu} = \varphi\left(p_1^{e_1}.p_2^{e_2}.p_3^{e_3}\ldots.p_\mu^{e_\mu}\right) = \varphi Z\ (1.),$$

also ist aus (24. und 25.)

$$27.\quad \varphi Z = p_1^{e_1-1}.p_2^{e_2-1}.p_3^{e_3-1}\ldots.p_\mu^{e_\mu-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots.(p_\mu-1);$$

und dieses ist der Ausdruck (7.) von φZ im Lehrsatze.

Zweiter Beweis von II. *G.* Es sei y eine *beliebige*, p eine *Stammzahl, die* in y *nicht* aufgeht. φy und $\varphi(py)$ bezeichne die Anzahl der zu y und py *theilerfremden* Zahlen > 0 und $< y$ und py.

Alsdann ist gemäfs (§. 80.)

$$28.\quad \varphi(py) = (p-1)\varphi y;$$

was auch y sein mag, wenn es nur nicht mit p aufgeht.

H. Setzt man nun zunächst $y = p_1$, so ist offenbar $\varphi y = p_1 - 1$; denn *alle* die $p_1 - 1$ Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots.\ p_1 - 1 > 0$ und $< p_1$, und *nur*

sie, sind zu der Stammzahl p_1 *theilerfremd*. Setzt man also weiter in (28.) zugleich p_2 statt p, was in $y=p_1$ nicht aufgeht, so ergiebt sich

29. $\varphi(p_1 p_2) = (p_1-1)(p_2-1)$.

Setzt man hierauf in (28.) $p_1 p_2$ statt y und p_3 statt p, was wieder in $y=p_1 p_2$ nicht aufgeht, so ergiebt sich

30. $\varphi(p_1 p_2 p_3) = (p_3-1)\varphi(p_1 p_2) = (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)$ (29.).

Und so weiter, wenn man der Reihe nach $p_1 p_2 p_3$ statt y, p_4 statt p, $p_1 p_2 p_3 p_4$ statt y, p_5 statt p etc. setzt. Zuletzt findet sich

31. $\varphi(p_1 p_2 p_3 \ldots . p_\mu)$ oder φz (2.) $=(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots . p_\mu-1$;

und dieses ist die Gleichung (6.) des Lehrsatzes.

I. Nun drückt zufolge (I.)

32. $Z_\varphi = \nu z + z_\varphi$

alle zu Z theilerfremden Zahlen $Z_\varphi > 0$ und $< Z$ aus, wenn man dem ν der Reihe nach die n verschiedenen Werthe 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$ (5.) und dann dem z_φ alle die φz Werthe >0 und $<z$ giebt, die es haben kann.

Zu *jedem* Werth von ν in (32.) gehören also φz Werthe von Z_φ, und folglich giebt es überhaupt $n\varphi z$ Werthe von Z_φ, und daher ist

33. $\varphi Z = n\varphi z = \frac{Z}{z}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots .(p_\mu-1)$ (3. und 37.)

$= p_1^{e_1-1} . p_2^{e_2-1} . p_3^{e_3-1} \ldots . p_\mu^{e_\mu-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots .(p_\mu-1)$ (1. und 2.);

und dieses ist der Ausdruck (7.) des Lehrsatzes.

Beweis von III. *K.* Ist der *kleinste* Stammtheiler p_1 von Z, $=2$, so sind alle übrigen $\mu-1$ Stammtheiler p_2, p_3, p_4, ... p_μ *ungerade;* also geht von den μ ersten Factoren von φZ in (7.), welche *Potenzen* der p sind, *allein* $p_1^{e_1-1} = 2^{e_1-1}$ mit 2 auf, und zwar mit 2^{e_1-1}. Von den übrigen Factoren (p_1-1), (p_2-1), (p_3-1), ... $p_\mu-1$ ist der erste $p_1-1=1$ und geht also *nicht* mit 2 auf. Sodann geben die $\varkappa$ verschiedenen p, welche von der Form $2^{\tau+2}.n+1$ sein sollen, $p-1=2^{\tau+2}.n$. Jeder solcher Factor geht mit $2^{\tau+2}$ auf, also, da ihrer $\varkappa$ sein sollen, so gehen sie zusammen mit $2^{2\varkappa+\tau_1+\tau_2+\cdots}$ auf. Endlich giebt jedes der $\mu-\varkappa-1$ verschiedenen p, die von der Form $4n-1$ sind, $p-1=4n-2$, und dieses geht, was auch n sein mag, *nur* mit 2 auf; denn $\frac{4n-2}{2}=2n-1$ ist *immer* ungerade. Also gehen diese $\mu-\varkappa-1$ Factoren noch mit $2^{\mu-\varkappa-1}$ auf. Mithin geht zusammengenommen φZ mit

34. $2^{e_1-1} . 2^{2\varkappa+\tau_1+\tau_2+\cdots} . 2^{\mu-\varkappa-1} = 2^{e_1+\varkappa+\tau_1+\tau_2+}$

auf; wie es (8.) in (III. *a.*) behauptet.

L. Ist schon der *kleinste* Stammtheiler p_1 von $Z > 2$, so sind alle p ohne Ausnahme *ungerade;* also geht dann von den μ ersten Factoren von φZ in (7.), welche *Potenzen* von p sind, *keiner* mit 2 auf. Dagegen gehen von den übrigen μ Factoren diejenigen x, für welche p von der Form $2^{\tau+2}.n+1$ ist, jeder mit $2^{\tau+2}$, zusammen also mit $2^{2x+\tau_1+\tau_2+\dots}$ auf. Von den $\mu-x$ Factoren, für welche p von der Form $4n-1$ ist, geht jeder *nur* mit 2 auf; was noch $2^{\mu-x}$ giebt. Überhaupt also ist dann φZ durch

$$35. \quad 2^{2x+\tau_1+\tau_2\dots}.2^{\mu-x} = 2^{x+\tau_1+\tau_2\dots+\mu}$$

theilbar; wie es (9.) in (III. *b.*) behauptet.

Beweis von IV. *M.* Die zu einer beliebigen Zahl Z theilerfremden Zahlen >0 und $<Z$ sind nach (§. 65. I.) immer *paarweise* vorhanden, und die Summe jedes Paares beträgt Z. Da also φZ die Anzahl der zu Z theilerfremden Zahlen ist, so ist die Zahl der vorhandenen *Paare* $= \frac{1}{2}\varphi Z$, und da jedes Paar Z beträgt, so ist die Summe aller,

$$36. \quad S\varphi Z = \tfrac{1}{2}Z.\varphi Z.$$

Dies ist der erste Ausdruck von $S\varphi Z$ (11.) im Lehrsatz. Setzt man darin $\varphi Z = n\varphi z$ aus (7.), so ergiebt sich der zweite Ausdruck (11.). Setzt man hierin $Z = nz$ aus (3.), so ergiebt sich der dritte, und setzt man darin $n = \frac{Z}{z}$ aus (3.), so ergiebt sich $S\varphi Z = \frac{1}{2}\frac{Z^2}{z^2}.z\varphi z = \frac{1}{2}Z^2.\frac{\varphi z}{z}$ und vermöge (2. und 6.) der vierte Ausdruck von $S\varphi Z$ (11.).

Für $Z = z$ ist, wie in (35.),

$$37. \quad S\varphi z = \tfrac{1}{2}z.\varphi z.$$

Dieses ist der erste Ausdruck von $S\varphi z$ in (10.). Setzt man darin die Werthe von z und φz aus (2. und 6.), so ergiebt sich der zweite.

Anm. *N.* Der *erste* Beweis von (II.), dem *Haupttheile* des gegenwärtigen Lehrsatzes, bedarf zwar (I.) nicht, aber des Lehrsatzes (§. 78.) mit seinen Vorbereitungen (§. 74. 75. 76. und 77.). Der *zweite* Beweis von (II.) dagegen bedarf aller dieser Vordersätze *nicht,* sondern nur des einfachen Satzes (§. 80.). Er ist daher bei weitem kürzer als der erste, und vielleicht der kürzeste von allen, die sich von (II.) geben lassen. Er würde deshalb insbesondere für die Elemente geeignet sein.

O. Von dem Satze (§. 78.) würde sich sogar der Ausdruck (8.) für den dortigen besondern Fall (II.) umgekehrt aus dem gegenwärtigen Satze (II. 7.) ableiten lassen. Denn zerlegt man z. B. Z (1.) in zwei beliebige zu einander *theilerfremde* Factoren, die also jeder nur *verschiedene* p enthalten dürfen,

z. B. in

$$38.\quad Z = z_1 z_2 = p_1^{e_1}.p_2^{e_2}.p_3^{e_3}\ldots.p_\varkappa^{e_\varkappa} \times p_{\varkappa+1}^{e_{\varkappa+1}}.p_{\varkappa+2}^{e_{\varkappa+2}}\ldots.p_\mu^{e_\mu},$$

so ist nach (7.)

$$39.\quad \varphi z_1 = p_1^{e_1-1}.p_2^{e_2-1}.p_3^{e_3-1}\ldots.p_\varkappa^{e_\varkappa-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots.(p_\varkappa-1),$$

$$40.\quad \varphi z_2 = p_{\varkappa+1}^{e_{\varkappa+1}-1}.p_{\varkappa+2}^{e_{\varkappa+2}-1}\ldots.p_\mu^{e_\mu-1}(p_{\varkappa+1}-1)(p_{\varkappa+2}-1)\ldots\ldots.(p_\mu-1),$$

und φz_1 (39.) mit φz_2 (40.) multiplicirt giebt nichts anderes als φZ (7.), so dafs also

$$41.\quad \varphi Z = \varphi z_1.\varphi z_2$$

ist. Auf dieselbe Weise kann man die Factoren z_1 und z_2 weiter zerlegen, und es findet sich der Ausdruck (8.) in (§. 78.).

Weiter unten werden sich noch andere Beweise von (II.) finden, die auf völlig verschiedenen Vordersätzen beruhen.

§. 82.

Lehrsatz.

Das Product P_μ *von* ν Factoren

$$1.\quad P_\mu = \begin{cases} (a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_\alpha) \\ \times(b_0+b_1+b_2+b_3+\ldots.+b_\beta) \\ \times(c_0+c_1+c_2+c_3+\ldots.+c_\gamma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times(m_0+m_1+m_2+m_3+\ldots.+m_\mu) \\ \times(n_0+n_1+n_2+n_3+\ldots.+n_\nu) \end{cases}$$

ist

I. *die Summe von Gliedern, deren jedes* ν *Factoren, und zwar aus jeder der Reihen* (1.) *nur einen Factor enthält, also nur ein* a, *nur ein* b *u. s. w. und die sämmtlich durch*

$$2.\quad a_{\alpha_1}.b_{\beta_1}.c_{\gamma_1}\ldots.m_{\mu_1}.n_{\nu_1}$$

ausgedrückt werden, wenn man in (2.) *der Reihe nach*

$$3.\quad \begin{cases} \alpha_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \alpha, \\ \beta_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \beta, \\ \gamma_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \gamma, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mu_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \mu, \\ \nu_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \nu \end{cases}$$

setzt. Keines der Glieder, welche (3. *und* 2.) *geben, fehlt, und keines kommt mehr als einmal vor.*

II. *Die Anzahl der Glieder des Products* P_μ (1.) *ist*

$$4.\quad = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\mu+1)(\nu+1).$$

Beispiel. Es sei

$$5.\quad P_\mu = (a_0+a_1+a_2)(b_0+b_1)(c_0+c_1+c_2+c_3),$$

also

$$6.\quad \mu=3,\quad \alpha=2,\quad \beta=1,\quad \gamma=3,$$

so findet sich, wenn man wirklich multiplicirt,

$$P_\mu = (a_0b_0+a_1b_0+a_2b_0+a_0b_1+a_1b_1+a_2b_1)(c_0+c_1+c_2+c_3) \text{ oder}$$

$$7.\quad P_\mu = a_0b_0c_0+a_1b_0c_0+a_2b_0c_0+a_0b_1c_0+a_1b_1c_0+a_2b_1c_0$$
$$+a_0b_0c_1+a_1b_0c_1+a_2b_0c_1+a_0b_1c_1+a_1b_1c_1+a_2b_1c_1$$
$$+a_0b_0c_2+a_1b_0c_2+a_2b_0c_2+a_0b_1c_2+a_1b_1c_2+a_2b_1c_2$$
$$+a_0b_0c_3+a_1b_0c_3+a_2b_0c_3+a_0b_1c_3+a_1b_1c_3+a_2b_1c_3.$$

Alle diese Glieder giebt (2.), wenn man darin der Reihe nach zufolge (3.) $\alpha_1=0,1,2$, $\beta_1=0,1$ und $\gamma_1=0,1,2,3$ setzt. Die Anzahl der Glieder in (7.) ist $24=3.2.4=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$; gemäfs (4.).

Beweis *A.* Man setze einen Augenblick *voraus*, das Product $P_{\nu-1}$ der ersten $\nu-1$ Reihen rechts in (1.) mit den $a, b, c, \ldots m$, also das Product *aller* Reihen (1.) *bis auf die letzte* $n_0+n_1+n_2+\ldots+n_\nu$, erfülle was der Lehrsatz in (I.) behauptet, nemlich, dafs das Product $P_{\nu-1}$ die Gesammtheit *aller* der Producte sei, welche nach (2.) hier durch

$$8.\quad a_{\alpha_1}.b_{\beta_1}.c_{\gamma_1}\ldots l_{\lambda_1}.m_{\mu_1}$$

ausgedrückt werden, wenn man in (8.) den $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots \mu_1$ die Werthe (3.) giebt; desgleichen setze man voraus, dafs kein a, b, c etc. in einem der Producte (8.) mehr als einmal vorkomme, und kein Product von denen, welche (8.) giebt, fehle und keines mehr als einmal sich zeige.

B. Multiplicirt man alsdann diese Gesammtheit der Producte (8.) noch mit der letzten Reihe $n_0+n_1+n_2+\ldots+n_\nu$, um P_ν (1.) zu finden, so sind alle die Glieder (8.) erst mit n_0, dann mit n_1, darauf mit n_2 u. s. w. bis zu n_ν zu multipliciren. Also wird auch die Gesammtheit des neuen Products P_ν durch

$$9.\quad a_{\alpha_1}.b_{\beta_1}.c_{\gamma_1}\ldots l_{\lambda_1}.m_{\mu_1}.n_{\nu_1}$$

ausgedrückt, und zwar so, dafs allen Gliedern, die (8.) giebt, noch der Factor n mit allen den Zeigern $0, 1, 2, 3, \ldots \nu$, welche ν_1 bezeichnet, hinzugefügt ist. Hier fehlt kein Product in Beziehung auf n, und keines kommt mehr als einmal vor.

Also, *wenn* der Satz für $\nu-1$ Reihen in (11.) gilt, so gilt er auch für ν Reihen.

B. Daraus folgt, dafs der Satz für $\nu-1$ Reihen gilt, und folglich nach (*A.*) für ν Reihen, wenn er für $\nu-2$ Reihen gilt; ferner für $\nu-2$ Reihen, und folglich nach (*A.*) für $\nu-1$ und ν Reihen, wenn er für $\nu-3$ Reihen gilt; u. s. w. Zuletzt also folgt, dafs der Satz für ν Reihen gilt, wenn er für $\nu-(\nu-1)=1$ Reihe gilt.

Für 1 Reihe $a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_\alpha$ aber gilt er offenbar: denn alle Glieder dieser Reihe drückt a_{α_1} (8) aus, wenn man nach (3.) der Reihe nach $\alpha_1=0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha$ setzt: also gilt (I.) für beliebige ν Reihen in P_ν wirklich.

C. Man setze, die noch unbekannte *Anzahl* der Glieder des Products $P_{\nu-1}$ der ersten $\nu-1$ Reihen in (1.) sei $=x_\mu$.

Wird dieses Product $P_{\nu-1}$ noch mit der letzten Reihe $n_0+n_1+n_2+\ldots\ldots+n_\nu$ multiplicirt, um P_ν zu finden, so ergeben sich zuerst x_μ sämmtlich verschiedene Glieder, die sämmtlich n_0 zum Factor haben; sodann x_μ andere Glieder, sämmtlich mit n_1 zum Factor; darauf x_μ andere Glieder, sämmtlich mit n_2 zum Factor u. s. w.: zusammen also, da $\nu+1$ verschiedene n vorhanden sind, $(\nu+1)x_\mu$ verschiedene Glieder. Und da nun die Anzahl der Glieder des Products P_ν durch x_ν zu bezeichnen ist, so ist

$$10.\quad x_\nu=(\nu+1)x_\mu.$$

D. Aus demselben Grunde ist, wenn man die Anzahl der Glieder des Products der $\nu-2$ ersten Reihen in (1.) durch x_λ bezeichnet,

$$11.\quad x_\mu=(\mu+1)x_\lambda,$$

was, in (10.) gesetzt,

$$12.\quad x_\nu=(\nu+1)(\mu+1)x_\lambda$$

giebt. Eben so ergiebt sich $x_\lambda=(\lambda+1)x_\varkappa$ und, in (12.) gesetzt,

$$13.\quad x_\nu=(\nu+1)(\mu+1)(\lambda+1)x_\varkappa;$$

u. s. w. Zuletzt also, da für die erste Reihe allein, $x_\alpha=\alpha+1$ ist,

$$14.\quad x_\nu=(\nu+1)(\mu+1)(\lambda+1)\ldots\ldots(\gamma+1)(\beta+1)(\alpha+1);$$

gemäfs (4.) in (II.).

§. 83.

Lehrsatz.

Wenn man für eine beliebige Zahl z,

$$1.\quad z=\varepsilon.e$$

setzt und durch e_φ *jede zu* e *theilerfremde Zahl* >0 *und* $<$ e *bezeichnet, so drückt in*

$$2.\quad x=\varepsilon.e_\varphi$$

3. x *alle die Zahlen* 1, 2, 3, 4, ... z

aus, und jede nur einmal, wenn man den ε *und* e_ν *alle die ganzzahligen Werthe beilegt, die sie haben können,* 1 *und* z *nicht ausgeschlossen.*

Beispiel. Es sei

$$4.\qquad z = 126 = 2.3^2.7,$$

so kann e nebst dem zugehörigen ε folgende Werthe haben:

$$5.\qquad e = 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9,\ 14,\ 18,\ 21,\ 42,\ 63 \text{ und } 126,$$

$$6.\qquad \varepsilon = 126,\ 63,\ 42,\ 21,\ 18,\ 14,\ 9,\ 7,\ 6,\ 3,\ 2 \text{ und } 1.$$

Die zu den verschiedenen e theilerfremden Zahlen e_ν sind folgende:

7.

Für $e =$	1	2	3	6	7	9	14	18	21	42	63			126		
$e_\nu =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	22	43	1	43	85
			2	5	2	2	3	5	2	5	2	23	44	5	47	89
					3	4	5	7	4	11	4	25	46	11	53	95
					4	5	9	11	5	13	5	26	47	13	55	97
					5	7	11	13	8	17	8	29	50	17	59	101
					6	8	13	17	10	19	10	31	52	19	61	103
									11	23	11	32	53	23	65	107
									13	25	13	34	55	25	67	109
									16	29	16	37	58	29	71	113
									17	31	17	38	59	31	73	115
									19	37	19	40	61	37	79	121
									20	41	20	41	62	41	83	125.

Multiplicirt man nun nach (2.) diese e_ν mit dem *zugehörigen* ε (6.), so ergiebt sich

8.

Für $\varepsilon =$	126	63	42	21	18	14	9	7	6	3	2			1		
$x = \varepsilon.e_\nu =$	126	63	42	21	18	14	9	7	6	3	2	44	86	1	43	85
			84	105	36	28	27	35	12	15	4	46	88	5	47	89
					54	56	45	49	24	33	8	50	92	11	53	95
					72	70	81	77	30	39	10	52	94	13	55	97
					90	98	99	91	48	51	16	58	100	17	59	101
					108	112	117	119	60	57	20	62	104	19	61	103
									66	69	22	64	106	23	65	107
									78	75	26	68	110	25	67	109
									96	87	32	74	116	29	71	113
									102	93	34	76	118	31	73	115
									114	111	38	80	122	37	79	121
									120	123	40	82	124	41	83	125;

und dieses sind, wie man sieht, *alle* die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... z, und keine kommt mehr als einmal vor.

Beweis ***A.*** Es sei n eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... z (3.). Sie wird *irgend einen* Theiler mit z gemein haben: wenn keinen andern, so den Theiler 1. Welches also auch dieser Theiler sein mag: er ist zugleich ein Theiler von z, und also einer der Werthe von ε.

B. Man nehme den *gröfsten* der Theiler, welchen n und z gemein haben. Er wird immer, als Theiler von z, durch ε bezeichnet.

Alsdann haben aber $\frac{z}{\varepsilon}$ und $\frac{n}{\varepsilon}$ weiter *keinen* Theiler >1 gemein, und sind also zu einander *theilerfremd,* während zugleich $\frac{n}{\varepsilon}>0$ und $<\frac{z}{\varepsilon}$ ist.

C. Aber $\frac{z}{\varepsilon}$ ist vermöge (1.) $=e$, und *alle* zu e *theilerfremden* Zahlen >0 und $<e$ werden durch e_φ bezeichnet. Also ist $\frac{n}{\varepsilon}$ *nothwendig eines der* e_φ.

D. Nun ist identisch

$$9.\quad n=\varepsilon.\frac{n}{\varepsilon},$$

also ist, e_φ statt $\frac{n}{\varepsilon}$ gesetzt,

$$10.\quad n=\varepsilon.e_\varphi=x\ (2.),$$

und daher *kann* x in (2.) *jede* von den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... z sein, für irgend ein e und ε. Dieses ist, was zunächst der Lehrsatz behauptet. Es *mufs* aber auch (10.) *alle* x oder n ausdrücken; denn zu *jedem beliebigen* n oder x gehört in (***B.***) irgend ein ε und folglich ein $e=\frac{z}{\varepsilon}$.

E. Gesetzt, *verschiedene* e und ε könnten in (2.) *ein- und dasselbe* x geben, z. B. es könnte

$$11.\quad \varepsilon.e_\varphi=\delta.d_\varphi$$

sein; wo $d>e$ angenommen werden mag.

Da nach (1.) $\varepsilon=\frac{z}{e}$ und $\delta=\frac{z}{d}$ ist, so ist (11.) so viel als

$$12.\quad \frac{z.e_\varphi}{e}=\frac{z.d_\varphi}{d},$$

und daraus folgt

$$13.\quad e_\varphi=\frac{e.d_\varphi}{d}.$$

Dieser Gleichung zufolge müfste also $e.d_\varphi$ mit d *aufgehen,* indem e_φ jedenfalls eine *ganze* Zahl ist. Da d_φ zu d *theilerfremd* ist und also kein Theiler von d in d_φ aufgeht, so müfste d in e *allein* aufgehen. Dies aber ist nicht der Fall, da $d>e$ vorausgesetzt wird. Also kann (13.) und folg-

lich (11.) ***nicht*** Statt finden: mithin können verschiedene e und ε ***nicht*** ein- und dasselbe x geben, und folglich drückt $\varepsilon . e_\varphi$ (2.) jedes x aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... z ***nur einmal*** aus. Dieses ist die zweite Behauptung des Lehrsatzes.

§. 84.

Lehrsatz.

Die Gesammt-Anzahl der Zahlen, welche zu allen den verschiedenen Theilern einer beliebigen Zahl z (1 ***und*** z ***nicht ausgeschlossen***) ***theilerfremd und*** >0 ***und*** $<$ ***als je die einzelnen Theiler sind, ist*** $=$ z.

Das heifst in Zeichen: wenn man alle die möglichen Theiler einer Zahl z ***durch*** $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n$ ***und die Anzahl der zu diesen Theilern theilerfremden Zahlen,*** >0 ***und*** $<$ ***als die einzelnen Theiler, durch*** $\varphi e_1, \varphi e_2, \varphi e_3, \ldots \varphi e_n$ ***bezeichnet, so ist***

$$1. \quad \varphi e_1 + \varphi e_2 + \varphi e_3 + \ldots + \varphi e_n = z.$$

Beispiel. In dem Beispiel zu (§. 83.) sind die e_φ (§. 83. 7.) die zu den verschiedenen möglichen Theilern 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63 und 126 von $z = 126$ ***theilerfremden*** Zahlen >0 und $<$ als die Theiler. Ihre ***Gesammt-Anzahl*** ist $126 = z$.

Erster Beweis. ***A.*** Nach (§. 83.) erhält man, wenn man die verschiedenen, zu den verschiedenen e theilerfremden Zahlen e_φ mit dem Theiler $\varepsilon = \frac{z}{e}$ von z multiplicirt, ***alle*** die z Zahlen 1, 2, 3, 4, ... z.

B. Gäbe es nun ***mehr*** als z verschiedene Zahlen e_φ für die verschiedenen e, so müfste es ***entweder*** Producte $\varepsilon . e_\varphi$ geben, die ***gröfser*** als z sind, ***oder*** es müfsten Producte, die ***nicht*** gröfser als z sind, ***mehr als einmal*** vorkommen. ***Ersteres*** ist nicht der Fall, da e_φ nicht gröfser als e, und $\varepsilon . e = z$, also $\varepsilon . e_\varphi$ ***nicht*** gröfser als z ist. ***Letzteres*** ist nach (§. 83.) nicht der Fall, denn $\varepsilon . e_\varphi$ giebt jedes x ***nur einmal.*** Also kann es ***nicht mehr*** als z zu den verschiedenen e theilerfremde Zahlen e_φ geben.

C. Gäbe es ***weniger*** als z Zahlen e_φ, so könnte das Product $\varepsilon . e_\varphi = x$ nicht z verschiedene Werthe haben; denn die e_φ, zu einem und demselben e, sind ***nur mit einem*** $\varepsilon = \frac{z}{e}$ zu multipliciren. Das Product $x = \varepsilon . e_\varphi$ hat aber nach (§. 83.) wirklich ***alle*** die z Werthe 1, 2, 3, 4, ... z. Also kann es auch ***nicht weniger*** als z zu den verschiedenen e theilerfremden Zahlen e_φ >0 und $<e$ geben.

Folglich mufs die Gesammt-Anzahl dieser Zahlen e_φ nothwendig ***gleich*** z sein; wie es der Lehrsatz behauptet.

Zweiter Beweis. *D.* Es werde nach (§. 21.) z durch

2. $z = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\dots m^{\mu}.n^{\nu}$

ausgedrückt, und bestimmt, dafs $a, b, c, \dots m, n$ sämmtlich *Stammzahlen* sein sollen. Alsdann wird durch

3. $e = a^{\alpha_1}.b^{\beta_1}.c^{\gamma_1}\dots m^{\mu_1}.n^{\nu_1}$

jeder mögliche Theiler e von z ausgedrückt, wenn man der Reihe nach

$$4.\quad \begin{cases} \alpha_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots \alpha, \\ \beta_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots \beta, \\ \gamma_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots \gamma, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots \mu, \\ \nu_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots \nu \end{cases}$$

setzt. Denn e in (3.) drückt alsdann alle möglichen Potenzen der Stammzahlen $a, b, c, \dots n$ von 0 an bis $\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$ und ihre Producte aus; und nur diese und die keiner andern Zahlen gehen in z auf.

E. Nun ist nach (§. 81. 7.) die *Anzahl* der zu e (3.) *theilerfremden* Zahlen >0 und $<e$:

5. $\varphi e = a^{\alpha_1-1}(a-1).b^{\beta_1-1}(b-1).c^{\gamma_1-1}(c-1)\dots m^{\mu_1-1}(m-1).n^{\nu_1-1}(n-1)$.

Giebt man also hier den $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots \mu_1, \nu_1$ alle die Werthe (4.), so drückt (5.) die *Anzahl* der zu *allen* Theilern e von z *theilerfremden* Zahlen >0 und $<e$ aus.

F. Dabei ist jedoch zu beobachten, dafs für den Werth *Null* von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots \nu_1$ in (5.) für $a^{\alpha_1-1}(a-1)$, $b^{\beta_1-1}(b-1)$ etc. *nicht* $a^{-1}(a-1)$, $b^{-1}(b-1)$ etc. gesetzt werden mufs, sondern blofs 1. Denn wenn z. B. $\alpha_1=0$ ist, so ist in (3.) $a^{\alpha_1}=a^0=1$ und a ist dann in den hierauf sich beziehenden Theilern e von z (3.) *gar nicht vorhanden*, also auch nicht in φe (5.), und es mufs folglich für $\alpha_1=0$ in (5.) statt $a^{\alpha_1-1}(a-1)$ blofs 1 geschrieben werden.

G. Nun bezeichne man die Werthe

$$6.\quad \begin{cases} \text{von } a^{\alpha_1-1}(a-1) \text{ für } \alpha_1=0,1,2,3,\dots \alpha \text{ durch } a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_{\alpha}, \\ \text{von } b^{\beta_1-1}(b-1) \text{ für } \beta_1=0,1,2,3,\dots \beta \text{ durch } b_0, b_1, b_2, b_3, \dots b_{\beta}, \\ \text{von } c^{\gamma_1-1}(c-1) \text{ für } \gamma_1=0,1,2,3,\dots \gamma \text{ durch } c_0, c_1, c_2, c_3, \dots c_{\gamma}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{von } m^{\mu_1-1}(m-1) \text{ für } \mu_1=0,1,2,3,\dots m \text{ durch } m_0, m_1, m_2, m_3, \dots m_{\mu}, \\ \text{von } n^{\nu_1-1}(n-1) \text{ für } \nu_1=0,1,2,3,\dots n \text{ durch } n_0, n_1, n_2, n_3, \dots n_{\nu}. \end{cases}$$

Alsdann drückt φe (5.) ***alle möglichen*** Producte von $a_0, a_1, a_2, \ldots. a_\alpha$, $b_0, b_1, b_2, \ldots. b_\beta$ u. s. w. aus, unter der Bedingung, dafs jedes dieser Producte ein a, ein b, ein c, ..., ein m und ein n, und ***nur*** eines enthalte.

H. Die ***Gesammtheit*** oder die Summe aller dieser Producte ist nach (§. 82.), unter der ***gleichen*** Bedingung,

$$7. \quad \begin{cases} = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots. + a_\alpha) \\ \times (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \ldots. + b_\beta) \\ \times (c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \ldots. + c_\gamma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times (m_0 + m_1 + m_2 + m_3 \ldots. + m_\mu) \\ \times (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \ldots. + n_\nu), \end{cases}$$

und dieses ***Product*** ist also die ***Summe*** aller der möglichen Werthe, welche φe (5.) haben kann, mithin die ***Summe der Anzahl*** der zu ***allen möglichen*** Theilern e von z theilerfremden Zahlen >0 und $<e$, folglich das Nemliche, was in (1.) durch $\varphi e_1 + \varphi e_2 + \varphi e_3 \ldots. + \varphi e_n$ bezeichnet wurde.

I. Setzt man nun in den Ausdruck (7.) die Werthe der a, der b, der c u. s. w. aus (6.), mit der Berücksichtigung, dafs nach (*F.*) $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$, ... $m_0 = 1$, $n_0 = 1$ ist, so ergiebt sich

$$8. \quad \begin{cases} \varphi e_1 + \varphi e_2 + \varphi e_3 \ldots.. + \varphi e_n \\ = (1 + (a-1) + a^1(a-1) + a^2(a-1) \ldots. + a^{\alpha-1}(a-1)) \\ \times (1 + (b-1) + b^1(b-1) + b^2(b-1) \ldots. + b^{\beta-1}(b-1)) \\ \times (1 + (c-1) + c^1(c-1) + c^2(c-1) \ldots. + c^{\gamma-1}(c-1)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times (1 + (m-1) + m^1(m-1) + m^2(m-1) \ldots. + m^{\mu-1}(m-1)) \\ \times (1 + (n-1) + n^1(n-1) + n^2(n-1) \ldots. + n^{\nu-1}(n-1)). \end{cases}$$

K. Es ist aber z. B. die ***erste*** Reihe rechts in (8.)

$$9. \quad \begin{cases} 1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) \ldots. + a^{\alpha-2}(a-1) + a^{\alpha-1}(a-1) \\ = 1 + a + a^2 + a^3 \ldots. + a^{\alpha-1} + a^\alpha \\ \quad - 1 - a - a^2 - a^3 \ldots. - a^{\alpha-1} \\ = a^\alpha. \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise ist die ***zweite*** Reihe rechts in (8.) $= b^\beta$, die dritte $= c^\gamma$ u. s. w. Also giebt (8.)

$$10. \quad \varphi e_1 + \varphi e_2 + \varphi e_3 \ldots + \varphi e_n = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots. m^\mu . n^\nu,$$

und vermöge (2.)

$$11. \quad \varphi e_1 + \varphi e_2 + \varphi e_3 \ldots. + \varphi e_n = z;$$

gemäfs (1.) im Lehrsatz.

Dritter Beweis. *K.* Man berücksichtige zuerst den ***einzigen*** Theiler

$$12. \quad \varepsilon = b^{\beta_1}.c^{\gamma_1}\dots.m^{\mu_1}.n^{\nu_1}$$

von z in (3.), für einen *festen*, ***bestimmten*** Werth der Exponenten $\beta_1, \gamma_1, \dots \dots \mu_1, \nu_1$: so ist die Anzahl der zu demselben theilerfremden Zahlen >0 und $<\varepsilon$ nach (5.)

$$13. \quad \varphi\varepsilon = b^{\beta_1-1}(b-1).c^{\gamma_1-1}(c-1)\dots.m^{\mu_1-1}(m-1).n^{\nu_1-1}(n-1).$$

L. Nun erhalte dieser Theiler ε noch den Factor a, so ist nach (5.)

$$14. \quad \varphi(\varepsilon a) = (a-1).b^{\beta_1-1}(b-1).c^{\gamma_1-1}(c-1)\dots.m^{\mu_1-1}(m-1).n^{\nu_1-1}(n-1) = (a-1)\varphi\varepsilon.$$

Bekommt der Theiler ε statt a den Factor a^2, so ist nach (5.)

$$15. \quad \varphi(\varepsilon a^2) = a(a-1).b^{\beta_1-1}(b-1).c^{\gamma_1-1}(c-1)\dots.m^{\mu_1-1}(m-1).n^{\nu_1-1}(n-1) = a(a-1)\varphi\varepsilon.$$

Bekommt ε den Factor a^3, so ist nach (5.)

$$16. \quad \varphi(\varepsilon a^3) = a^2(a-1).b^{\beta_1-1}(b-1).c^{\gamma_1-1}(c-1)\dots.m^{\mu_1-1}(m-1).n^{\nu_1-1}(n-1) = a^2(a-1)\varphi\varepsilon.$$

Setzt man so weiter dem Theiler ε der Reihe nach die Factoren $a^4, a^5, a^6, \dots. a^\alpha$ zu, immer für ***einen und denselben bestimmten*** Werth der Exponenten β_1, $\gamma_1, \delta_1, \dots. \mu_1, \nu_1$, so ergiebt sich aus (13. 14. 15. etc.) zusammen für die ***Summe*** der Anzahl der theilerfremden Zahlen zu allen ***denjenigen*** Theilern ε von z (3.), welche *sämmtlich* den ***einen bestimmten*** Factor $b^{\beta_1}.c^{\gamma_1}.\dots m^{\mu_1}.n^{\nu_1}$ und dabei der Reihe nach noch die Factoren $a^0, a^1, a^2, a^3, \dots. a^\alpha$ haben,

$$17. \quad \begin{cases} \varphi\varepsilon+\varphi(\varepsilon a)+\varphi(\varepsilon a^2)+\varphi(\varepsilon a^3)\dots.+\varphi(\varepsilon a^\alpha) \\ =[1+a-1+a(a-1)+a^2(a-1)+a^3(a-1)\dots.+a^{\alpha-2}(a-1)+a^{\alpha-1}(a-1)]\varphi\varepsilon \\ =\left\{\begin{matrix} 1+a+a^2+a^3+a^4\dots.+a^{\alpha-1}+a^\alpha \\ -1-a-a^2-a^3-a^4\dots.-a^{\alpha-1} \end{matrix}\right\}\varphi\varepsilon \\ = a^\alpha.\varphi\varepsilon. \end{cases}$$

M. Für *jeden* der Theiler

$$18. \quad \varepsilon = b^{\beta_1}.c^{\gamma_1}\dots.m^{\mu_1}.n^{\nu_1}$$

von z, für einen ***festen bestimmten*** Werth von $\beta_1, \gamma_1, \dots. \mu_1, \nu_1$ beträgt also, wenn man dem ε der Reihe nach die Factoren $a^0, a^1, a^2, \dots. a^\alpha$ hinzufügt, die Summe der alsdann zu diesen ***verschiedenen*** Theilern von z theilerfremden Zahlen das ***a^αfache*** der Anzahl $\varphi\varepsilon$ der zu ε ***selbst*** theilerfremden Zahlen.

N. Dieses gilt nun gleichmäfsig von ***jedem*** der Theiler ε (12.), die man erhält, wenn man den $\beta_1, \gamma_1, \dots. \mu_1, \nu_1$ immer ***andere,*** und alle diejenigen Werthe (3.) beilegt, welche sie haben können. Immer ist für jedes ε

die Zahl $\varphi\varepsilon$ der zu ihm theilerfremden Zahlen a^α mal so grofs, so wie man dem ε nach der Reihe nach alle die Factoren $a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots a^\alpha$ zusetzt. Also, da das *Gleiche* von *jedem* ε und seinem $\varphi\varepsilon$ gilt, so gilt es auch von der *Summe* der $\varphi\varepsilon$, die durch $S\varphi\varepsilon$ bezeichnet werden mag.

O. Man erhält aber, wenn man allen den möglichen Werthen, die ε (12.) haben kann, *jedem* noch die Factoren $a^0, a^1, a^2, \ldots a^\alpha$ zusetzt, *alle möglichen* Werthe, *die e in* (3.) *haben kann,* also *alle möglichen* Theiler von z.

Daraus folgt, dafs sich, wenn man $S\varphi\varepsilon$ mit a^α *multiplicirt,* die Summe der Anzahl der zu *allen möglichen Theilern von z* theilerfremden Zahlen, welche durch $S\varphi e$ zu bezeichnen ist, ergeben mufs. Und folglich ist

$$19.\qquad S\varphi e = a^\alpha S\varphi\varepsilon.$$

P. So wie nun, wenn man von den e (3.) erst a ausschliefst, e dadurch auf ε (18.) reducirend, $S\varphi e = a^\alpha S\varphi\varepsilon$ ist (19.), so ist auch nothwendig, wenn man von den ε (12.) b ausschliefst und das dadurch reducirte ε etwa durch ε_1 bezeichnet,

$$20.\qquad S\varphi\varepsilon = b^\beta S\varphi\varepsilon_1;$$

und weiter, wenn man von den ε_1, c ausschliefst und ε_2 statt ε_1 schreibt, ferner d von ε_2, und ε_3 statt ε_2 schreibt u. s. w.

$$21.\qquad \begin{cases} S\varphi\varepsilon_1 = c^\gamma S\varphi\varepsilon_2, \\ S\varphi\varepsilon_2 = d^\delta S\varphi\varepsilon_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S\varphi\varepsilon_{\mu-2} = m^\mu S\varphi\varepsilon_{\mu-1}. \end{cases}$$

Dieses giebt, (21.) in einander, dann in (20.) und dies zuletzt in (19.) substituirt,

$$22.\qquad S\varphi e = a^\alpha.b^\beta.c^\gamma.d^\delta\ldots m^\mu S\varphi\varepsilon_{\mu-1}.$$

Q. Nachdem $a, b, c, d, \ldots m$ in e (3.) ausgeschlossen sind, bleibt aber für $\varepsilon_{\mu-1}$ blofs noch n^ν übrig, und die Summe $S\varphi\varepsilon_{\mu-1}$ der $S\varphi n^\nu$, der Anzahl der zu den verschiedenen Theilern $n^0, n^1, n^2, n^3, \ldots n^\nu$ von n^ν theilerfremden Zahlen ist nach (5.)

$$23.\qquad \begin{cases} 1+n-1+n(n-1)+n^2(n-1)+n^3(n-1)\ldots+n^{\nu-2}(n-1)+n^{\nu-1}(n-1) \\ \qquad = 1+n+n^2+n^3\ldots+n^{\nu-1}+n^\nu \\ \qquad\ -1-n-n^2+n^3\ldots-n^{\nu-1} \\ \qquad = n^\nu: \end{cases}$$

also ist schliefslich in (22.)

$$24.\qquad S\varphi e = a^\alpha.b^\beta.c^\gamma.d^\delta\ldots m^\mu.n^\nu,$$

und dies giebt vermöge (2.)

$$25.\qquad S\varphi e = z;$$

das heifst: die Summe der Anzahl der zu allen möglichen Theilern e von z theilerfremden Zahlen ist $=z$; wie es der Lehrsatz behauptet.

Anm. 1. *R.* Der *zweite* Beweis bedarf des Satzes (§. 81.), mit seinem Vorgänger (§. 78.) und den Vorgängern (§. 74. 75. 76. und 77.) von diesem; auch aufserdem noch des Satzes (§. 82.). Der *dritte* Beweis bedarf zwar (§. 82.) nicht, aber eben so der übrigen. Der *erste* Beweis dagegen bedarf *blofs* des Satzes (§. 83.) und dürfte daher der einfachste und am besten für die Elemente geeignet sein.

Anm. 2. *S.* Nach (§. 63.) ist für jede *Stammzahl* p die Anzahl der Stammwurzeln für einen beliebigen Theiler δ von $p-1$, 1 und $p-1$ selbst eingeschlossen, der Anzahl der zu δ *theilerfremden* Zahlen gleich; zu jedem andern Theiler δ gehören andere Stammwurzeln, und alle zusammen sind die sämmtlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots . p-1$, und jede nur einmal. Darin liegt also ebenfalls ein Beweis, dafs die Summe der Anzahl der zu allen verschiedenen Theilern von $p-1$ theilerfremden Zahlen der Zahl $p-1$ selbst gleich ist. Aber dieser Beweis pafst *nur* auf Zahlen $p-1$, für welche p eine *Stammzahl* ist: die obigen Beweise gelten allgemein für *jede beliebige* Zahl z.

(Die Fortsetzung folgt.)

5.

Theorema.

(Auct. *Gotth. Eisenstein,* Stud. phil. Berol.)

Invenit Vir Clarissimus *Gauss* aequalitatem inter duas expressiones abstrusiores hancce

$$1+x+x^3+x^6+x^{10}+\text{etc.} = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^7}\ \text{etc.}$$

Non minus memorabilis videatur ejusdem seriei evolutio sequens

$$1+x+x^3+x^6+x^{10}+\text{etc.} = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2-x}{1-\cfrac{x^3}{1-\cfrac{x^4-x^2}{1-\cfrac{x^5}{1-\cfrac{x^6-x^3}{1-\cfrac{x^7}{1-\cfrac{x^8-x^4}{1-\text{etc.}}}}}}}}}},$$

vel haec

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{10}}+\text{etc.} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{z-\cfrac{1-z}{z-\cfrac{1}{z^2-\cfrac{1-z^2}{z^2-\cfrac{1}{z^3-\cfrac{1-z^3}{z^3-\cfrac{1}{z^4-\cfrac{1-z^4}{z^4-\text{etc.}}}}}}}}}},$$

quarum altera ad valores ipsius x, qui sint minores quam 1, altera ad valores ipsius z, qui sint majores quam 1, restringi debet. Leges harum formularum sunt obviae. — Adjicere liceat formulam generaliorem:

$$\frac{(1-x)(1-px)(1-p^2x)\ldots.\ \text{in inf.}}{(1-y)(1-py)(1-p^2y)\ldots.\ \text{in inf.}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{x-y}{1-p+\cfrac{py-x}{1+p+\cfrac{p^2x-py}{1-p^3+\cfrac{p^3y-px}{1+p^2+\cfrac{p^4x-p^2y}{1-p^5+\text{etc.}}}}}}}$$

Quae formula valet conditionibus:

$N(p)<1$, $N(y)<1$, sive etiam conditionibus his:
$N(p)>1$, $N(x)<N(p)$.

Crelle Journal d. Math. Bd. XXIV. Heft 1.

Fac-simile einer Handschrift von Tycho de Brahe

Medullas non cortices

Tycho Brahe
scripsit A° 1592
den 8 Julij
Uranibergi

6.

Beweis des Satzes, dafs jede algebraische rationale ganze Function von einer Veränderlichen in Factoren vom ersten Grade aufgelöset werden kann.

(Von Herrn Professor *v. Staudt* in Erlangen.)

---

1. **D**ieser Beweis, dessen Hauptmomente aus der bekannten Abhandlung: „Demonstratio nova altera etc. Auctore *Gaufs*, Göttingae 1816." entnommen sind, setzt nur die allerersten Sätze aus der Lehre von den ganzen Functionen voraus. Unter einer Function ist hier immer eine algebraische rationale Function zu verstehen, und die Ausdrücke A_1, A_2, A_3, ... A_n bezeichnen immer diejenigen symmetrischen ganzen Functionen von den Unbestimmten a_1, a_2, a_3, ... a_n, welche die Gleichung

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\dots(x+a_n) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \dots + A_n$$

zu einer identischen Gleichung machen.

2. Das höchste Glied einer vollständig entwickelten und reducirten symmetrischen Function von den Unbestimmten a_1, a_2, a_3, ... a_n kann immer auf die Form $La_1^{\lambda_1}(a_1a_2)^{\lambda_2}(a_1a_2a_3)^{\lambda_3}\dots(a_1a_2a_3\dots a_n)^{\lambda_n}$ gebracht werden, wo λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n nicht negative ganze Zahlen sind.

Von zwei Gliedern der Function heifst nämlich dasjenige das höhere, in welchem die erste von den Unbestimmten a_1, a_2, a_3, ... a_n, welche nicht in beiden denselben Exponenten hat, zu einer höhern Potenz erhoben ist. Ist also $La_1^{l_1}a_2^{l_2}a_3^{l_3}\dots a_n^{l_n}$ das höchste Glied der Function, so kann keiner von den Exponenten l_1, l_2, l_3, ... l_n gröfser als der vorhergehende sein, weil, wenn z. B. $l_3 > l_2$ wäre, das Glied $La_1^{l_1}a_2^{l_3}a_3^{l_2}\dots a_n^{l_n}$ der symmetrischen Function höher als das erstere sein würde. Setzt man nun $l_1 - l_2 = \lambda_1$, $l_2 - l_3 = \lambda_2$, etc. $l_{n-1} - l_n = \lambda_{n-1}$, $l_n = \lambda_n$, so folgt der Satz.

3. Jede symmetrische ganze Function U von den Unbestimmten a_1, a_2, a_3, ... a_n kann auf die Form $f(A_1, A_2, A_3, \dots A_n)$ gebracht werden, wo $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n)$ eine ganze Function von den Unbestimmten α_1, α_2, α_3, ... α_n ist.

Es sei $La_1^{\lambda_1}(a_1a_2)^{\lambda_2}(a_1a_2a_3)^{\lambda_3}\dots(a_1a_2a_3\dots a_n)^{\lambda_n}$ das höchste Glied der Function U, so ist der Rest $U - LA_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}A_3^{\lambda_3}\dots A_n^{\lambda_n}$ entweder iden-

tisch Null, oder eine symmetrische ganze Function, deren höchstes Glied $Ma_1^{\mu_1}(a_1a_2)^{\mu_2}(a_1a_2a_3)^{\mu_3}\dots(a_1a_2a_3\dots a_n)^{\mu_n}$ niedriger ist als das höchste Glied von U. Bildet man im letztern Falle den Rest $U-LA_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}A_3^{\lambda_3}\dots A_n^{\lambda_n}-MA_1^{\mu_1}A_2^{\mu_2}A_3^{\mu_3}\dots A_n^{\mu_n}$, so ist entweder derselbe identisch Null, oder sein höchstes Glied ist noch niedriger als das höchste Glied des vorigen Restes. Fährt man so fort, so mufs einmal ein Rest $U-LA_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}A_3^{\lambda_3}\dots A_n^{\lambda_n}-MA_1^{\mu_1}A_2^{\mu_2}A_3^{\mu_3}\dots A_n^{\mu_n}-$ etc. sich ergeben, welcher identisch Null ist, so dafs also, wenn

$$L\alpha_1^{\lambda_1}\alpha_2^{\lambda_2}\alpha_3^{\lambda_3}\dots\alpha_n^{\lambda_n}+M\alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2}\alpha_3^{\mu_3}\dots\alpha_n^{\mu_n}+\text{etc.}=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n)$$

gesetzt wird, $U=f(A_1,A_2,A_3,\dots A_n)$ eine identische Gleichung ist.

Wenn in den Ausdrücken L, M etc. die Veränderliche x vorkommt, so dafs U auch von ihr eine ganze Function ist, so ist offenbar auch $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n)$ eine ganze Function von x, und zwar von demselben Grade wie U.

4. Wenn die ganze Function $F(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n)$ von den Unbestimmten $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n$ nicht identisch Null ist, so ist auch die symmetrische ganze Function $F(A_1,A_2,A_3,\dots A_n)$ von den Unbestimmten $a_1,a_2,a_3,\dots a_n$ nicht identisch Null.

Da nämlich die Function $F(a_1,a_1a_2,a_1a_2a_3,\dots a_1a_2a_3\dots a_n)$ durch die Substitutionen $a_1=\alpha_1$, $a_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $a_3=\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$ etc. in die Function $F(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n)$ übergeht, und diese nicht identisch Null ist, so ist auch die erstere nicht identisch Null. Bemerkt man nun noch, dafs das höchste Glied der erstern auch in der Function $F(A_1,A_2,A_3,\dots A_n)$ als höchstes Glied vorkommt, so folgt der Satz.

5. Wenn U eine symmetrische ganze Function von den Unbestimmten $a_1,a_2,a_3,\dots a_n$ ist, so giebt es nur eine ganze Function von den Unbestimmten $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n$, welche durch die Substitutionen $\alpha_1=A_1$, $\alpha_2=A_2$, $\alpha_3=A_3$ etc. in U übergeht.

Man nehme an, dafs sowohl die Function $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n)$, als auch die Function $f'(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n)$ die erwähnte Eigenschaft habe, so ist $f(A_1,A_2,A_3,\dots A_n)-f'(A_1,A_2,A_3,\dots A_n)$, und folglich nach dem vorigen Satze auch $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n)-f'(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\dots\alpha_n)$ identisch Null.

6. Wenn φx eine ganze Function von den Unbestimmten x, a_1, a_2, $a_3,\dots a_n$ ist, so giebt es für jedes positive r, welches nicht gröfser als n ist, eine andere ganze Function $\psi_r(x)$ von denselben Unbestimmten, welche in Hinsicht auf x von einem niedrigeren Grade als φx und überdies so be-

schaffen ist, dafs

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots.(x+a_r)\psi_r(x)-\varphi a_1.\varphi a_2.\varphi a_3\ldots.\varphi a_r$$

durch $\varphi(-x)$ sich theilen läfst.

Man setze

$$\frac{\varphi a_1-\varphi(-x)}{x+a_1}=\psi_1(x),$$

$$\frac{\psi_1(x).\varphi a_2-\psi_1(-a_2).\varphi(-x)}{x+a_2}=\psi_2(x),$$

$$\frac{\psi_2(x).\varphi a_3-\psi_2(-a_3).\varphi(-x)}{x+a_3}=\psi_3(x),$$

. . . .

so sind nach einem bekannten Satze $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ etc. ganze Functionen von x, a_1, a_2, a_3 etc., und zwar in Hinsicht auf x von einem niedrigern Grade als φx. Wenn man nun von den obigen Gleichungen die erste mit $(x+a_1).\varphi a_2.\varphi a_3\ldots.\varphi a_r$, die zweite mit $(x+a_1)(x+a_2).\varphi a_3\ldots.\varphi_r$, etc., die $r$te mit $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots.(x+a_r)$ multiplicirt und alsdann addirt, so folgt der obige Satz.

7. Wenn φx das Product $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots.(x+a_n)$ bezeichnet, so giebt es eine andere ganze Function ψx von den Unbestimmten x, a_1, a_2, a_3, ... a_n, welche in Hinsicht auf die n letztern ebenfalls symmetrisch, in Hinsicht auf x aber von einem niedrigern Grade als φx und überdies so beschaffen ist, dafs

$$\varphi x.\psi(-x)+\varphi(-x).\psi(x)=\varphi a_1.\varphi a_2.\varphi a_3\ldots.\varphi a_n$$

eine identische Gleichung ist.

Nach dem vorigen Satze kann man nämlich eine ganze Function $\psi_n(x)$ von den Unbestimmten x, a_1, a_2, a_3, ... a_n finden, so dafs $\psi_n(x)$ in Hinsicht auf x von einem niedrigern Grade als φx, und $\varphi x.\psi_n(x)-\varphi a_1.\varphi a_2.\varphi a_3\ldots.\varphi a_n$ durch $\varphi(-x)$ theilbar ist. Bezeichnet man den Quotienten, welcher in Hinsicht auf x offenbar ebenfalls von einem niedrigern Grade als φx ist, durch $-\psi(x)$, so hat man die identische Gleichung

$$\varphi x.\psi_n(x)+\varphi(-x).\psi x=\varphi a_1.\varphi a_2.\varphi a_3\ldots.\varphi a_n,$$

aus welcher, wenn $-x$ statt x gesetzt und alsdann subtrahirt wird, die identische Gleichung

$$\varphi x.(\psi_n(x)-\psi(-x))+\varphi(-x).(\psi x-\psi_n(-x))=0$$

hervorgeht. Da aber, im Fall für x irgend eine der Unbestimmten a_1, a_2, a_3, ... a_n gesetzt wird, $\varphi(-x)$ Null, hingegen φx nicht Null wird, so mufs $\psi_n(x)-\psi(-x)$ für jeden der erwähnten Werthe von x Null werden, und

also $\psi_n(x)$ mit $\psi(-x)$ identisch sein. Man hat demnach die identische Gleichung

$$\varphi x.\psi(-x)+\varphi(-x).\psi(x) = \varphi a_1.\varphi a_2.\varphi a_3 \ldots. \varphi a_n.$$

Nimmt man nun an, dafs ψx in $\psi' x$ übergehe, wenn zwei der Unbestimmten $a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n$, etwa a_1 und a_2, mit einander vertauscht werden, so ist auch

$$\varphi x.\psi'(-x)+\varphi(-x)\psi' x = \varphi a_1.\varphi a_2.\varphi a_3 \ldots. \varphi a_n$$

und also auch

$$\varphi x.(\psi(-x)-\psi'(-x))+\varphi(-x)(\psi x-\psi' x) = 0$$

eine identische Gleichung; woraus man schliefsen darf, dafs $\psi' x$ mit ψx identisch ist, und dafs also die Unbestimmten $a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n$ in ψx symmetrisch vorkommen.

8. Wenn das Product $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots.(x+a_n)$ wieder durch φx und das Product $(2x+a_1+a_2)(2x+a_1+a_3)(2x+a_2+a_3)$ etc. aus den $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Factoren, deren jeder von zwei Factoren des erstern Products die Summe ist, durch $f(x)$ bezeichnet wird, so giebt es eine ganze Function $\psi(u, x)$ von den Unbestimmten $u, x, a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n$, welche in Hinsicht auf die n letztern ebenfalls symmetrisch, in Hinsicht auf x aber von einem niedrigern Grade als φx und überdies so beschaffen ist, dafs

$$\varphi(u+x).\psi(u, -x)+\varphi(u-x).\psi(u, x) = 2^n.fu.fu.\varphi u$$

eine identische Gleichung ist.

Es folgt dieser Satz unmittelbar aus dem vorigen, wenn man daselbst a_1+u, a_2+u, a_3+u, etc. statt a_1, a_2, a_3 etc. setzt, und die Function, in welche dadurch ψx übergeht, durch $\psi(u, x)$ bezeichnet. Zu bemerken ist noch, dafs das erste Glied der Function fu, wenn dieselbe nach absteigenden Potenzen von u entwickelt wird, $=(2u)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ ist.

9. Wenn φx die ganze Function $x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2}+\alpha_3 x^{n-3}\ldots.+\alpha_n$ von den Unbestimmten $x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \alpha_n$ bezeichnet, wo $n>1$ vorausgesetzt wird, so giebt es eine andere ganze Function fx von denselben Unbestimmten, deren höchstes Glied $(2x)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ ist, und eine ganze Function $\psi(u, x)$ von den Unbestimmten $u, x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \alpha_n$, welche in Hinsicht auf x von einem niedrigern Grade als φx ist, so dafs

$$\varphi(u+x).\psi(u, -x)+\varphi(u-x).\psi(u, x) = 2^n fu.fu.\varphi u$$

eine identische Gleichung ist.

Da nämlich diese Gleichung eine identische ist, wenn φ, f, ψ die vorigen Functionen (8.) bedeuten, so mufs sie nach 4. auch eine identische Gleichung sein, wenn φ, f, ψ diejenigen ganzen Functionen sind, welche durch die Substitutionen $\alpha_1 = A_1, \alpha_2 = A_2, \alpha_3 = A_3$ etc. in die vorigen übergehen.

Durch diese Substitutionen wird aber (4.) von keiner der Functionen der Grad in Hinsicht auf x ein anderer.

10. Wenn X, Y, Z drei ganze Functionen von x sind, und das Product XY aus den beiden erstern durch die dritte theilbar, die zweite aber durch die dritte nicht theilbar ist, so müssen die erste und dritte einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Es sei T der höchste gemeinschaftliche Theiler von XY und ZY, so dafs also T durch jeden andern gemeinschaftlichen Theiler dieser beiden Functionen und namentlich durch Y und Z theilbar ist. Da nun Y durch Z nicht theilbar, hingegen $\frac{T}{Y}.Y$ durch Z theilbar ist, so kann $\frac{T}{Y}$ keine von x unabhängige Constante sein, und mithin haben $\frac{XY}{T}.\frac{T}{Y}$ und $\frac{ZY}{T}.\frac{T}{Y}$ oder, was Dasselbe ist, X und Z einen gemeinschaftlichen Theiler $\frac{T}{Y}$.

Aus der Art und Weise, wie der höchste gemeinschaftliche Theiler von zwei ganzen Functionen gefunden wird, geht hervor, dafs die imaginäre Einheit i, wenn sie in keiner von den beiden Functionen vorkommt, auch in ihrem höchsten gemeinschaftlichen Theiler nicht vorkomme, vorausgesetzt, dafs nicht alle Glieder desselben mit einer und derselben imaginären Constante multiplicirt werden.

11. Zu einer jeden ganzen Function φx von x, deren Grad durch die Zahl $n > 1$ ausgedrückt wird, läfst sich eine ganze Function fu von u finden, welche vom Grade $\frac{1}{2}n(n-1)$ und so beschaffen ist, dafs für jeden Werth von u, für welchen fu Null wird, die Functionen $\varphi(u+x)$ und $\varphi(u-x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Wenn nämlich in 9. statt der Unbestimmten α_1, α_2, α_3 etc. bestimmte Gröfsen k_1, k_2, k_3 etc. gesetzt werden, und nun die Function fu für $u = h$ Null wird, so ist $\varphi(h+x).\psi(h, -x)$ durch $\varphi(h-x)$ theilbar. Da aber $\psi(h, -x)$ von einem niedrigern Grade als $\varphi(x)$ und also durch $\varphi(h-x)$ nicht theilbar ist, so müssen nach dem vorigen Satze $\varphi(h+x)$ und $\varphi(h-x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Bezeichnet man den höchsten gemeinschaftlichen Theiler dieser beiden Functionen durch $\vartheta(x)$, so mufs, weil auch $\vartheta(-x)$ ein gemeinschaftlicher Theiler derselben ist, $\vartheta(x)$ durch $\vartheta(-x)$ theilbar und also $\vartheta(x)$ entweder von der Form $xF(x^2)$ oder von der Form $F(x)$ sein, wo $F(x)$ eine ganze Function von x bezeichnet.

12. Die Zahl, welche den Grad einer Gleichung oder einer ganzen Function ausdrückt, kann immer auf die Form $(2p+1).2^q$ gebracht werden,

wo p, q nicht negative ganze Zahlen sind. Wenn nun r eine bestimmte positive ganze Zahl bedeutet, und jede Gleichung, in welcher q kleiner als r ist, sich auflösen läfst, so kann auch, weil überdies jede quadratische Gleichung auflösbar ist, jede Gleichung $\varphi x = 0$, in welcher $q = r$ ist, aufgelöset werden.

Wenn nämlich im Vorigen n durch 2^r, aber nicht durch 2^{r+1} theilbar ist, so ist $\frac{1}{2}n(n-1)$ durch 2^r nicht theilbar und also der Annahme gemäfs eine Auflösung der Gleichung $fu = 0$ möglich. Es sei h eine Wurzel dieser Gleichung und $\vartheta(x)$ der höchste gemeinschaftliche Theiler von $\varphi(h+x)$ und $\varphi(h-x)$. Hat nun $\vartheta(x)$ die Form $xF(x^2)$, so ist h eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$. Ist aber $\vartheta(x)$ von der Form $F(x^2)$ und q in $F(x)$ kleiner als r, so darf man nur zuerst eine Wurzel c der Gleichung $F(x) = 0$ und alsdann eine Wurzel c_1 der Gleichung $x^2 = c$ suchen, um eine Wurzel $h + c_1$ der Gleichung $\varphi x = 0$ zu erhalten. Wenn endlich $\vartheta(x)$ die Form $F(x^2)$ hat, aber q in Fx nicht kleiner und also in $\vartheta(x)$ gröfser als r ist, so nehme man statt der Gleichung $\varphi x = 0$ die einfachere Gleichung $\frac{\varphi x}{\vartheta(x)} = 0$, in welcher in diesem Falle q ebenfalls gleich r ist. Indem man so, das angegebene Verfahren wiederholend, fortfährt, mufs man einmal auf eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ kommen. Zu bemerken ist noch, dafs, wenn φx eine reelle Function ist, Dasselbe auch von fu, und, wenn überdies h reell ist, auch von ϑx gilt.

13. Setzt man im Vorigen für r nach und nach die Werthe 1, 2, 3, etc., so folgt, dafs jede Gleichung von der Form

$$X + X_1 i = 0,$$

wo X, X_1 reelle ganze Functionen von x sind, von welchen jedoch die eine auch auf eine Constante oder auf Null sich reduciren kann, auflösbar sei, wenn jede solche Gleichung von unpaarem Grade sich auflösen läfst. Da nun die Gleichung $f(x) = 0$ oder $fu = 0$, wenn ihre linke Seite eine reelle Function von unpaarem Grade ist, bekanntlich wenigstens eine reelle Auflösung zuläfst, und daher auch die Gleichung $\varphi x = 0$, wenn ihre linke Seite eine reelle Function von unpaarmal paarem Grade ist, aufgelöset werden kann, so lassen sich auch, wenn $X + X_1 i$ von unpaarem Grade ist, ein Paar Wurzeln $a \pm bi$ der Gleichung $X^2 + X_1^2 = 0$ finden, von welchen wenigstens die eine dem Factor $X + X_1 i$ angehören mufs, weil, wenn für $x = a + bi$, $X - X_1 i$ Null wird, alsdann durch die Substitution $x = a - bi$ der Gleichung $X + X_1 i = 0$ Genüge geschieht. Der im Anfange dieser Abhandlung ausgesproche Satz ist hiedurch bewiesen.

7.

Encyklopädische und elementare Darstellung der Theorie der Zahlen.

(Vom Herausgeber dieses Journals.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 2. im 1ten, No. 10. im 2ten, No. 26. im 3ten Hefte 27ten, No. 18. im 2ten Hefte 28ten und No. 4. im 1ten Hefte dieses Bandes.)

---

§. 85.

Lehrsatz.

I. *Wenn in der Gleichung*

$$1. \quad u.v = \mathfrak{G}z + w$$

u, v *und* w *ganze Zahlen, und zwei davon, gleichviel welche, zu der ganzen Zahl* z *theilerfremd sind, so ist es auch die dritte, es mögen jene zwei ungleich, oder gleich, und zu einander theilerfremd sein, oder nicht.*

II. *Wenn in der Gleichung* (1.) *eine der drei Zahlen* u, v *und* w, *gleichviel welche, alle zu* z *theilerfremden Zahlen* >0 *und* $<z$ *durchläuft (die, wie weiter oben, durch* z_φ *bezeichnet werden mögen und ihre Anzahl durch* φz, *oder auch, kürzer, blofs durch* φ), *während eine zweite der drei Zahlen, gleichviel welche, stets denselben Werth behält, so durchläuft die dritte ebenfalls alle zu* z *theilerfremden Zahlen* $z_\varphi>0$ *und* $z_\varphi<z$, *obwohl in verschiedener Ordnung.*

Beispiel. Es sei

$$2. \quad z = 15.$$

Alsdann sind die zu z *theilerfremden* Zahlen >0 und $<z$ folgende:

$$3. \quad z_\varphi = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 \text{ und } 14.$$

Zu I. Es sei z. B. in (1.) $u=7$, $v=11$, so giebt (1.) $7.11=5.z+2$, also $w=2$; welches ebenfalls eines der z_φ ist. Es sei $u=4$, $w=13$, so ist $4.7=1.15+13$, also $v=7$; wiederum eines der z_φ.

Es sei $v = 11$, $w = 4$, so ist $14.11 = 10.15 + 4$, also $u = 14$; ebenfalls eines der z_φ.

Zu II. *a.* Läfst man u oder v *denselben* Werth, z. B. 4, behalten, während v oder u alle z_φ durchläuft, welche beiden Fälle offenbar nur einer sind, da die Factoren u und v vertauscht werden können, so findet sich

$$4.\quad \left\{\begin{array}{lll} 4.\ 1 = \mathfrak{S}z + 4, & \text{also } w = & 4, \\ 4.\ 2 = \mathfrak{S}z + 8, & \text{- - -} & 8, \\ 4.\ 4 = \mathfrak{S}z + 1, & \text{- - -} & 1, \\ 4.\ 7 = \mathfrak{S}z + 13, & \text{- - -} & 13, \\ 4.\ 8 = \mathfrak{S}z + 2, & \text{- - -} & 2, \\ 4.11 = \mathfrak{S}z + 14, & \text{- - -} & 14, \\ 4.13 = \mathfrak{S}z + 7, & \text{- - -} & 7, \\ 4.14 = \mathfrak{S}z + 11, & \text{- - -} & 11. \end{array}\right\}$$

Also durchläuft w ebenfalls alle z_φ.

b. Läfst man w *denselben* Werth, z. B. 4 oder 11, behalten und dagegen v oder u alle z_φ durchlaufen, welche beide Fälle wieder nur einer sind, indem die unverändert bleibende Zahl ebensowohl durch u als durch v bezeichnet werden kann, so findet sich

$$5.\ \left\{\begin{array}{l} 1.\ 4 = \mathfrak{S}z + 4 \\ 2.\ 2 = \mathfrak{S}z + 4 \\ 4.\ 1 = \mathfrak{S}z + 4 \\ 7.\ 7 = \mathfrak{S}z + 4 \\ 8.\ 8 = \mathfrak{S}z + 4 \\ 11.14 = \mathfrak{S}z + 4 \\ 13.13 = \mathfrak{S}z + 4 \\ 14.11 = \mathfrak{S}z + 4 \end{array}\right\} \text{für } w = 4, \quad 6.\ \left\{\begin{array}{l} 1.11 = \mathfrak{S}z + 11 \\ 2.13 = \mathfrak{S}z + 11 \\ 4.14 = \mathfrak{S}z + 11 \\ 7.\ 8 = \mathfrak{S}z + 11 \\ 8.\ 7 = \mathfrak{S}z + 11 \\ 11.\ 1 = \mathfrak{S}z + 11 \\ 13.\ 2 = \mathfrak{S}z + 11 \\ 14.\ 4 = \mathfrak{S}z + 11 \end{array}\right\} \text{für } w = 11.$$

Also durchläuft, wie man sieht, v für ein *unverändertes* w alle z_φ, wenn es mit u geschieht.

c. Läfst man u oder v denselben Werth, z. B. 8, behalten, während w alle z_φ durchläuft, welche beiden Fälle wiederum nur einer sind, indem die unverändert bleibende Zahl ebensowohl durch u als durch v bezeichnet werden kann, so findet sich

$$7.\quad \begin{cases} 8.\,2 = \mathfrak{G}z + 1, \\ 8.\,4 = \mathfrak{G}z + 2, \\ 8.\,8 = \mathfrak{G}z + 4, \\ 8.14 = \mathfrak{G}z + 7, \\ 8.\,1 = \mathfrak{G}z + 8, \\ 8.\,7 = \mathfrak{G}z + 11, \\ 8.11 = \mathfrak{G}z + 13, \\ 8.13 = \mathfrak{G}z + 14. \end{cases}$$

Während also w alle z_φ durchläuft und u *denselben* Werth behält, durchläuft auch v alle z_φ.

Beweis von I. *Erstlich A.* Wäre, wenn zuerst u und v zu z *theilerfremd* sind, w *nicht* zu z theilerfremd, sondern hätte mit z irgend einen *Stammtheiler* $\delta > 1$ gemein, so müfste δ nach (§. 18.), da es in $\mathfrak{G}z$ und w aufgehen soll, auch in $u.v$ aufgehen; also *entweder* in u, *oder* in v; denn die *Stammzahl* δ ist untheilbar. Aber weder u noch v hat nach der Voraussetzung irgend einen Stammtheiler > 1 mit z gemein: also geht δ *nicht* in $u.v$ auf; und folglich kann w mit z *keinen* Stammtheiler $\delta > 1$ gemein haben und ist demnach zu z nothwendig *theilerfremd.*

Zweitens B. Wäre, wenn zweitens u und w zu z *theilerfremd* sind, v *nicht* zu z theilerfremd, sondern hätte mit z irgend einen *Stammtheiler* $\delta > 1$ gemein, so müfste δ, da es in $u.v$ und $\mathfrak{G}z$ aufgehen soll, nach (§. 18.) auch in w aufgehen, und w und z wären also *nicht* zu einander theilerfremd; gegen die Voraussetzung. Also können v und z keinen Theiler $\delta > 1$ gemein haben und sind folglich nothwendig zu einander *theilerfremd.*

Drittens C. Ganz wie in (*B.*) verhält es sich aus *demselben* Grunde, drittens, mit u und z, wenn v und w zu z theilerfremd sind.

Beweis von II. *Erstlich D. a.* Es behalte u stets *denselben* Werth, während v *alle* z_φ durchläuft: so entstehen φz, oder kürzer, φ Werthe von w, und alle diese Werthe sind nach (I.) zu z *theilerfremd.*

b. Wären nun zwei Werthe von w, z. B. w_1 und w_2, für zwei *verschiedene* Werthe v_1 und v_2 von v *einander gleich*, so müfste

$$8.\quad uv_1 = \mathfrak{G}z + w_1 \quad \text{und} \quad uv_2 = \mathfrak{G}z + w_2,$$

und wegen $w_1 = w_2$,

$$9.\quad u(v_1 - v_2) = \mathfrak{G}z$$

sein, also $u(v_1 - v_2)$ mit z *aufgehen.* Aber u hat nach der Voraussetzung *keinen* Theiler mit z gemein: also müfste z in $v_1 - v_2$ allein aufgehen. Dies

ist nicht möglich, da v_1 und v_2 ***beide*** $< z$ sind und also $v_1 - v_2$ um so mehr $< z$ ist. Folglich geht z in $u(v_1 - v_2)$ ***nicht*** auf, und folglich können nicht zwei Werthe von w einander gleich sein.

c. Nun sind ihrer φz oder φ, und ***alle*** sind zu z ***theilerfremd*** (*a.*). Also durchläuft w nothwendig ***alle*** zu z theilerfremden Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$.

Zweitens E. Der Fall, wenn v stets denselben Werth behält, während u alle z_φ durchläuft, ist nur der vorige, indem der unverändert bleibende Werth ebensowohl durch v als durch u bezeichnet werden kann.

Drittens F. Es behalte w stets ***denselben*** Werth, während u alle z_φ durchläuft.

a. Zuerst folgt aus (*D.*), dafs es, welchen Werth auch w mag haben sollen, zu ***jedem*** u nothwendig ein v giebt, welches die Gleichung (1.) erfüllt. Denn wenn u ***irgend einen*** der Werthe z_φ hat, und v durchläuft ***alle*** z_φ, so durchläuft nach (*D.*) auch w alle z_φ, und folglich werden von w für jedes beliebige u durch die verschiedenen Werthe von v ***alle*** z_φ berührt, folglich auch ***derjenige bleibende*** Werth von w, welchen man ihm zugetheilt hat, durch irgend ein v für ein bestimmtes u. Mithin giebt es für jedes u nothwendig irgend ein v, für welches w den ***bestimmten*** bleibenden Werth bekommt

b. Durchliefe nun v für ein- und dasselbe w nicht ***alle*** z_φ, während u alle diese Werthe annimmt, so müfsten zwei verschiedene u, z. B. u_1 und u_2, mit ***demselben*** v ***dasselbe*** w geben, also müfste

$$10. \quad u_1.v = \mathfrak{G}z + w \quad \text{und} \quad u_2.v = \mathfrak{G}z + w$$

und folglich

$$11. \quad (u_1 - u_2)v = \mathfrak{G}z$$

sein, und mithin $(u_1 - u_2)v$ mit z ***aufgehen.*** Dieses ist aus ganz gleichen Gründen wie in (*D. b.*) nicht möglich. Also kann mit zwei ***verschiedenen*** u ***nicht dasselbe*** v ***dasselbe*** w geben, und folglich mufs, wenn w stets denselben Werth behält, während u ***alle*** z_φ durchläuft, auch nothwendig v ***alle*** z_φ durchlaufen.

Viertens G. Der Fall, wenn w stets denselben Werth behält, während v alle z_φ durchläuft, ist nur der vorige, indem diejenige Zahl, welche alle z_φ durchlaufen ***soll,*** worauf dann, wie sich fand, die andere alle z_φ durchlaufen ***mufs,*** ebensowohl durch v als durch u bezeichnet werden kann.

Fünftens H. Es behalte u stets ***denselben*** Werth, während w alle z_φ durchläuft.

a. Zuerst folgt aus (*D.*), dafs es, welchen Werth auch u mag haben sollen, zu jedem w nothwendig ein v giebt, welches die Gleichung (1.) erfüllt. Denn wenn u einen bestimmten Werth hat, und v durchläuft *alle* z_φ, so durchläuft w nach (*D.*) ebenfalls *alle* z_φ. Also *jeder* Werth, den w *soll* haben können, wird für jeden *bestimmten* Werth von u durch irgend ein v berührt. Mithin giebt es für jeden *bestimmten* und bleibenden Werth von u, und für *jeden* Werth, den w bekommen kann, ein zugehöriges v.

b. Durchliefe nun v für ein- und dasselbe u nicht *alle* z_φ, während w alle z_φ durchläuft, so müfste v für zwei *verschiedene* Werthe von w, z. B. w_1 und w_2, und für *dasselbe u, denselben* Werth haben können, also müfste

$$12.\quad uv = \mathfrak{G}z + w_1 \quad \text{und} \quad uv = \mathfrak{G}z + w_2,$$

folglich

$$13.\quad 0 = \mathfrak{G}z + w_1 - w_2 \quad \text{oder} \quad w_1 - w_2 = \mathfrak{G}z$$

sein und mithin $w_1 - w_2$ mit z *aufgehen*. Dieses ist nicht möglich, da w_1 und w_2 beide $< z$ sind und also $w_1 - w_2$ um so mehr $< z$ ist. Also kann v für zwei *verschiedene* w und ein- und dasselbe u *nicht gleiche* Werthe haben. Und folglich mufs v, wenn w für einen und denselben Werth von u alle z_φ durchläuft, ebenfalls *alle* z_φ durchlaufen.

Sechstens I. Der Fall, wenn v *denselben* Werth behält, während w alle z_φ durchläuft, ist wieder nur der vorige, indem diejenige Zahl, welche denselben Werth behalten *soll*, während w alle z_φ durchläuft, wobei dann, wie sich findet, die andere alle z_φ durchlaufen *mufs*, ebensowohl durch v als durch u bezeichnet werden kann.

§. 86.
Lehrsatz.

Wenn in

$$1.\quad \mathrm{a}^\alpha \mathrm{b}^\beta \mathrm{c}^\gamma \ldots \mathrm{n}^\nu = \mathfrak{G}\mathrm{z} + \mathrm{r},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ *beliebige ganze positive Zahlen bezeichnen,* a, b, c, ... n *sämmtlich einzeln zu* z *theilerfremd sind, so ist es auch* r; *gleichviel ob* a, b, c, ... n *unter sich theilerfremd sind, oder nicht.*

Beispiel. Es sei $a = 4$, $b = 6$, $c = 15$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $z = 91$, so ist

$$2.\quad a^\alpha b^\beta c^\gamma = 4^5.6^3.15^2 = 256.216.225 = 12441600 = 13671.z + 39$$

und $r = 39$ hat mit $z = 91$ keinen Theiler > 1 gemein.

Beweis. Hätte r mit z irgend einen Theiler $\delta > 1$ gemein, so müfste derselbe nach (§. 18.) in irgend einen der Factoren $a, a, a, \ldots b, b, \ldots$

$c, c, \ldots$ von z, oder in mehrere von ihnen aufgehen, und also hätten dann diese Factoren mit z den Theiler $\delta > 1$ gemein und wären also zu z nicht theilerfremd. Dieses ist der Voraussetzung entgegen, und folglich kann r zu z nur theilerfremd sein.

§. 87.

Lehrsatz.

Für jede, zu einer beliebigen Zahl z *theilerfremde Zahl* $u = z_\varphi$ *ist, wenn man die Anzahl derjenigen dieser Zahlen* z_φ, *welche* $< z$ *sind, wie oben durch* φz *oder auch kürzer durch* φ *bezeichnet,*

$$1.\quad u^{\varphi z} \text{ oder } u^\varphi = \mathfrak{G}z + 1.$$

Die Zahl u *kann nach Belieben kleiner, oder größer als* z, *und sowohl positiv als negativ sein.*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Fermatschen Lehrsatzes (§. 40.) *und kann deshalb „Verallgemeinerter Fermatscher Lehrsatz" heißen.*

Beispiel. Es sei

$$2.\quad z = 15,$$

so hat $u = z_\varphi$ folgende φz oder $\varphi = 8$ Werthe:

$$3.\quad u = z_\varphi = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 \text{ und } 14$$

Dieselben geben, der Reihe nach in (1.), statt u gesetzt,

$$4.\quad \begin{cases} 1^8 = \mathfrak{G}z + 1, \\ 2^8 = 256 = \mathfrak{G}z + 1, \\ 4^8 = 2^{16} = (\mathfrak{G}z + 1)^2 = \mathfrak{G}z + 1, \\ 7^8 = 49^4 = (\mathfrak{G}z + 4)^4 = \mathfrak{G}z + 256 = \mathfrak{G}z + 1, \\ 8^8 = 4^{16} = (\mathfrak{G}z + 1)^2 = \mathfrak{G}z + 1, \\ 11^8 = 121^4 = (\mathfrak{G}z + 1)^4 = \mathfrak{G}z + 1, \\ 13^8 = (\mathfrak{G}z - 2)^8 = (\mathfrak{G}z + 2)^8 = \mathfrak{G}z + 1, \\ 14^8 = (\mathfrak{G}z - 1)^8 = \mathfrak{G}z + 1. \end{cases}$$

Alle z_φ also geben, auf die $\varphi z = \varphi = 8$te Potenz erhoben, $\mathfrak{G}z + 1$.

Auch für jedes $u > 15$, welches zu 15 theilerfremd ist, ist $u^8 = \mathfrak{G}z + 1$. Z. B. $u = 52$ giebt

$$5.\quad 52^8 = (\mathfrak{G}z + 7)^8 = \mathfrak{G}z + 7^8 = \mathfrak{G}z + 1 \quad (4.).$$

Desgleichen ist z. B. für das *negative* $u = -34$,

$$6.\quad (-34)^8 = (-3.z + 11)^8 = (\mathfrak{G}z + 11)^8 = \mathfrak{G}z + 11^8 = \mathfrak{G}z + 1 \quad (4.).$$

Beweis. *A.* Es sei u irgend ein *bestimmtes* z_φ und

$$7.\quad uv = \mathfrak{G}z + w.$$

Läfst man in dieser Gleichung v *alle* die Werthe von z_φ durchlaufen, so durchläuft nach (§. 85. II.) auch w *alle* z_φ; obwohl in verschiedener Ordnung.

B. Bezeichnet man also der Reihe nach die φz Werthe, welche v bekommen kann, durch $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{\varphi z}$, und die in (7.) *zugehörigen* Werthe von w durch $w_1, w_2, w_3, \ldots w_{\varphi z}$, so ergiebt sich

$$8.\quad \begin{cases} uv_1 = \mathfrak{G}z + w_1, \\ uv_2 = \mathfrak{G}z + w_2, \\ uv_3 = \mathfrak{G}z + w_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ uv_{\varphi z} = \mathfrak{G}z + w_{\varphi z}. \end{cases}$$

C. Multiplicirt man die sämmtlichen Gleichungen (8.), φz an der Zahl, in einander, so erhält man

$$9.\quad u^{\varphi z}.\, v_1 v_2 v_3 \ldots . v_{\varphi z} = \mathfrak{G}z + w_1 w_2 w_3 \ldots . w_{\varphi z}.$$

Aber die w haben zusammengenommen *dieselben* Werthe wie die v, nur in verschiedener Aufeinanderfolge; denn sowohl die w als die v sind die *sämmtlichen* z_φ: also ist das *Product*

$$10.\quad v_1 v_2 v_3 \ldots . v_{\varphi z} = w_1 w_2 w_3 \ldots . w_{\varphi z},$$

und folglich in (9.)

$$11.\quad u^{\varphi z}.\, v_1 v_2 v_3 \ldots . v_{\varphi z} = \mathfrak{G}z + v_1 v_2 v_3 \ldots . v_{\varphi z},$$

und hieraus folgt

$$12.\quad v_1 v_2 v_3 \ldots . v_{\varphi z}(u^{\varphi z} - 1) = \mathfrak{G}z:$$

mithin mufs $v_1 v_2 v_3 \ldots . v_{\varphi z}(u^{\varphi z} - 1)$ mit z *aufgehen*.

D. Aber *keiner* der Factoren v hat mit z irgend einen Stammtheiler $\delta > 1$ gemein, denn alle sind zu z *theilerfremd:* also geht auch das Product $v_1 v_2 v_3 \ldots . v_{\varphi z}$ mit δ nicht auf, und folglich auch nicht mit z, noch mit irgend einem Factor von z. Mithin mufs $u^{\varphi z} - 1$ *allein* mit z aufgehen und folglich

$$13.\quad u^{\varphi z} - 1 = \mathfrak{G}z \quad \text{oder} \quad u^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$$

sein; wie es der Lehrsatz in (1.) behauptet.

E. Ist u *gröfser* als z, also

$$14.\quad u = \mathfrak{G}z + u_1,$$

wo nun $u_1 < z$, so ist nothwendig, wenn u zu z *theilerfremd* ist, auch u_1 zu z *theilerfremd.* Denn hätte u_1 und z einen Theiler $\delta > 1$ gemein, so müfste derselbe nach (§. 18.) in u aufgehen und u und z wären dann *nicht* theilerfremd; gegen die Voraussetzung. Also ist u_1 in (14.) nothwendig *irgend eines der* $z_\varphi < z$.

Nun giebt (14.)

$$15.\quad u^{\varphi z} = (\mathfrak{G}z + u_1)^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + u_1^{\varphi z}.$$

Aber für jedes $u_1 = z_\varphi < z$ ist nach (1.) $u_1^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$. Also ist auch in (15.)

$$16.\quad u^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z + 1 = \mathfrak{G}z + 1;$$

das heifst: auch für *positive* u, welche $> z$ und zu z theilerfremd sind, gilt der Lehrsatz.

F. Ist u *negativ* und sein zeichenfreier Werth $< z$ oder $> z$, aber zu z *theilerfremd*, so läfst sich $\mathfrak{G}$ immer so annehmen, dafs

$$17.\quad u = \mathfrak{G}z + u_1$$

ist, wo $u_1 < z$ und > 0 und also eines der z_φ ist, und es folgt dann, eben wie in (*E.*), dafs der Lehrsatz auch für *diese* u gilt.

§. 88.

Zweiter Beweis des *Fermat*schen Lehrsatzes (§. 40.).

A. Wenn in (§. 87.) z eine *Stammzahl* p ist, so sind alle die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... $p-1$ zu $z = p$ *theilerfremd*, und folglich kann in (§. 87.) u alle die Werthe

$$1.\quad u = 1, 2, 3, 4, \ldots\, p-1$$

haben. Die Anzahl φz oder φ dieser Werthe von u ist $p-1$: also giebt (§. 87. 1.) in dem Falle $z = p$:

$$2.\quad u^{p-1} = \mathfrak{G}p + 1;$$

dem Satze (§. 40.) gemäfs.

Anmerk. *B.* Der *verallgemeinerte Fermat*sche Satz (§. 87.) bedarf *nur* des einfachen Satzes (§. 85.), sogar nur des *einen* Falles desselben, wenn u *denselben* Werth behält und v alle z_φ durchläuft. Also könnte man in den Elementen auch recht gut den *Fermat*schen Satz sogleich in seiner verallgemeinerten Form (§. 87.) aufstellen und den eigentlich sogenannten *Fermat*schen Satz, für den Fall, wenn z eine *Stammzahl* p ist, auf die Weise wie in dem gegenwärtigen Paragraph, als einen einzelnen besondern Fall daraus ableiten.

§. 89.

Erklärung.

A. Wir haben in (§. 45.), wenn in der Gleichung

$$1.\quad u^2 = \mathfrak{G}p + r$$

p eine *Stammzahl* ist, die Reste r zu einem beliebigen u *Quadratreste zu* p genannt, und diejenigen Zahlen > 0 und $< p$, welche zu *keinem* u gehören, *Nichtquadratreste zu p.*

In (§. 46.) haben wir für die Gleichung

$$2. \quad uv = \mathfrak{G}z + w$$

die Zahlenpaare u und v, welche für *dasselbe* z *gleiche* w geben, *zusammengehörige Zahlen für* w *zu* z genannt.

Es mag jetzt die Bedeutung dieser Benennungen auf folgende Art *erweitert* werden.

B. *a.* Es soll allgemein, aber immer für Zahlen u und v, die zu einer beliebigen Zahl z *theilerfremd* und $< z$ sind, jedes Zahlenpaar u und v in der Gleichung (2.), auch dann, wenn nicht mehrere Paare dasselbe w geben, *zusammengehörige Zahlen für* w zu z heifsen.

b. Sind u und v einander *gleich*, so dafs in (2.)

$$3. \quad u^2 = \mathfrak{G}z + w$$

ist, so soll w *Quadratrest zu* z heifsen; auch wenn z nicht eine Stammzahl ist.

c. Sind u und v *nicht* einander gleich, so soll in (2.) w *Nichtquadratrest zu* z heifsen.

d. Das Product uv soll, je nachdem u und v gleich, oder ungleich sind, *Quadrat* oder *Nichtquadrat für* z *zu* w heifsen.

e. Die Zahlen u und v selbst sollen, wenn sie einander gleich sind, wie in (3.), *Quadratwurzeln* zu w für z heifsen und, sind sie ungleich, wie in (2.), *Factoren zu* w *für* z.

§. 90.

Lehrsatz.

I. *Die Anzahl derjenigen Paare zu einer beliebigen Zahl* z *theilerfremden ungleichen Zahlen* u *und* v $<$ z, *welche in der Gleichung*

$$1. \quad \mathrm{uv} = \mathfrak{G}\mathrm{z} + \mathrm{w}$$

den nemlichen Werthe von w *geben, also, nach* (§. 89.) *ausgedrückt, die Anzahl der Nichtquadrate zu gleichem* w *für* z, *ist immer gerade.*

II. *Jedes der Nichtquadrate zu gleichen* w *für* z *in* (1.) *kommt für alle die Werthe* $\mathrm{z}_\varphi < \mathrm{z}$, *welche* u *und* v *darin haben können, zweimal vor; und schon in der Hälfte dieser Nichtquadrate kommen alle Werthe vor, welche* u *und* v *in den Nichtquadraten haben können, und jeder nur einmal.*

II. *Die Anzahl der Quadrate für* z *zu gleichen* w, *also z. B. der* x *in*

$$2. \quad \mathrm{x}^2 = \mathfrak{G}\mathrm{z} + \mathrm{w}$$

für ein- und dasselbe w, *ist ebenfalls immer gerade; den Fall* $z=2$ *allein ausgenommen.*

IV. *Zu jeder Quadratwurzel* x_1 *zu* w *für* z *gehört eine zweite* $x_2=z-x_1$, *welche mit* x *multiplicirt den Rest* $-w$ *zu* z *giebt. Also wenn z. B.*

$$3.\quad x_1^2=\mathfrak{G}z+w \quad \textit{und} \quad x_2^2=\mathfrak{G}z+w$$

ist, so ist

$$4.\quad x_1x_2=\mathfrak{G}z-w.$$

V. *Die Quadrate und die Nichtquadrate zu einem und demselben* w *haben immer verschiedene Factoren. Das heifst, wenn z. B.*

$$5.\quad x^2=\mathfrak{G}z+w,$$

und zugleich für das nemliche w,

$$6.\quad uv=\mathfrak{G}z+w$$

ist, so kann kein u *oder* v *einem der* x *gleich sein.*

VI. *a. Die Anzahl der Quadratreste, oder die Anzahl der verschiedenen* w *in* (2.) *für alle die zu* z *theilerfremden Zahlen* $>0<z$, *ist für kein* z *gröfser als die Hälfte der Zahl der sämmtlichen zu* z *theilerfremden Zahlen* >0 *und* $<z$.

b. Die Anzahl der Nichtquadratreste, oder die Anzahl der verschiedenen w *in* (1.), *für alle die ungleichen Paare zu* z *theilerfremden Zahlen* $>0<z$, *ist für kein* z *kleiner als die Hälfte der Zahl der sämmtlichen zu* z *theilerfremden Zahlen* >0 *und* $<z$.

Beispiel. Es sei

$$7.\quad z=15.$$

Die zu z theilerfremden Zahlen sind

$$8.\quad 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13 \text{ und } 14;$$

und alle diese Werthe können in (1.) u, v und w haben.

Es sei z. B.

$$9.\quad w=4 \quad \text{und} \quad w=11,$$

so ist

$$10.\ \begin{cases} 1.11=\mathfrak{G}z+11,\\ 2.13=\mathfrak{G}z+11,\\ 4.14=\mathfrak{G}z+11,\\ 7.\ 8=\mathfrak{G}z+11,\\ 8.\ 7=\mathfrak{G}z+11,\\ 11.\ 1=\mathfrak{G}z+11,\\ 13.\ 2=\mathfrak{G}z+11,\\ 14.\ 4=\mathfrak{G}z+11, \end{cases} \qquad 11.\ \begin{cases} 1.\ 4=\mathfrak{G}z+4,\\ 2.\ 2=\mathfrak{G}z+4,\\ 4.\ 1=\mathfrak{G}z+4,\\ 7.\ 7=\mathfrak{G}z+4,\\ 8.\ 8=\mathfrak{G}z+4,\\ 11.14=\mathfrak{G}z+4,\\ 13.13=\mathfrak{G}z+4,\\ 14.11=\mathfrak{G}z+4. \end{cases}$$

Zu I. Die *Anzahl* der *Nichtquadrate* oder Producte *ungleicher* Factoren links in (10.) ist 8, in (11.) 4; beides *gerade;* gemäfs (I.).

Zu II. Jedes *Nichtquadrat* kommt in (10. und 11.) *zweimal* vor, und die Hälfte der Zahl der Nichtquadrate 1.11, 2.13, 4.14, 7.8 in (10.) enthält schon *alle* Werthe, welche u und v in (1.) haben können; gemäfs (II.).

Zu III. Die *Anzahl* der Quadrate oder der Producte *gleicher* Factoren links in (10) ist 0 und in (11.) 4; beides *gerade;* gemäfs (III.).

Zu IV. In (10.) ist z. B. $2^2 = \mathfrak{S}z + 4$ und $13^2 = \mathfrak{S}z + 4$, und 2.13 ist $= 26 = \mathfrak{S}z - 4$. Eben so ist $7^2 = \mathfrak{S}z + 4$ und $8^2 = \mathfrak{S}z + 4$, und 7.8 ist $= 56 = \mathfrak{S}z - 4$; gemäfs (IV.).

Zu V. Keiner der Factoren 1, 4, 11 und 14 der Nichtquadrate in (11.) ist eine Quadratwurzel für z zu w. Diese sind 2, 7, 8 und 13; gemäfs (V.).

Beweis von I. *A.* Wenn man in (1.) u *alle* z_φ durchlaufen läfst, während w *denselben* Werth behält, so durchläuft auch v nach (§. 85. II.) *alle* z_φ. Ist also u_1 irgend ein bestimmter Werth von u, und v_1 der zugehörige, von u_1 verschiedene Werth von v, so dafs auch

$$12. \quad u_1 v_1 = \mathfrak{S}z + w$$

ist, so mufs u, indem es *alle* z_φ durchläuft, aufser diesem Werth u_1 auch nothwendig den Werth v_1 berühren. Zu diesem Werth v_1 von u ist dann auch umgekehrt der *zugehörige* Werth von v offenbar u_1, indem gemäfs (12.) auch

$$13. \quad v_1 u_1 = \mathfrak{S}z + w$$

sein soll. Aber auch keinen andern Werth mehr kann weder v_1 in (12.), noch u_1 in (13.) haben. Denn wäre z. B. in (12. und 13.) noch

$$14. \quad u_1 v_2 = \mathfrak{S}z + w \quad \text{und} \quad 15. \quad v_1 u_2 = \mathfrak{S}z + w,$$

so gäbe (12. und 14.) und (13. und 15.)

$$16. \quad u_1(v_1 - v_2) = \mathfrak{S}z \quad \text{und} \quad 17. \quad v_1(u_1 - u_2) = \mathfrak{S}z;$$

was Beides nicht sein kann, indem u_1 und v_1 mit z keinen Factor gemein haben und z in $v_1 - v_2$ oder $u_1 - u_2$ allein nicht aufgeht, da $v_1 - v_2 < z$ und $u_1 - u_2 < z$ ist.

Es können also *dieselben* ungleichen Factoren u_1 und v_1 für das gleiche w *nur zweimal* vorkommen. Aber zweimal kommen sie *nothwendig* vor. Mithin sind die *Nichtquadrate* zu gleichen w immer *paarweise* vorhanden, und daher ist ihre Gesammt-Anzahl *immer gerade;* gemäfs (I.).

Beweis von II. *B. Zwei* ungleiche Factoren u und v_1 kommen nach (*A.*) für ein- und dasselbe w *beide zugleich* je nur noch einmal vor.

Man setze nemlich, ein *einzelner* der beiden Factoren, z. B. u_1, komme noch zum drittenmal vor, verbunden mit einem andern v, z. B. v_2. Dann fände (12.) und (14.) Statt, und daraus würde (16.) folgen. Aber (16.) kann, wie dort bemerkt, *nicht* Statt finden. Also kann auch ein einzelner von den beiden Factoren u_1 und v_1 nicht zum drittenmal vorkommen.

Daraus folgt, dafs in zwei *Nichtquadraten*, welche *kein Paar* sind, oder in welchen nicht die *beiden* Factoren dieselben sind, nothwendig *alle vier* Factoren verschieden sein müssen. Und hieraus folgt weiter, dafs schon die *Hälfte* der sämmtlichen Nichtquadrate, nemlich je einer aus jedem Paar genommen, *alle* die z_φ und jedes nur einmal enthalten müssen, welchen u und v in $uv = \mathfrak{G}z + w$ für ein- und dasselbe w überhaupt gleich sein können; gemäfs (II.).

Beweis von III. *C. a.* Wenn

$$18. \quad x^2 = \mathfrak{G}z + w$$

ist, so ist auch, für *dasselbe* w,

$$19. \quad (z-x)^2 = \mathfrak{G}z + w;$$

denn $(z-x)^2$ ist $= z^2 - 2zx + x^2 = \mathfrak{G}z + x^2$, also zufolge (18.) $= \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z + x^2 = \mathfrak{G}z + x^2$.

b. Nun ist ferner $z-x$ immer nothwendig von x *verschieden*. Denn wäre $z-x=x$, so wäre $z=2x$: also müfste x in z *aufgehen*, was nicht sein kann, da x und z nach der Voraussetzung keinen Factor >1 gemein haben. Es kann nur in dem einzigen Falle $z=2x$ sein, wenn $z=2$, also $x=1$ ist. Dieser Fall ist daher, wie in (III.) bemerkt, *ausgenommen*.

c. Da also nun x und $z-x$ *verschieden* sind, so gehört nach (*a.*) nothwendig zu jedem Werth, welchen x haben kann, ein zweiter, davon *verschiedener* Werth $z-x$. Mithin folgt, dafs die *Quadratwurzeln* für z zu w immer *paarweise* vorhanden sind und dafs daher ihre Gesammt-Anzahl nothwendig *immer gerade* ist; den einzigen Fall $z=2$ ausgenommen; gemäfs (III.).

Beweis von IV. *D.* Zu jeder Quadratwurzel x_1 für z zu w gehört nach (*C.*) die zweite $x_2 = z - x$. Nun ist

$$20. \quad x_1 x_2 = x_1(z-x_1) = x_1 z - x_1^2 = \mathfrak{G}z - x_1^2.$$

Aber

$$21. \quad x_1^2 = \mathfrak{G}z + w,$$

also ist, (21. in 20.) gesetzt,

$$22. \quad x_1 x_2 = \mathfrak{G}z - \mathfrak{G}z - w = \mathfrak{G}z - w;$$

gemäfs (IV.).

Beweis von V. *E.* Es sei x eine der *Quadratwurzeln* für z zu w, und u und v seien die ungleichen Factoren eines der *Nichtquadrate* für z zu dem *nemlichen* w, so dafs also

$$23.\quad x^2 = \mathfrak{G}z + w \text{ und}$$

$$24.\quad uv = \mathfrak{G}z + w$$

wäre. Alsdann würde aus (23. und 24.)

$$25.\quad x^2 - uv = \mathfrak{G}z$$

folgen.

Könnte nun x zugleich einer der Factoren u oder v, z. B. $x = u$, sein, so müfste nach (25.)

$$26.\quad x^2 - xv = x(x-v) = \mathfrak{G}z$$

sein und also z in $x(x-v)$ *aufgehen.* Dies aber ist nicht möglich, da x mit z keinen Factor > 1 gemein hat, und $x-v$ *allein* mit z nicht aufgeht, indem es $< z$ ist. Also kann keiner der *Factoren* der *Nichtquadrate* zugleich eine der *Quadratwurzeln* für z zu w sein; gemäfs (V.).

Beweis von VI. *F.* Es sei x irgend eine der zu z theilerfremden Zahlen > 0 und $< z$, so ist auch $z-x$, welches ebenfalls > 0 und $< z$ ist, eine solche Zahl; denn wäre $z-x$ *nicht* zu z theilerfremd, sondern hätte mit z den Stammtheiler $\delta > 1$ gemein, so dafs

$$27.\quad z - x = \mathfrak{G}\delta$$

wäre, so müfste δ, weil es in z aufgeht, nach (§. 18.) auch in x aufgehen, und x und z hätten also den Theiler $\delta > 1$ gemein; gegen die Voraussetzung.

Wenn nun, wie in (2.),

$$28.\quad x^2 = \mathfrak{G}z + w,$$

also w, welches ebenfalls zu den zu z theilerfremden Zahlen > 0 und $< z$ gehört, einer der *Quadratreste* zu z ist, so giebt $z-x$ den *nemlichen* Werth von w; denn es ist

$$29\quad (Z-x)^2 = \mathfrak{G}z + x^2 = \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z + w \text{ (28.)} = \mathfrak{G}z + w.$$

Läfst man nun x in (28. oder 2.) *alle* die zu z theilerfremden Zahlen > 0 und $< z$, deren Anzahl φz bezeichnet, durchlaufen, so kommt nothwendig jeder der *Quadratreste* w *wenigstens zweimal* vor, und folglich kann es für kein z *mehr* als $\frac{1}{2}\varphi z$ *Quadratreste* geben.

Und da nun *nicht mehr* als *die Hälfte* der φz zu z theilerfremden Zahlen > 0 und $< z$ *Quadratreste* sein können, so müssen die übrigen nothwendig *Nichtquadratreste* sein: folglich kann es auch für *kein* z *weniger* als $\frac{1}{2}\varphi z$ *Nichtquadratreste* geben; gemäfs (VI.).

15*

§. 91.

Lehrsatz.

Wenn in der Gleichung

$$1.\quad x^2 = \mathfrak{S}z + 1$$

x *eine zu* z *theilerfremde Zahl* z_φ *bezeichnet, so giebt es*

I. *Was auch* z *sein mag, von* x *immer das Paar ungleicher Werthe*

$$2.\quad x = 1 \quad und \quad x = z - 1.$$

Blofs in dem Falle $z = 2$ *sind diese Werthe von* x *beide* $= 1$, *und also nicht ungleich.*

II. *Ist* z *eine Stammzahl, so giebt es für* x *in* (2.) *nur das einzige Werthenpaar* (2.).

III. *Ist* $z > 2$ *nicht eine Stammzahl, so kann es der Werthe von* x *in* (1.), *so wie überhaupt für*

$$3.\quad x^2 = \mathfrak{S}z + w,$$

wo w *nicht* $= 1$ *ist, mehrere geben; aber sie sind immer paarweise, also in gerader Zahl vorhanden. Wieviel Werthenpaare von* x *es für* (1.) *oder* (3.) *geben könne, hängt, wie sich weiter unten zeigen wird, von den verschiedenen Factorenpaaren von* z *ab.*

Beispiel zu II. Es sei $z = 7$, so ist $z_\varphi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2) = \mathfrak{S}z + 1, 4, 2, 2, 4$ und 1. Also *nur* $x = 1$ und $x = z - 1 = 6$ geben $\mathfrak{S}z + 1$.

Zu III. Es sei $z = 15$, so ist $z_\varphi = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13$ und 14 und $(1^2, 2^2, 4^2, 7^2, 8^2, 11^2, 13^2, 14^2) = \mathfrak{S}z + 1, 4, 1, 4, 4, 1, 4, 1, 4, 1$, also $x = 1$ und 14, 4 und 11 geben $\mathfrak{S}z + 1$, so dafs also *zwei* Werthenpaare von x vorhanden sind, welche $x^2 = \mathfrak{S}z + 1$ geben.

Desgleichen geben die *zwei* Werthenpaare 2 und 13 und 7 und 8 $\mathfrak{S}z + 4$ für $w = 4$ in (3.).

Beweis *A.* Was (I.) behauptet ist an sich selbst klar; denn 1^2 und $(z-1)^2$ ist *immer* $= \mathfrak{S}z + 1$; was auch z sei. Ist $z = 2$, so ist $1 = z - 1 = 1$.

B. Gäbe es für eine *Stammzahl* z aufser 1 und $z - 1$ noch ein anderes Werthenpaar x_1 und $z - x_1$, so dafs

$$4.\quad x_1^2 = \mathfrak{S}z + 1 \quad und \quad (z - x_1)^2 = \mathfrak{S}z + 1$$

wäre, so müfste, da zugleich nothwendig

$$5.\quad 1^2 = \mathfrak{S}z + 1 \quad und \quad (z - 1)^2 = \mathfrak{S}p + 1$$

ist, (5.) von (4.) abgezogen,

$$(x_1^2-1)=\mathfrak{G}z \text{ und } (z-x_1)^2-(z-1)^2=\mathfrak{G}z \text{ oder}$$

6. $$(x_1-1)(x_1+1)=\mathfrak{G}z \text{ und } (z-x_1-(z-1))(z-x_1+z-1)=\mathfrak{G}z \text{ oder}$$
$$(1-x_1)(2z-(x_1+1)) = \mathfrak{G}z \text{ sein}$$

und also $(x_1-1)(x_1+1)$ und $(1-x_1)(2z-(x_1+1))$ mit z *aufgehen*. Eins und das Andere ist nicht der Fall. Denn da x_1 nicht 1 und auch nicht $z-1$, sondern >1 und $<z-1$ sein soll, so geht weder x_1-1, noch x_1+1, noch $1-x_1$, noch $2z-(x_1+1)$ mit z auf. Also giebt es, wenn z eine *Stammzahl* ist, für x in (1.) *nur das eine* Werthenpaar 1 und $z-1$; gemäfs (II.).

C. Ist $z>2$, und *nicht* eine Stammzahl, so kann es allerdings mit

7. $$x_1^2 = \mathfrak{G}z+w \quad \text{und} \quad (z-x_1)^2 = \mathfrak{G}z+w$$

zugleich, sowohl für $w=1$, für welchen Fall wenigstens das eine $x_1=1$ Statt findet, als für andere Werthe von w, wenn es für solche ein x_1 giebt, auch noch andere Werthe x_2 von x,

8. $$x_2^2 = \mathfrak{G}z+w \quad \text{und} \quad (z-x_2)^2 = \mathfrak{G}z+w$$

geben: denn (8.) von (7.) abgezogen giebt

$$x_1^2-x_2^2 = \mathfrak{G}z \quad \text{und} \quad (z-x_1)^2-(z-x_2)^2 = \mathfrak{G}z \quad \text{oder}$$

9. $$(x_1-x_2)(x_1+x_2) = \mathfrak{G}z \quad \text{und} \quad (x_2-x_1)(2z-(x_1+x_2)) = \mathfrak{G}z,$$

und hier können allerdings x_1-x_2 oder x_2-x_1 mit einigen der Factoren von $z>1$, und x_1+x_2 mit den übrigen Factoren aufgehen. Also kann es in diesem Fall allerdings, sowohl für $w=1$ in (1.), als für andere Werthe von w in (3.), mehr als ein Werthenpaar von x geben. Auch zeigt sich aus (9.), dafs die Anzahl der möglichen Werthenpaare von x von den verschiedenen Factorenpaaren abhängt, in welche z sich zerlegen läfst; gemäfs (III.).

§. 92.

Lehrsatz.

Man bezeichne die zu einer beliebigen Zahl $z>2$ *theilerfremden* φz *Zahlen* >0 *und* $<z$ *durch*

1. $$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ \dots\ z_{\varphi z},$$

während jede derselben durch z_φ *ausgedrückt wird. Ferner sei das Product aller dieser Zahlen*

2. $$z_1 z_2 z_3 \dots z_{\varphi z} = Z,$$

und n *bezeichne die Anzahl der Werthenpaare, welche* x *in der Gleichung*

3. $$x^2 = \mathfrak{G}z+1$$

haben kann (§. 91. III.), *unter der Bedingung, dafs* x *aus den Zahlen* z_φ (1.) *genommen werde.*

I. *Alsdann ist, was auch* $z>2$ *sein mag,*

$$4. \quad Z = \mathfrak{S}z+1, \text{ wenn } n \textit{ gerade und}$$

$$5. \quad Z = \mathfrak{S}z-1, \text{ wenn } n \textit{ ungerade ist.}$$

Ob n *gerade oder ungerade sei, hängt, wie schon in* (§. 91. III. *und* (3.)) *bemerkt, von den verschiedenen Factorenpaaren ab, in welche* z *sich zerlegen läfst; wovon weiter unten.*

II. *Für jeden Nichtquadratrest* $w=z_\varphi$ *zu* z, *also für jedes* $w=z_\varphi$, *welches der Gleichung*

$$6. \quad uv = \mathfrak{S}z+w^{\frac{1}{2}\varphi z}$$

entspricht, wo u *und* v, *eben wie* w, *aus den zu* z *theilerfremden Zahlen* z_φ *genommen, aber nicht einander gleich sind, ist*

$$7. \quad Z = \mathfrak{S}z+w^{\frac{1}{2}\varphi z}.$$

Beispiel zu I. Es sei $z=15$. Alsdann ist z_φ (1.) $=1,2,4,7,8,11,13$ und 14, und das Product dieser z_φ ist $Z=1.2.4.7.8.11.13.14=896\,896$ $=59793.z+1$, während die Zahl n der Werthenpaare 1 und 14 und 4, 11 von x in (3.), welche $x^2=\mathfrak{S}z+1$ geben, $=2$, also *gerade* ist; gemäfs (4.).

Es sei $z=18$. Alsdann ist z_φ (1.) $=1, 5, 7, 11, 13$ und 17, und das Product dieser z_φ ist $Z=1.5.7.11.13.17=85085=4727.z-1$. Hier giebt nur das *eine* Werthenpaar 1 und 17 von x in (3.) $\mathfrak{S}z+1$, so dafs $n=1$ und also *ungerade* ist; gemäfs (5.).

Beispiel zu II. Einer der *Nichtquadratreste* zu $z=15$ ist $w=11$, und $\frac{1}{2}\varphi z$ ist $=4$; desgleichen ist $Z=1.2.4.7.8.11.13.14=896\,896$. Also soll nach (7.) $896\,896=\mathfrak{S}.15+11^4=\mathfrak{S}15+14641$ sein, und in der That ist

$$896\,896 = 18817.15+14641.$$

Beweis von I. *A.* Wenn man in der Gleichung

$$8. \quad uv = \mathfrak{S}z+w,$$

wo w jede der Zahlen z_φ (1.) sein kann, u alle z_φ durchlaufen läfst, so durchläuft nach (§. 85. II.), für *ein- und dasselbe* w, auch v alle die Zahlen z_φ; wiewohl in verschiedener Ordnung.

B. Nun kann nach (§. 90.) u und v sowohl *ungleich* als *gleich* sein; d. h. es kann w sowohl *Nichtquadratrest* als *Quadratrest* sein. Für den letztern Fall schreibe man, wie in (§. 90.), x statt der *gleichen* u und v.

C. Nach (§. 90. I. und III.) sind aber sowohl die *Nichtquadrate* uv, als die *Quadrate* x^2, für ein- und dasselbe w immer *paarweise* vorhanden, und die Gesammtzahl der *Nichtquadrate*, so wie der *Quadrate*, ist immer

gerade. Jene, die Anzahl der *Nichtquadratenpaare*, werde durch m, die der *Quadratenpaare*, wie hier oben für den Rest $w=1$, allgemein für *jedes* w durch n bezeichnet.

D. Läfst man also nun u in (8.) alle z_φ durchlaufen und bezeichnet die zusammengehörigen u und v durch u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3; .... $u_{\varphi z}, v_{\varphi z}$, so dafs

$$9.\quad \begin{cases} u_1 v_1 = \mathfrak{G}z+w, \\ u_2 v_2 = \mathfrak{G}z+w, \\ u_3 v_3 = \mathfrak{G}z+w, \\ \dots\dots\dots \\ u_{\varphi z} v_{\varphi z} = \mathfrak{G}z+w \end{cases}$$

ist, wo nun die v nach (§. 85. II.) ebenfalls, gleich den u, *alle* z_φ sind, so befinden sich unter den φz Gleichungen (9.) $2m$ Gleichungen, in welchen u und v *nicht* einander gleich sind, und $2n$ Gleichungen, in welchen $u=v=x$ ist.

E. Demnach zerfallen also die φz Gleichungen (7.) in folgende *zwei verschiedene Gruppen:*

$$10.\quad \begin{cases} u_1 v_1 = \mathfrak{G}z+w, \\ u_2 v_2 = \mathfrak{G}z+w, \\ u_3 v_3 = \mathfrak{G}z+w, \\ \dots\dots\dots \\ u_{2m} v_{2m} = \mathfrak{G}z+w \end{cases} \quad \text{und} \quad 11.\quad \begin{cases} x_1^2 = \mathfrak{G}z+w, \\ x_2^2 = \mathfrak{G}z+w, \\ x_3^2 = \mathfrak{G}z+w, \\ \dots\dots\dots \\ x_{2n}^2 = \mathfrak{G}z+w. \end{cases}$$

F. Nach (§. 90. II.) enthält schon die *Hälfte* der *Nichtquadratreste* w in (10.) *alle* Werthe, welche u und v haben können; und nach (§. 90. V.) kann kein u oder v in (8.) einem x in (11.) *gleich* sein, so dafs also die x in (11.) durchaus *andere* z_φ sind, als die u und v in (10.), während (10. und 11.) zusammen nothwendig *alle* z_φ enthalten; wie die Gleichungen (9.), aus welchen sie entnommen sind. Endlich gehört nach (§. 90. IV.) zu jedem x in (11.) ein zweites $z-x$, welches, mit ihm multiplicirt, $\mathfrak{G}z-w$ giebt.

G. Nimmt man also aus den Gleichungen (10.) diejenige *Hälfte* m heraus, welche *sämmtlich verschiedene* u und v oder z_φ enthalten; desgleichen die *sämmtlichen* Gleichungen (VI.), welche n *verschiedene Werthenpaare* x und $z-x$ von x und sämmtlich *andere* z_φ enthalten, so kommen nothwendig in diesen $m+2n$ Gleichungen zusammen *alle* z_φ vor; und alle *nur einmal*.

H. Multiplicirt man also jene aus (10.) genommenen m Gleichungen, mit sämmtlich verschiedenen z_φ, in einander und mit den $2n$ Gleichungen (11.), so hat man *links* das Product *aller* z_φ und jedes z_φ, in denselben *nur einmal*, also das Product Z (2.). *Rechts* geben zunächst die m Gleichungen aus (10.)

$(\mathfrak{G}z+w)^m$. Sodann geben die $2n$ Gleichungen (11.), weil *jedes der n Paare zusammengehöriger x*, nemlich x und $z-x$, nach (§. 90. IV.), $\mathfrak{G}z-w$ giebt, $(\mathfrak{G}z-w)^n$. Also ist das Product *aller* der $m+2n$ Gleichungen

$$12. \quad Z=(\mathfrak{G}z+w)^m(\mathfrak{G}z-w)^n.$$

I. Dieses Ergebnifs gilt für *jeden* Werth, welchen w haben kann. Es kann aber w jedenfalls $=1$ für jedes z sein (§. 91.). Also gilt (12.) auch für $w=1$ und giebt alsdann

$$13. \quad Z=(\mathfrak{G}z+1)^m(\mathfrak{G}z-1)^n=(\mathfrak{G}z+1)(\mathfrak{G}z+(-1)^n)=\mathfrak{G}z+(-1)^n,$$

und folglich ist

$$14. \quad Z=\mathfrak{G}z+1, \text{ wenn } n \text{ gerade ist; gemäfs (4.), und}$$

$$15. \quad Z=\mathfrak{G}z-1, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist; gemäfs (5.).}$$

K. Wenn n gerade oder ungerade sei, darauf wird zunächst weiter der Lehrsatz (§. 94.) führen.

Beweis von II. *L.* Für die Gleichung

$$16. \quad uv=\mathfrak{G}z+w$$

kommen nach (§. 90. II.) schon in der *Hälfte der Nichtquadrate uv* für ein- und denselben Nichtquadratrest w alle die φz Werthe von z_φ vor, welche u und v haben können, und jeder dieser Werthe nur einmal.

Also schon die *Hälfte* der φz Producte uv in (16.) enthält alle z_φ, und jedes nur einmal. Mithin erhält man, wenn man diese *Hälfte* der φz Producte uv in (16.) in einander multiplicirt, die Gröfse $z_1 z_2 z_3 \ldots z_{\varphi z}=Z$ (2.); und da nun *jedes* dieser $\frac{1}{2}\varphi z$ Producte durch $\mathfrak{G}z+w$ ausgedrückt wird (16.), so ist

$$17. \quad Z=(\mathfrak{G}z+w)^{\frac{1}{2}\varphi z}=\mathfrak{G}z+w^{\frac{1}{2}\varphi z};$$

gemäfs (7.).

§. 93.

Fünfter Beweis des Wilsonschen Lehrsatzes (§. 48.).

A. Wenn z eine *Stammzahl* ist, so ist

$$1. \quad z_\varphi=1, 2, 3, 4, \ldots z-1,$$

also in (§. 92. 2.)

$$2. \quad Z=1.2.3.4\ldots z-1.$$

B. Nun giebt es nach (§. 91. II.), wenn z eine *Stammzahl* ist, nur das *einzige* Werthenpaar 1 und $z-1$ von x, für welches in (§. 92. 3.) $x^2=\mathfrak{G}z+1$ ist. Also ist dann n in (§. 92.) $=1$, und folglich *ungerade.* Mithin ist alsdann nach (§. 92. 5.) $Z=Nz-1$ und folglich in (2.)

$$3. \quad 1.2.3.4\ldots z-1=\mathfrak{G}z-1.$$

Dieses ist der *Wilson*sche Lehrsatz (§. 48.).

§. 94.

Lehrsatz.

Wenn z *eine beliebige Zahl ist und* x *beliebige, aus den* φz *zu* z *theilerfremden Zahlen* >0 *und* $<z$ *bezeichnet, so sind nach* (§. 90. III. *und* IV.) *die Werthe von* x, *die der Gleichung*

$$1.\quad x^2 = \mathfrak{G}z + r$$

genugthun, in welcher r *nach* (§. 85.) *nothwendig stets ebenfalls eine der zu* z *theilerfremden Zahlen* z_φ *ist, immer paarweise vorhanden; und zwar, wenn* x_1 *der eine Werth von* x *ist, so ist* $z-x_1$ *der andere.*

Für $r=1$ *in* (1.), *also für die Gleichung*

$$2.\quad x^2 = \mathfrak{G}z + 1,$$

haben wir in (§. 92.) *die Anzahl der Werthenpaare von* x, *die diese Gleichung erfüllen, durch* n *bezeichnet, so dafs also, wenn man* x *in der Gleichung* (1.) *alle* z_φ *durchlaufen läfst,* 2n *dieser Werthe* z_φ *von* x *in* (2.) *den Rest* $r=1$ *geben.*

Ferner haben wir in (§. 92.) *und auch schon in* (§. 91. III.) *bemerkt, dafs jene Zahl* n *von der Anzahl und Art der Factorenpaare abhängt, in welche* z *sich zerlegen läfst.*

Mit der Anzahl n *der Quadratwurzelpaare, für einen und denselben Rest* r, *ferner mit der Anzahl der möglichen verschiedenen Quadratreste* r *selbst in* (1.) *für ein bestimmtes* z, *und mit den Eigenschaften dieser Quadratreste* r *verhält es sich nun weiter wie folgt.*

I. *Zu andern Werthen von* r *in* (1.) *gehören andere* x; *also, wenn man die zu einem bestimmten* r *gehörigen* x *durch* x_r *und die zu einem andern* r_1 *gehörigen* x *durch* x_{r_1} *bezeichnet, so kann nicht* $x_r = x_{r_1}$ *sein.*

II. *Zu jedem Werth, welchen* r *in* (1.) *haben kann, gehören gleich viele* x; *also gehören, da immer* $r=1$ *sein kann, und folglich die Gleichung* (2.) *mit ihren* 2n *verschiedenen Werthen von* x *immer Statt findet, zu jedem* r *in* (1.) 2n *verschiedene und zu jedem* r, 2n *andere* x. *Man findet diese* 2n *andern Werthe von* x_r *für ein bestimmtes* r, *z. B. aus den* 2n *Werthen von* x_1 *für* $r=1$ *in* (2.), *wenn man in der Gleichung*

$$3.\quad x_1 x_r = \mathfrak{G}z + (x_r)$$

dem x_r *links irgend einen der Werthe von* x_r, *gleichviel welchen, dem andern Factor* x_1 *aber der Reihe nach alle die* 2n *Werthe beilegt, welche*

x_1 *in* (2.) *haben kann. Alsdann drückt* (x_r) *rechts alle die Werthe aus, welche* x_r *haben kann; und sie alle thun der Gleichung* (1.) *Genüge.*

III. *Die verschiedenen* x, *zu den verschiedenen* r *gehörig, sind alle die* φz *zu* z *theilerfremden Zahlen* $z_\varphi > 0$ *und* $< z$, *und jede kommt, wenn man* r *seine verschiedenen Werthe durchlaufen läfst, nur einmal vor; so also, dafs, wenn man die Anzahl der zu* z *Statt findenden verschiedenen Quadratreste* r *durch* ν *bezeichnet,*

$$4. \quad \varphi z = 2n\nu$$

ist.

IV. *Das Product einer beliebigen Anzahl gleicher oder ungleicher Quadratreste* r, *also auch eine beliebige Potenz eines Quadratrestes* r, *läfst, durch* z *dividirt, immer wieder einen der Quadratreste zum Rest, so dafs also immer*

$$5. \begin{cases} 1. \quad r_1 r_2 r_3 \ldots r_\sigma = \mathfrak{G}z + r_\mu \text{ und} \\ 2. \quad r^\tau = \mathfrak{G}z + r_\mu \end{cases}$$

ist, wo r_μ *irgend eines der* r *bezeichnet und* σ *in* (5.1) *und* τ *in* (5.2.) *beliebige positive ganze Zahlen sein können.*

V. *Für jeden der Quadratreste* r *ist*

$$6. \quad r^\nu = \mathfrak{G}z + 1,$$

oder, nach (4.) *ausgedrückt,*

$$7. \quad r^{\frac{\varphi z}{2n}} = \mathfrak{G}z + 1;$$

doch können auch schon niedrigere Potenzen von r *als die* ν*te, durch* z *dividirt, den Rest* 1 *lassen. Jedenfalls aber giebt die* ν*te Potenz von* r *den Rest* 1.

VI. *Wenn man*

$$8. \quad x_1^2 = \mathfrak{G}z + 1 \text{ und } x_r^2 = \mathfrak{G}z + r,$$

und dann weiter

$$9. \quad r^2 = \mathfrak{G}z + \overset{1}{r},$$

$$10. \quad r x_1 = \mathfrak{G}z + (x)$$

setzt, so ist (x) *in* (10.) *ebenfalls eines der zu* $\overset{1}{r}$ *in* (9.) *gehörigen* x, *also*

$$11. \quad (x)^2 = \mathfrak{G}z + \overset{1}{r},$$

und für jedes r *in* (9.) *und* (10.) *ein anderes. Man findet also auch zu* $r > 1$ *gehörige* x *aus denen, welche zu* $r = 1$ *gehören, wenn man die letzteren nach* (10.) *mit* r *multiplicirt und das Product durch* z *dividirt.*

VII. *Geht* z *mit* 2 *auf, so geben nicht blofs* x *und* z — x, *wie für jedes beliebige* z, *sondern auch*

$$12.\quad x,\ \tfrac{1}{2}z-x,\ \tfrac{1}{2}z+x\ \text{ und }\ z-x$$

einen und denselben Quadratrest r *zu* z.

VIII. *Da nach* (II.) *zu jedem Werth, welchen* r *haben kann, gleichviele* x *gehören, so kommt es nur darauf an, wie viele verschiedenen Werthe* x *es für die Gleichung*

$$13.\quad x^2 = \mathfrak{G}z+1\ (2.)$$

giebt. Ebensoviele Werthe hat x *in der Gleichung* (1.) *für jedes* r.

Die Anzahl der verschiedenen in (13.) *möglichen* x *nun läfst sich finden, wenn man* z *auf alle mögliche Weise in zwei Factoren* $\varkappa$ *und* λ *zerlegt, also*

$$14.\quad z = \varkappa\lambda$$

und statt (13.) $x^2 = \mathfrak{G}\varkappa\lambda + 1$ *setzt, woraus* $x^2 - 1 = \mathfrak{G}\varkappa\lambda$ *oder*

$$15.\quad (x+1)(x-1) = \mathfrak{G}\varkappa\lambda$$

folgt. Man kann dann die Bedingung machen, dafs x + 1 *mit dem einen der Factoren* $\varkappa = \lambda$, x — 1 *mit dem andern aufgehe. Alsdann verhält es sich mit den verschiedenen* x, *die der Gleichung* (13.) *genugthun, wie folgt.*

a. Für Factorenpaare $\varkappa$ *und* λ *von* z, *welche einen gröfsern Gemeintheiler als* 2 *haben, giebt es kein* x *für* (13.).

b. Zu jedem theilerfremden Paare von Factoren $\varkappa$ *und* λ *von* z, *die beide ungerade sind, gehört ein, und nur ein Werthenpaar von* x, *nemlich*

$$16.\quad \overset{1}{x} = x\ \text{ und }\ \overset{2}{x} = z - x,$$

und jedes andere Factorenpaar dieser Art giebt ein anderes Werthenpaar von x.

c. Zu jedem theilerfremden Paare von Factoren $\varkappa$ *und* λ *von* z, *deren einer ungerade ist, während der andere mit* 2, *aber nur mit der ersten Potenz von* 2 *aufgeht, gehört ebenfalls ein, und nur ein Werthenpaar von* x, *wie das* (16.); *aber nicht zu jedem andern Factorenpaare dieser Art gehört ein anderes Werthenpaar von* x, *sondern* $\frac{1}{2}\varkappa$ *und* 2λ *oder* $2\varkappa$ *und* $\frac{1}{2}\lambda$, *je nachdem* $\varkappa$ *oder* λ *gerade ist, geben das nemliche Werthenpaar von* x, *wie* $\varkappa$ *und* λ *selbst. Und dann kommt von den Werthenpaaren von* x, *die alle den verschiedenen Factorenpaaren dieser Art entsprechen, jedes zweimal vor.*

d. Zu jedem theilerfremden Paare von Factoren $\varkappa$ und λ von z, deren einer ungerade ist, während der andere mit einer höhern Potenz von 2 als der ersten aufgeht, gehört wiederum ein, und nur ein Werthenpaar von x, *wie das* (16.). *Hier gehört zu jedem andern Factorenpaare dieser Art ein anderes Werthenpaar von* x. *Z[illegible]t giebt es je noch ein zweites Factorenpaar von* z, *nemlich* $\frac{1}{2}\varkappa$ *und* 2λ *wenn* λ, *und* $2\varkappa$ *und* $\frac{1}{2}\lambda$ *wenn* $\varkappa$ *ungerade ist, dem das nemliche Werthenpaar von* x *zukommt, wie dem Factorenpaare* $\varkappa$ *und* λ *selbst, aber dieses zweite Factorenpaar findet sich nicht unter denen der gegenwärtigen Art, sondern nur unter denen, die mit* 2 *gemeintheilbar sind.*

e. Zu jedem Paare von Factoren $\varkappa$ *und* λ *von* z, *die beide mit der ersten Potenz von* 2 *aufgehen, gehören zwei, und nur zwei Werthenpaare von* x, *nemlich folgende:*

$$17.\quad \overset{1}{x} = x \quad \textit{und} \quad \overset{2}{x} = z - x,$$

$$18.\quad \overset{3}{x} = \tfrac{1}{2}z + x \quad \textit{und} \quad \overset{4}{x} = \tfrac{1}{2}z - x.$$

Zu jedem andern Factorenpaare der gegenwärtigen Art gehören zwei andere Werthe von x, *wie* (17. *und* 18.). *Zugleich sind zwei von den vier Werthen von* x (17. *und* 18.) *die nemlichen, welche zu dem Factorenpaare* $\frac{1}{2}\varkappa$ *und* 2λ *gehören, wenn* $\frac{1}{2}\varkappa$ *ungerade ist, und zu dem Factorenpaare* $2\varkappa$ *und* $\frac{1}{2}\lambda$, *wenn* $\frac{1}{2}\lambda$ *ungerade ist; und immer ist entweder* $\frac{1}{2}\varkappa$ *oder* $\frac{1}{2}\lambda$ *ungerade.*

IX. *a. Ist* z *ungerade, so geben die theilerfremden Paare von Factoren* (VIII. *b.*), *welche beide ungerade sind, alle* x, *welche der Gleichung* $x^2 = \mathfrak{S}z + 1$ *genugthun. Also giebt es dann eben so viele Werthenpaare von* x, *als theilerfremde Factorenpaare von* z.

b. Geht z *nur mit der ersten Potenz von* 2 *auf, so giebt schon die Hälfte der theilerfremden Paare von Factoren* (VIII. *c.*), *deren einer gerade, der andere ungerade ist, alle* x, *welche der Gleichung* $x^2 = \mathfrak{S}z + 1$ *genugthun. Also giebt es in diesem Falle halb so viele Werthenpaare von* x, *als theilerfremde Factorenpaare von* z.

c. Geht endlich z *mit einer höhern als der ersten Potenz von* 2 *auf, so geben schon die verschiedenen mit* 2, *aber mit keiner gröfsern Zahl, gemeintheilbaren Paare von Factoren von* z *allein alle* x, *welche der Gleichung* $x^2 = \mathfrak{S}z + 1$ *genugthun. Also giebt es in diesem Fall*

doppelt so viele Werthenpaare von x, *als durch* 2 *aber durch keine größere Zahl gemeintheilbare Factorenpaare von* z.

Auf welche Weise hängt denn also in Folge der Gesetze (VIII. und IX.) *die Anzahl* 2n *der verschiedenen möglichen Quadratwurzeln* x *für* z *zu dem Rest* 1 *in* (13.), *so wie zu jedem beliebigen andern Rest* r, *da jeder beliebige Rest nach* (II.) *immer dieselbe Anzahl* 2n *von* x *zukommt, von der Zahl und Art der Factorenpaare* κ *und* λ *von* z (4.) *ab, aus welchen sich* z *durch die Multiplication zusammensetzen läßt.*

Erstes Beispiel. Es sei

19. $z = 180 = 2^2 . 3^2 . 5.$

Die zu z *theilerfremden* Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ sind folgende:

20. $z_\varphi =$ 1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 53 59 61 67 71 73 77 79 83 89
91 97 101 103 107 109 113 119 121 127 131 133 137 139 143 149 151 157 161 163 167 169 173 179.

Ihre *Anzahl* ist

21. $\varphi z = 48.$

Läßt man nun in (1.) x *alle* diese Zahlen durchlaufen, so findet sich

22.

Für $x =$	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49	53	59	61	67	71	73	77	79	83	89
$r =$	1	49	121	169	109	1	169	121	61	109	61	49	49	61	109	61	121	169	1	109	169	121	49	1
Für $x =$	91	97	101	103	107	109	113	119	121	127	131	133	137	139	143	149	151	157	161	163	167	169	173	179,
$r =$	1	49	121	169	109	1	169	121	61	109	61	49	49	61	109	61	121	169	1	109	169	121	49	1.

Es giebt also hier, wie sich zeigt, die

23. $\nu = 6$ verschiedenen *Quadratreste* $r = 1, 49, 61, 109, 121$ und 169,

sämmtlich aus den Zahlen z_φ (20.), und zu *jedem* derselben gehören

24. $2n = 8$, also $n = 4$

verschiedene Werthenpaare von x, nemlich

25.
1. zu $r = 1$ gehören die 4 Werthenpaare 1 u. 179, 19 u. 161, 71 u. 109, 89 u. 91 von $x = x_1$,
2. zu $r = 49$ - - - - - - - - 7 u. 173, 43 u. 137, 47 u. 133, 83 u. 97 von $x = x_{49}$,
3. zu $r = 61$ - - - - - - - - 31 u. 149, 41 u. 139, 49 u. 131, 59 u. 121 von $x = x_{61}$,
4. zu $r = 109$ - - - - - - - - 17 u. 163, 37 u. 143, 53 u. 127, 73 u. 107 von $x = x_{109}$,
5. zu $r = 121$ - - - - - - - - 11 u. 169, 29 u. 151, 61 u. 119, 79 u. 101 von $x = x_{121}$,
6. zu $r = 169$ - - - - - - - - 13 u. 167, 23 u. 157, 67 u. 113, 77 u. 103 von $x = x_{169}$;

sämmtlich in der Form x und $z - x$ begriffen.

Die verschiedenen Behauptungen des Lehrsatzes zeigen sich an diesen Beispielen wie folgt.

I. Zu jedem *andern* Werth von r gehören gemäß (25.) *andere* x; gemäß (I.).

II. Zu *jedem* der $\nu=6$ (23.) verschiedenen r gehören gemäfs (25.) *gleichviele* x, nemlich zu jedem $2n=8$ verschiedene x, gemäfs (II.).

Man findet ferner, z. B. aus den $2n=8$ Werthen (25. 1.) von x_1, welche zu $r=1$ gehören, die zu $r=61$ gehörigen $2n=8$ Werthe von $x_r=x_{61}$ (25. 3.), wenn man in der Gleichung (3.) dem x_r links irgend einen der Werthe von x_r giebt, z. B. wenn man $x_r=41$ (25. 3.) setzt, und dann x_1 in (3.) alle seine 8 Werthe 1, 19, 71, 89, 91, 109, 161 und 179 (25. 1.) durchlaufen läfst. Es ergiebt sich auf diese Weise nach (2.)

$$26.\quad 41\,(1, 19, 71, 89, 91, 109, 161, 179)$$
$$= \mathfrak{G}.180+41, 59, 31, 49, 131, 149, 121 \text{ und } 139,$$

also ist in (3.)

$$27.\quad (x_r) = 41, 59, 31, 49, 131, 149, 121 \text{ und } 139;$$

und dies sind in der That alle die $2n=8$ Werthe (25. 3.) von $x_r=x_{61}$.

III. Die verschiedenen x zu den verschiedenen r sind gemäfs (25.) *alle* die Zahlen z_φ (20.), und keine derselben kommt mehr als einmal vor, so dafs nach (3.) φz oder $48\,(21.)=2n.\nu=8.6$ ist; gemäfs (III.).

IV. Multiplicirt man z. B. die vier Quadratreste 49, 49, 109 und 121 mit einander, so ist das Product $31666789 = 175926.z+109$, und der Rest 109 ist ebenfalls einer der Quadratreste r (23.). Nimmt man z. B. die 5te *Potenz* des Quadratrestes $r=61$, so giebt dieselbe $844596301 = 4693201.z+121$ und der Rest 121 ist wiederum einer der Quadratreste r (23.); gemäfs (IV.).

V. Da hier $\nu=6$ ist (23.), so soll nach (6.), z. B. für den Quadratrest $r=49$, $49^6=\mathfrak{G}z+1$ sein, und es ist $49^2=2401=\mathfrak{G}z+61$, also $49^6=\mathfrak{G}z+61^3=\mathfrak{G}z+226981=\mathfrak{G}z+1$; wie es sein soll. Von $r=61$ ist aber schon die 3te Potenz, und von $r=109$ schon die 2te Potenz $=\mathfrak{G}z+1$: also von $r=61$ und 109 geben auch schon *niedrigere* als die $\nu=6$te Potenz $\mathfrak{G}z+1$; gemäfs (V.).

VI. Multiplicirt man z. B. das zu $x_1^2=\mathfrak{G}z+1$ gehörige $x_1=71$ (25. 1.) der Reihe nach mit $r=1, 49, 61, 109, 121$ und 169, so giebt (10.)

$$28.\quad rx_1 = 71, 3479, 4331, 7739, 8591 \text{ und } 11999$$
$$= \mathfrak{G}z+71, 59, 11, 179, 131 \text{ und } 119,$$

also in (10.)

$$29.\quad (x) = 71, 59, 11, 179, 131 \text{ und } 119.$$

Desgleichen giebt (9.) für die nemlichen Werthe von r:

$$30.\quad r^2=5041, 2401, 3721, 11881, 14641 \text{ und } 28561=\mathfrak{G}z+1, 61, 121, 1, 61 \text{ und } 121,$$

also in (9.)

$$31. \quad r = 1, 61, 121, 1, 61 \text{ und } 121.$$

Es soll also nach (11.)

$$32. \quad 71^2 = \mathfrak{S}z + 1,\; 59^2 = \mathfrak{S}z + 61,\; 11^2 = \mathfrak{S}z + 121,\; 179^2 = \mathfrak{S}z + 1,$$
$$131^2 = \mathfrak{S}z + 61 \text{ und } 119^2 = \mathfrak{S}z + 121$$

sein, was auch, wie aus (22.) zu sehen, in der That der Fall ist; gemäfs (VI.).

VII. Für $x = 41$ ist in $x^2 = \mathfrak{S}z + r$ (1.) gemäfs (22.) $r = 61$, und für $\frac{1}{2}z - x = 90 - 41 = 59$, $\frac{1}{2}z + x = 90 + 41 = 131$ und $z - x = 180 - 41 = 139$ ist r ebenfalls $= 61$; wie es gemäfs (VII. 12.) sein mufs, da $z = 180$ mit 2 aufgeht.

VIII. Die Factorenpaare $\varkappa$ und λ, in welche $z = 180$ sich zerlegen läfst, sind folgende:

$$33. \quad \begin{cases} \varkappa = & 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 9 \;\; 10 \;\; 12 \;\; 15 \;\; 18 \;\; 20 \;\; 30 \;\; 36 \;\; 45 \;\; 60 \;\; 90 \;\; 180, \\ \lambda = & 180 \;\; 90 \;\; 60 \;\; 45 \;\; 36 \;\; 30 \;\; 20 \;\; 18 \;\; 15 \;\; 12 \;\; 10 \;\; 9 \;\; 6 \;\; 5 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 1. \end{cases}$$

a. Setzt man nun in (15.) z. B. $\varkappa = 12$, $\lambda = 15$, welches Factorenpaar den Theiler $3 > 2$ gemein hat, so geht für *keinen einzigen* der Werthe z_φ (20.), welche x haben könnte, $x + 1$ mit einem der Factoren $\varkappa = 12$ und $\lambda = 15$ und $x - 1$ mit dem andern auf. Legt man nemlich dem x die *erste Hälfte* der Werthe von z_φ (22.) bei (und nur diese ist zu untersuchen, indem, falls in der zweiten Hälfte sich ein passendes x fände, das nothwendig zugehörige $z - x$ in die erste Hälfte fallen würde), so findet sich

$$34. \quad \begin{cases} \text{Für} \quad x = 1\; 7\; 11\; 13\; 17\; 19\; 23\; 29\; 31\; 37\; 41\; 43\; 47\; 49\; 53\; 59\; 61\; 67\; 71\; 73\; 77\; 79\; 83\; 89, \\ \quad x + 1 = 2\; 8\; 12\; 14\; 18\; 20\; 24\; 30\; 32\; 38\; 42\; 44\; 48\; 50\; 54\; 60\; 62\; 68\; 72\; 74\; 78\; 80\; 84\; 90, \\ \quad x - 1 = 0\; 6\; 10\; 12\; 16\; 18\; 22\; 28\; 30\; 36\; 40\; 42\; 46\; 48\; 52\; 58\; 60\; 66\; 70\; 72\; 76\; 78\; 82\; 88; \end{cases}$$

und von allen diesen $x + 1$ und $x - 1$ geht kein einziges Paar mit 12 und 15 auf. Geht ja $x + 1$ mit 12 oder 15 auf, so geht $x - 1$ nicht mit 15 oder 12 auf. Also giebt es für $\varkappa = 12$ und $\lambda = 15$, deren Gemeintheiler $3 > 2$ ist, *kein* x; gemäfs (VIII. *a.*).

Es müssen demnach in (33.) die Factorenpaare 3 und 60, 6 und 30, 12 und 15, 15 und 12, 30 und 6, 60 und 3 ganz *ausgeschlossen* werden. Von den übrig bleibenden aber ist wiederum nur die *Hälfte* zu berücksichtigen, da sie, blofs *verwechselt*, paarweise *dieselben* sind, und $\varkappa$ oder λ sowohl den einen als den andern Factor von z bezeichnen kann. Es bleiben also nur folgende Factorenpaare von z zu berücksichtigen:

$$35. \quad \begin{cases} \varkappa = & 1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 9 \;\; 10, \\ \lambda = & 180 \;\; 90 \;\; 45 \;\; 36 \;\; 20 \;\; 18. \end{cases}$$

b. Nimmt man nun von diesen $\varkappa$ und λ, z. B. das *theilerfremde* Factorenpaar 5 und 36, so soll nach (15.)

$$36. \quad (x+1)(x-1) = \mathfrak{S}.5.36$$

sein und $x+1$ mit 5 oder 36 und zugleich $x-1$ mit 36 oder 5 *aufgehen.* Wie aus (34.) zu sehen, erfüllt *nur allein* $x=71$ diese Bedingung. Es giebt also zu dem *theilerfremden* Factorenpaare 5 und 36 von z nur das *einzige* Werthenpaar $x=71$ und $z-x=109$ von x; gemäfs (VIII. *b.*).

Die übrigen theilerfremden Factorenpaare in (35.) sind 1 und 180, 4 und 45, 9 und 20. Zufolge (34.) pafst 1 und 180 nur für $x=1$, 4 und 45 nur für $x=89$, und 9 und 20 nur für $x=19$, also ist zusammen

$$37. \quad \begin{cases} \overset{1}{x} = 71, & \overset{2}{x} = 109 \quad \text{für } \varkappa, \lambda = 5, 36, \\ \overset{1}{x} = 1, & \overset{2}{x} = 179 \quad \text{für } \varkappa, \lambda = 1, 180, \\ \overset{1}{x} = 89, & \overset{2}{x} = 91 \quad \text{für } \varkappa, \lambda = 4, 45, \\ \overset{1}{x} = 19, & \overset{2}{x} = 161 \quad \text{für } \varkappa, \lambda = 9, 20. \end{cases}$$

Alle diese Werthe von x sind von einander *verschieden;* gemäfs (VIII. *b.*).

c. Eins der Factorenpaare $\varkappa$ und λ von z in (35.), welches 2 zum Gemeintheiler hat, ist 10 und 18. Für dieses also soll in (34.)

$$38. \quad (x+1)(x-1) = \mathfrak{S}.10.18$$

sein und $x+1$ mit 10 oder 18 und zugleich $x-1$ mit 18 oder 10 aufgehen. Zufolge (34.) wird diese Bedingung nur durch $x=19$ und 71 erfüllt, wozu $z-x=161$ und 109 gehört. Ein anderes Factorenpaar $\varkappa$ und λ, mit dem Gemeintheiler 2, ist 2 und 90; und für dieses pafst in (34.) $x=1$ und 89, wozu $z-x=179$ und 91 gehört. Es ist also zusammen, nach der Bezeichnung (17. und 18.),

$$39. \quad \begin{cases} \overset{1}{x}=19, \ \overset{2}{x}=71, \ \overset{3}{x}=109 \text{ und } \overset{4}{x}=161 \text{ für } \varkappa, \lambda = 10, 18 \text{ und} \\ \overset{1}{x}=1, \ \overset{2}{x}=89, \ \overset{3}{x}=91 \text{ und } \overset{4}{x}=179 \text{ für } \varkappa, \lambda = 2, 90, \end{cases}$$

und man sieht, dafs gemäfs (17. und 18.) $\overset{2}{x}=\frac{1}{2}z-\overset{1}{x}$, $\overset{3}{x}=\frac{1}{2}z+\overset{1}{x}$ und $\overset{4}{x}=z-\overset{1}{x}$ ist. Jedes der Factorenpaare mit dem Gemeintheiler 2 giebt also *zwei* Werthenpaare von x; wie es nach (VIII. *c.*) sein soll.

d. Eines der theilerfremden Factorenpaare $\varkappa$ und λ von z in (35.), *von der Art,* wie sie (VIII. *d.*) verlangt, nemlich, dafs einer der Factoren mit einer höhern als der zweiten Potenz von 2 aufgehe, der andere mit 2

gar nicht, ist 4 und 45. Das zu diesem Factorenpaar gehörige eine Werthenpaar von x ist, nach (VIII. *e.*) bezeichnet,

$$40.\quad (\overset{1}{x}) = 89 \text{ und } (\overset{2}{x}) = 91.$$

Ferner ist, wenn man $\varkappa = 4$ und $\lambda = 45$ sein läfst, $\frac{1}{2}\varkappa = 2$ und $2\lambda = 90$. Zu diesem Factorenpaar 2 und 90 gehört nach (39.)

$$41.\quad \overset{1}{x} = 1,\quad \overset{2}{x} = 89,\quad \overset{3}{x} = 91 \text{ und } \overset{4}{x} = 179,$$

und, wie aus (39. und 40.) zu sehen, ist

$$42.\quad (\overset{1}{x}) = \overset{2}{x} \text{ und } (\overset{2}{x}) = \overset{3}{x};$$

gemäfs (VIII. *d.*).

e. Die zu den *theilerfremden* Factoren $\varkappa = 4$ und $\lambda = 45$ gehörigen x sind unter den zu $\frac{1}{2}\varkappa = 2$ und $2\lambda = 90$ gehörigen x mitbegriffen. Auf dieselbe Weise sind, wie aus (37. und 38.) zu sehen, die zu den übrigen theilerfremden Factorenpaaren 5 und 36, 1 und 180 und 9 und 20 gehörigen x, der Reihe nach unter den zu 10 und 18, 2 und 90 und 18 und 10 gehörigen (34.) mitbegriffen; gemäfs (VIII. *e.*).

IX. Um an Beispielen zu sehen, was (IX.) im Lehrsatz behauptet, setzen wir die nach der obigen Art sich findenden Resultate noch für einige andere z her.

Zweites Beispiel. Es sei

$$43.\quad z = 45 = 3^2.5.$$

Hier ist

$$44.\quad z_\varphi = 1\ 2\ 4\ 7\ 8\ 11\ 13\ 14\ 16\ 17\ 19\ 22\ 23\ 26\ 28\ 29\ 31\ 32\ 34\ 37\ 38\ 41\ 43\ 44,$$

$$45.\quad \varphi z = 24,$$

$$46.\quad r = 1\ 4\ 16\ 19\ 31 \text{ und } 34, \text{ also } \nu = 6 \text{ und } 2n = 4 \text{ (III.)}.$$

Ferner ist für die Gleichung (1.)

$$47.\quad \begin{cases} x_1 = 1\ 19\ 26\ 44 & \text{für } r = 1, \\ x_4 = 2\ 7\ 38\ 43 & \text{-}\quad r = 4, \\ x_{16} = 4\ 14\ 31\ 41 & \text{-}\quad r = 16, \\ x_{19} = 8\ 17\ 28\ 37 & \text{-}\quad r = 19, \\ x_{31} = 11\ 16\ 29\ 34 & \text{-}\quad r = 31, \\ x_{34} = 13\ 22\ 23\ 32 & \text{-}\quad r = 34. \end{cases}$$

Sodann ist für (14.)

$$48.\quad \begin{cases} \varkappa = 1\quad 3\quad 5, \\ \lambda = 45\quad 15\quad 9, \end{cases}$$

wovon nach (VIII. *a.*) 3 und 15, mit dem Gemeintheiler $3 > 2$, nicht in Betracht kommt.

Für die Gleichung

$$49.\quad (x+1)(x-1) = \mathfrak{S}\varkappa\lambda \quad (15.)$$

ist

$$50.\quad \begin{cases} \overset{1}{x} = 1, & \overset{2}{x} = 44 \quad \text{für} \quad \varkappa, \lambda = 1, 45, \\ \overset{1}{x} = 19, & \overset{2}{x} = 26 \quad \text{für} \quad \varkappa, \lambda = 5, 9. \end{cases}$$

Drittes Beispiel. Es sei

$$51.\quad z = 126 = 2.3^2.7.$$

Hier ist

$$52.\quad z_\varphi = 1\ 5\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 25\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 55\ 59\ 61\ 65\ 67\ 71\ 73\ 79\ 83\ 85\ 89\ 95\ 97\ 101\ 103\ 107\ 109\ 113\ 115\ 121\ 125,$$

$$53.\quad \varphi z = 36,$$

$$54.\quad r = 1\ 25\ 37\ 43\ 67\ 79\ 85\ 109 \text{ und } 121, \text{ also } \nu = 9 \text{ und } 2n = 4 \text{ (III.)}.$$

Ferner ist für die Gleichung (1.)

$$55.\quad \begin{cases} x_1 = 1\ \ 55\ \ 71\ \ 125 & \text{für} \quad r = 1, \\ x_{25} = 5\ \ 23\ \ 103\ \ 121 & - \quad r = 25, \\ x_{37} = 17\ \ 53\ \ 73\ \ 109 & - \quad r = 37, \\ x_{43} = 13\ \ 41\ \ 85\ \ 113 & - \quad r = 43, \\ x_{67} = 47\ \ 61\ \ 65\ \ 79 & - \quad r = 67, \\ x_{79} = 31\ \ 59\ \ 67\ \ 95 & - \quad r = 79, \\ x_{85} = 29\ \ 43\ \ 83\ \ 97 & - \quad r = 85, \\ x_{109} = 19\ \ 37\ \ 89\ \ 107 & - \quad r = 109, \\ x_{121} = 11\ \ 25\ \ 101\ \ 115 & - \quad r = 121. \end{cases}$$

Sodann ist für (14.)

$$56.\quad \begin{cases} \varkappa = 1\ \ 2\ \ 3\ \ 6\ \ 7\ \ 9, \\ \lambda = 126\ \ 63\ \ 42\ \ 21\ \ 18\ \ 14; \end{cases}$$

wovon nach (VIII. *a.*) die Factorenpaare 3, 42 und 6, 21, mit dem Gemeintheiler $3 > 2$, nicht in Betracht kommen.

Für die Gleichung

$$57.\quad (x+1)(x-1) = \mathfrak{S}\varkappa\lambda \quad (15.)$$

ist

$$58.\quad \begin{cases} \underset{1}{x} = 1, & \underset{2}{x} = 126 \quad \text{für} \quad \varkappa, \lambda = 1, 126, \\ \underset{1}{x} = 1, & \underset{2}{x} = 126 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 2, 63, \\ \underset{1}{x} = 55, & \underset{2}{x} = 71 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 7, 18, \\ \underset{1}{x} = 55, & \underset{2}{x} = 71 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 9, 14. \end{cases}$$

Viertes Beispiel. Es sei

$$59.\quad \varkappa = 120 = 2^3.3.5.$$

Hierin ist

$$60.\quad x_\varphi = 1\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47\ 49\ 53\ 59\ 61\ 67\ 71\ 73\ 77\ 79\ 83\ 89\ 91\ 97\ 101\ 103\ 107\ 109\ 113 \text{ und } 119,$$

$$61.\quad \varphi\varkappa = 32,$$

$$62.\quad r = 1 \text{ und } 49, \text{ also } \nu = 2 \text{ und } 2n = 16 \text{ (III.)}.$$

Ferner ist für die Gleichung (1.)

$$63.\quad \begin{cases} x_1 = 1\ 11\ 19\ 29\ 31\ 41\ 49\ 59\ 61\ 71\ 79\ 89\ 91\ 101\ 109 \text{ und } 119 \text{ für } r = 1, \\ x_{49} = 7\ 13\ 17\ 23\ 37\ 43\ 47\ 53\ 67\ 73\ 77\ 83\ 97\ 103\ 107 \text{ und } 113 \text{ für } r = 49. \end{cases}$$

Sodann ist für (14.)

$$64.\quad \begin{cases} \varkappa = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 10, \\ \lambda = 120\ 60\ 40\ 30\ 24\ 20\ 15\ 12, \end{cases}$$

von welchen Factorenpaaren 1, 120; 3, 40; 5, 24 und 8, 15 *theilerfremd* sind, 2, 60; 4, 30; 6, 20 und 10, 12 hingegen 2 zum Gemeintheiler haben.

Für die Gleichung

$$65.\quad (x+1)(x-1) = \varkappa\lambda \text{ (15.)}$$

ist

$$66.\quad \begin{cases} \overset{1}{x} = 1, & \overset{2}{x} = 119, \text{ für } \varkappa, \lambda = 1, 120, \\ \overset{1}{x} = 41, & \overset{2}{x} = 79 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 3, 40, \\ \overset{1}{x} = 49, & \overset{2}{x} = 71 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 5, 24, \\ \overset{1}{x} = 31, & \overset{2}{x} = 89 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 8, 15; \end{cases}$$

$$67.\quad \begin{cases} \overset{1}{x} = 1, & \overset{2}{x} = 59, & \overset{3}{x} = 61, & \overset{4}{x} = 119 \text{ für } \varkappa, \lambda = 2, 60, \\ \overset{1}{x} = 29, & \overset{2}{x} = 31, & \overset{3}{x} = 89, & \overset{4}{x} = 91 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 4, 30, \\ \overset{1}{x} = 19, & \overset{2}{x} = 41, & \overset{3}{x} = 79, & \overset{4}{x} = 101 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 6, 20, \\ \overset{1}{x} = 11, & \overset{2}{x} = 49, & \overset{3}{x} = 71, & \overset{4}{x} = 109 \quad - \quad \varkappa, \lambda = 10, 12. \end{cases}$$

An diesen verschiedenen Beispielen wird nun was (IX.) behauptet wie folgt zu sehen sein.

a. $\varkappa = 45$ im *zweiten Beispiel* geht *nicht* mit 2 auf, also auch kein $\varkappa$ und λ (48.), und die zu den *theilerfremden* $\varkappa$ und λ 1, 45 und 5, 9 gehörigen Werthe 1, 44, 19 und 26 von x (50.) sind *alle*, die es nach (46.) für x_1 giebt; gemäſs (IX. *a.*).

b. Im *dritten Beispiel* geht $\varkappa = 126$ mit 2, und nur mit 2, auf. Von den *Factorenpaaren* $\varkappa$ und λ = 1, 126; 2, 63; 7, 18 und 9, 14 (56.), die

hier in Betracht kommen, geht *ein* Factor mit 2 und mit keiner höhern Potenz von 2 auf, und die zu der *Hälfte* dieser Factorenpaare 1, 126 und 7, 18 gehörigen Werthe 1, 125, 55 und 71 von x (58.) sind *alle*, die es nach (55.) für x_1 giebt; gemäfs (IX. *b.*). Die andern beiden Factorenpaare 2, 63 und 9, 14 sind die $\frac{1}{2}\varkappa$ und 2λ der vorigen und geben, wie es nach (VIII. *c.*) sein mufs, *dieselben* x.

Ferner zeigt sich noch was (VIII. *d.*) behauptet auch an dem *vierten Beispiel.* Die Werthe von x für $\varkappa, \lambda = 1, 120$ sind unter denen für $2\varkappa$ und $\frac{1}{2}\lambda = 2, 60$ mitbegriffen u. s. w.

c. Das *erste* und das *vierte* Beispiel sind in dem Falle (IX. *c.*). z geht mit einer höhern als der ersten Potenz von 2 auf, und es giebt Factorenpaare, die *beide* mit 2 aufgehen.

Im *ersten* Beispiel nun sind die Werthe 19, 71, 109, 161, 1, 89, 91 und 179 von x, die in (39.) zu den Factorenpaaren 10, 18 und 2, 90 gehören, welche 2 zum Gemeintheiler haben, schon *alle*, die es nach (25. 1.) giebt, und die zu den *theilerfremden* Factorenpaaren 5, 36; 1, 180; 4, 45; 9, 20 gehörigen Werthe von x (37.) sind *dieselben.*

Im *vierten* Beispiel sind die Werthe von x, welche in (67.) zu den mit 2 gemeintheilbaren Factorenpaaren 2, 6; 4, 30; 6, 20 und 10, 12 gehören, *alle sechzehn*, die es nach (63.) giebt, und die zu den *theilerfremden* Factorenpaaren 1, 120; 3, 40; 5, 24 und 8, 15 nach (66.) gehörigen *acht* Werthe von x sind unter ihnen mitbegriffen; gemäfs (IX. *c.*).

Beweis von I. *A.* Könnte ein und derselbe Werth von x in $x^2 = \mathfrak{G}z + r$ (1.) verschiedene r geben, so müfste z. B. $x^2 = \mathfrak{G}z + r_1$, und *zugleich* $x^2 = \mathfrak{G}z + r_2$, also, Eins vom andern abgezogen,

$$68. \quad \mathfrak{G}z = r_1 - r_2$$

sein, folglich $r_1 - r_2$ mit z *aufgehen.* Dies kann nicht sein, da r_1 und r_2 beide $< z$ sind, und also auch $r_1 - r_2 < z$ ist. Also gehören nothwendig zu *andern* Werthen von r *andere* x; gemäfs (I.).

Beweis von II. und III. *B.* Die Gleichung $x_1^2 = \mathfrak{G}z + 1$ (2.), mit *irgend einem* der Werthe von x_r, die der Gleichung $x_r^2 = \mathfrak{G}z + r$ (1.) genugthun, multiplicirt, giebt

$$69. \quad x_1^2 . x_r^2 = \mathfrak{G}z + r.$$

Setzt man nun wie in (3.)

$$70. \quad x_1 . x_r = \mathfrak{G}z + (x_r),$$

so giebt (69.)

$$(\mathfrak{G}z+(x_r))^2 = \mathfrak{G}z+r \text{ oder}$$

$$71. \quad (x_r)^2 = \mathfrak{G}z+r:$$

also thut (x_r) der Gleichung $x_r^2 = \mathfrak{G}z+r$ (1.) genug, und folglich ist (x_r) nothwendig *einer der Werthe* von x_r.

C. Zu jedem *andern* x_1, und für *dasselbe* x_r, gehört aber in (70.) nothwendig ein *anderes* (x_r). Denn gäben z. B. die zwei Werthe $\overset{1}{x}_1$ und $\overset{2}{x}_1$ von x_1 in (70.) *ein- und dasselbe* (x_r), so müfste $\overset{1}{x}_1 x_r = \mathfrak{G}z+(x_r)$ und *zugleich* $\overset{2}{x}_1 x_r = \mathfrak{G}z+(x_r)$ und, Eins vom Andern abgezogen,

$$72. \quad (\overset{1}{x}_1 - \overset{2}{x}_1)x_r = \mathfrak{G}z$$

sein, folglich $(\overset{1}{x}_1 - \overset{2}{x}_1)x_r$ mit z *aufgehen*; was nicht sein kann, da x_r zu z *theilerfremd* ist, folglich keinen der Factoren von $z, > 1$ mit z gemein hat, in $\overset{1}{x}_1 - \overset{2}{x}_1$ *allein* aber z nicht aufgehen kann, da $\overset{1}{x}_1$ und $\overset{2}{x}_1$ beide $< z$ sind, und also auch $\overset{1}{x}_1 - \overset{2}{x}_1 < z$ ist. Daher gehört zu jedem *andern* x_1 für *dasselbe* x_r nothwendig ein *anderes* (x_r), und folglich giebt es nothwendig *wenigstens* eben so viele verschiedene x_r als es verschiedene x_1 giebt, mithin ihrer *wenigstens* $2n$.

D. Es kann ihrer aber auch *nicht mehr* geben Denn die x_r für die verschiedenen ν Werthe von r sind zusammengenommen *alle* die φz zu z theilerfremden Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$, und jedes z_φ kommt *nur einmal* vor; denn die verschiedenen ν Reste r gehen eben daraus hervor, dafs man das x in (1.) alle die φz Zahlen z_φ durchlaufen läfst. Berührte nun x_r für ein- und dasselbe r *mehr* als $2n$ Werthe von z_φ, so müfste x_r für ein *anderes* r nothwendig *weniger* als $2n$ verschiedene Werthe haben, indem, wenn es anders wäre, die x_r für die zwei verschiedenen r ein- und dasselbe z_φ zweimal berühren würden; was nicht sein kann. Und da es nun für kein r *weniger* als $2n$ verschiedene Werthe geben kann, so kann es deren auch *nicht mehrere* geben. Folglich giebt es für *jeden* der ν Werthe von r nothwendig $2n$ verschiedene Werthe von $x = z_\varphi$, die auch für die *verschiedenen* r nach (I.) alle verschieden sind, gemäfs (II.), und es ist

$$73. \quad \varphi z = 2n\nu;$$

gemäfs (III. 4.).

Beweis von IV. *E.* Man setze für die zwei verschiedenen Werthe r_1 und r_2 von r,

$$74. \quad x_{r_1}^2 = \mathfrak{S}z + r_1 \quad \text{und} \quad x_{r_2}^2 = \mathfrak{S}z + r_2,$$

so ergiebt sich, wenn man diese beiden Gleichungen in einander multiplicirt,

$$75. \quad x_{r_1}^2 . x_{r_2}^2 = \mathfrak{S}z + r_1 r_2,$$

und wenn man

$$76. \quad r_1 r_2 = \mathfrak{S}z + r_\lambda \quad \text{und} \quad x_{r_1} . x_{r_2} = \mathfrak{S}z + x_{r_\lambda}$$

setzt, aus (75.)

$$(\mathfrak{S}z + x_{r_\lambda})^2 = \mathfrak{S}z + r_1 r_2 = \mathfrak{S}z + \mathfrak{S}z + r_\lambda \quad \text{oder}$$

$$77. \quad x_{r_\lambda}^2 = \mathfrak{S}z + r_\lambda.$$

Also ist der aus dem *Product* $r_1 r_2$ der Quadratreste r_1 und r_2 nach (76.) hervorgehenden Rest r_λ ebenfalls ein *Quadratrest.*

F. Multiplicirt man r_λ von neuem mit einem Quadratrest, so geht, vermöge *derselben* Gründe, aus dem Product wieder ein Quadratrest hervor. Und *so* weiter. Also ist für eine beliebige Zahl von Quadratresten

$$78. \quad r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = \mathfrak{S}z + r_\mu;$$

gemäfs (5. 1.).

G. Der Beweis bleibt derselbe, wenn auch die in einander multiplicirten Reste r *einander gleich* sind; also ist auch

$$79. \quad r^\nu = \mathfrak{S}z + r_\mu;$$

gemäfs (5. 2.).

Beweis von V. *H.* Da nach (IV.) *jede Potenz* eines der Quadratreste r wieder einen der Quadratreste r giebt, so ist für einen beliebigen positiven ganzzahligen Exponenten λ,

$$80. \quad r^\lambda = \mathfrak{S}z + r_\lambda.$$

I. Gesetzt nun, für *keinen* der Werthe 2, 3, 4, ... von λ sei r_λ *gleich* r, so durchläuft r_λ *alle* die Werthe, welche r haben kann. Aber r hat nur ν verschiedene Werthe, also mufs jedenfalls für die $\nu+1$te Potenz das erste r_1 *wiederkehren*, und folglich mufs

$$81. \quad r^{\nu+1} = \mathfrak{S}z + r \quad \text{sein.}$$

Daraus folgt, dafs $\mathfrak{S}z$, und zwar $\mathfrak{S}$ (weil z zu r *theilerfremd* ist) mit r *aufgehen* mufs; folglich ergiebt sich, wenn man mit r dividirt,

$$82. \quad r^\nu = \mathfrak{S}z + 1, \quad \text{oder} \quad r^{2n} = \mathfrak{S}z + 1;$$

gemäfs (6. und 7.).

K. Aber es kann allerdings schon für $\lambda < \nu + 1$ in (80.) $r_\lambda = r$ sein. Z. B. schon für $\lambda = 3$ kann in

$$83. \quad r^3 = \mathfrak{S}z + r_\lambda \ (80.)$$

$r_\lambda = r$ sein. Denn alsdann giebt (83.), durch r_λ dividirt,

$$84. \quad r^\nu = \mathfrak{S}z + 1,$$

und was vorausgesetzt wird gilt also in der That von jedem r, welches eine der *Quadratwurzeln* für z zu 1 ist, wie z. B. $r = 109$ in (25.), welches nach (25. 1.) $109^2 = \mathfrak{S}z + 1$ giebt.

Selbst schon für $\lambda = 2$ kann in (80.), also in

$$85. \quad r^2 = \mathfrak{S}z + r_\lambda \ (80.)$$

$r_\lambda = r$ sein. Denn alsdann giebt (85.), durch $r = r_\lambda$ dividirt,

$$86. \quad r = \mathfrak{S}z + 1;$$

und dies ist für den Werth 1 von r der Fall. Also auch schon eine *niedrigere* als die νte Potenz von r kann zu z den Rest 1 lassen. *Jedenfalls* aber ist $r^\nu = \mathfrak{S}z + 1$; gemäfs (V.).

Beweis von VI. *L.* Wenn man (8.) mit r^2 multiplicirt, so ergiebt sich

$$87. \quad r^2 x_1^2 = \mathfrak{S}z + r^2.$$

Hierin (9.) und (10.) gesetzt giebt

$$(\mathfrak{S}z + (x))^2 = \mathfrak{S}z + \mathfrak{S}z + r \quad \text{oder}$$

$$88. \quad (x)^2 = \mathfrak{S}z + r.$$

Dieses ist die Gleichung (11.); und zwar giebt vermöge (10.) jedes *andere* r für (11. oder 90.) ein *anderes* (x); gemäfs (VI.).

Beweis von VII. In

$$89. \quad x^2 = \mathfrak{S}z + r$$

giebt, $z \mp x$ statt x gesetzt, wie schon weiter oben bemerkt, dasselbe r. Geht man z mit 2 auf, so dafs $\frac{1}{2}z$ eine *ganze* Zahl ist, so ist

$$90. \quad (\tfrac{1}{2}z \pm x)^2 = \tfrac{1}{4}z^2 \pm zx + x^2.$$

Hierin (89.) gesetzt, giebt

$$(\tfrac{1}{2}z \pm x)^2 = \tfrac{1}{4}z^2 \pm zx + \mathfrak{S}z + r \quad \text{oder}$$

$$91. \quad (\tfrac{1}{2}z \pm x)^2 = \mathfrak{S}z + r.$$

Also auch $\frac{1}{2}z + x$ und $\frac{1}{2}z - x$ geben zu z denselben Rest r, welchem x entspricht, und folglich geben

$$92. \quad x, \ \tfrac{1}{2}z - x, \ \tfrac{1}{2}z + x \ \text{und} \ z - x$$

sämmtlich zu z *denselben Quadratrest* r, sobald z mit 2 aufgeht; gemäfs (VII.).

Beweis von VIII. *M.* Wenn man, wie in (14.),

$$93. \quad z = \mu$$

setzt und sich in der Gleichung

$$94. \quad (x+1)(x-1) = \mathfrak{S}\varkappa\lambda \ (15.)$$

$\mathfrak{S}\varkappa\lambda$ *zusammen* in alle seine gleichen und ungleichen *Stammtheiler* zerlegt vorstellt, so mufs nothwendig $x+1$ dem Product einer gewissen Anzahl derselben, und $x-1$ dem Product *aller übrigen* gleich sein.

Bezeichnet man das unbekannte $\mathfrak{S}$ durch

$$95. \quad \mathfrak{S} = \varkappa_1\lambda_1,$$

so dafs in (94.)

$$96. \quad (x+1)(x-1) = \varkappa\lambda.\varkappa_1\lambda_1$$

ist, so kann man immer

$$97. \quad x+1 = \varkappa\lambda_1 \text{ und}$$

$$98. \quad x-1 = \lambda\varkappa_1$$

setzen.

In der That drücken (97. und 98.) *alle möglichen* Fälle aus. Es kann nemlich nicht, da x immer $< z$ sein soll (wenigstens um 1), $x+1$, und noch weniger $x-1$, *gröfser* als $z = \varkappa\lambda$ sein: also kann niemals $x+1 = \varkappa\lambda.\varkappa_1$ oder $= \varkappa\lambda.\lambda_1$ gesetzt werden müssen, wo $\varkappa_1$ oder $\lambda_1 > 1$ ist. Blofs wenn $x = z-1$ ist, ist $x+1 = z = \varkappa\lambda$ und $x-1 = z-2$. Aber auch diesen Fall drücken (97. und 98.) aus; denn es ist für denselben dann in (97.) $\lambda_1 = \lambda$, also in (98.) $x-1 = \lambda_1\varkappa_1$, wie (95.). Für jedes andere $x < z-1$ ist nothwendig sowohl $x+1$ als $x-1 < \varkappa\lambda\ (=z)$.

Es kann nun zwar für ein $x < z-1$, $x+1$ z. B. blofs einem der Factoren von z allein gleich sein, z. B. $x+1 = \varkappa$, welches der Fall sein würde, wenn $x+1$ in $z = \varkappa\lambda$ allein aufgeht. Aber auch diesen Fall drücken (97. und 98.) aus; denn dann ist in (97.) $\lambda_1 = 1$, also in (95.) $\varkappa_1 = \mathfrak{S}$ und in (98.) $x-1 = \lambda\mathfrak{S}$, und wie gehörig $(x+1)(x-1) = \varkappa\lambda\mathfrak{S}$.

Es kann ferner nicht $x+1$ in $\mathfrak{S}$ allein aufgehen, oder auch $= \mathfrak{S}$ sein, denn sonst wäre zufolge (94.) $x-1 > \varkappa\lambda$ oder $x-1 = \varkappa\lambda$, also $x > \varkappa\lambda > z$; gegen die Voraussetzung. Immer ist $\mathfrak{S} < z$, und es kann nicht $x+1$ blofs Factoren von $\mathfrak{S}$ wegnehmen, auch nicht alle, weil dann für das *kleinere* $x-1$ das *gröfsere* z übrig bleiben würde. Es mufs $x+1$ auch noch Factoren *von* z in Anspruch nehmen; und zwar mufs es entweder in z allein aufgehen, welches der obige Fall $\lambda_1 = 1$ ist, oder es mufs $= z$ sein, welches der Fall $x = z-1$ ist, oder es mufs einen Theil seiner Factoren aus z und die übrigen, mit λ_1 bezeichneten, aus $\mathfrak{S}$ nehmen.

Es kann nun zwar, wenn man die Factoren $\varkappa$ und λ im *voraus bestimmt,* sein, dafs es *kein* x giebt, welches durch $x+1$ gerade den einen

vorausbestimmten Factor von z, z. B. $\varkappa$, und etwa aufserdem einen Factor λ von $\mathfrak{S}$ wegnimmt; aber es kann *nicht* sein, dafs es für einen Werth von x, der die Gleichung $x^2 = \mathfrak{S}z + 1$ oder $(x+1)(x-1) = \mathfrak{S}z$ wirklich erfüllt, nicht irgend einen Factor von z, z. B. $\varkappa$, gäbe, der mit irgend einem Factor λ von $\mathfrak{S}$ zusammen, sei auch dieser letztere $= 1$, $x+1$ ausmacht; denn wenn x wirklich eine *ganze* Zahl ist, so mufs *nothwendig* $x+1$ in $\mathfrak{S}z$ *aufgehen* und zum Quotienten $x-1$ geben, also nothwendig von den möglichen Factoren $\varkappa$ und λ von z diese oder jene in Anspruch nehmen. Also wenn man *alle* x, welche Statt finden, durchgeht, so kann es zwar sein, dafs *nicht alle Factoren* $\varkappa$ und λ von z durch die Gleichung $(x+1)(x-1) = \mathfrak{S}\varkappa\lambda$ berührt werden, aber es kann *nicht sein*, dafs es, wenn man die *Factoren* $\varkappa$ und λ von z *alle* ganzzahligen Werthe durchlaufen läfst, die sie haben *können*, *nicht irgend ein x gäbe*, welches darunter nicht für die Gleichung $(x+1)(x-1) = \mathfrak{S}\varkappa\lambda$ das für ihn passende $\varkappa$ und λ fände.

So passen denn also die Ausdrücke (97. und 98.) für *alle* Fälle, und die Bedingung in (VIII.), dafs $x+1$ mit dem einen der Factoren $\varkappa$ und λ, $x-1$ mit dem andern *aufgehe*, das heifst, dafs, wie (97. und 98.) es annimmt, $x+1 = \varkappa\lambda_1$ und $x-1 = \lambda\varkappa_1$ sei, ist nicht blofs *willkürlich*, sondern *nothwendig*.

Es kommt nur darauf an, in (97. und 98.) die *Factoren* $\varkappa$ und λ von z *alle* Werthe, welche sie haben *können*, durchlaufen zu lassen, um nothwendig durch (97. und 98.) *alle* ganzzahligen Werthe von $x < z$ zu finden, die *möglich* sind, das heifst, die die Gleichung

$$99. \quad x^2 = \mathfrak{S}z + 1$$

erfüllen.

Giebt man nun, um die x zu finden, auf diese Weise den $\varkappa$ und λ der Reihe nach diese oder jene bestimmten Werthe, aus denen, welche sie haben können, so lassen sich vermittels der Gleichungen (97. und 98.) die zugehörigen Werthe von x wie folgt finden; insbesondere also auch die *Anzahl* der x, auf welche *Anzahl* es hier allein ankommt.

O. Man subtrahire und addire die beiden Gleichungen (97 und 98.), so geben sie $2 = \varkappa\lambda_1 - \lambda\varkappa_1$ oder

$$100. \quad \varkappa\lambda_1 = \lambda\varkappa_1 + 2 \text{ und}$$

$$101. \quad 2x = \varkappa\lambda_1 + \lambda\varkappa_1.$$

P. Aus (100.) folgt, dafs $\varkappa$ und λ keinen Theiler $\delta > 2$ gemein haben können, denn jeder Gemeintheiler δ von $\varkappa$ und λ mufs zufolge (100.)

nach (§. 18.) auch in die Zahl 2 rechts aufgehen, und in diese Zahl geht keine Zahl $\delta > 2$ auf. Daraus folgt, dafs für jedes Factorenpaar $\varkappa$ und λ von z, welches einen *gröfsern* Gemeintheiler als 2 hat, die Gleichung (100.) nicht möglich ist, und dafs es also dann gar keine ganzzahligen Werthe von $\varkappa_1$ und λ_1, und folglich auch gar keine dazu gehörigen Werthe von x giebt. Dieses ist was (VIII. a.) behauptet.

Haben dagegen $\varkappa$ und λ nur 1 und 2 zum *Gemeintheiler*, so können die Gleichungen (100. und 101.), wie sich zeigen wird, Statt finden, und es giebt zugehörige Werthe von x.

Q. Man setze nemlich zuerst, $\varkappa$ und λ seien *theilerfremd* oder hätten nur 1 zum *Gemeintheiler*, so bleibt die Gleichung (100.) wie sie ist, und nach (§. 34. III.) giebt es immer *einen und nur einen* Werth von $\lambda_1 > 0$ und $< \lambda$, und *einen und nur einen* Werth von $\varkappa_1 > 0$ und $< \varkappa$, welche die Gleichung (100.) erfüllen. Sie mögen durch $\varkappa_0$ und λ_0 bezeichnet werden. Desgleichen giebt es nach (§. 34. II.) noch unzählige andere Werthe von $\varkappa_1$ und λ_1, die alle durch

$$102. \quad \varkappa_1 = n\varkappa + \varkappa_0 \text{ und}$$

$$103. \quad \lambda_1 = n\lambda + \lambda_0$$

ausgedrückt werden, wo n eine *beliebige* positive oder negative ganze Zahl, aber für $\varkappa_1$ und für λ_1 die *nemliche* ist.

Setzt man nun die Ausdrücke von $\varkappa_1$ und λ_1 (102. und 103.) in den Ausdruck von $2x$ (101.), so ergiebt sich $2x = n\varkappa\lambda + \varkappa\lambda_0 + n\varkappa\lambda + \lambda\varkappa_0$, oder da $\varkappa\lambda = z$ ist (93.),

$$104. \quad 2x = 2nz + \varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0.$$

Was nun auch $\varkappa_0$ und λ_0 sein mögen, man weifs, dafs $\varkappa_0 > 0$ und $< \varkappa$ und $\lambda_0 > 0$ und $< \lambda$ ist, woraus folgt, dafs $\varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0$ jedenfalls > 0 und $< \varkappa\lambda + \varkappa\lambda$ also $< 2z$ ist.

Hieraus, und dann daraus, dafs der Werth von x *zeichenfrei* > 0 und $< z$ sein mufs (*negativ* kann nemlich x in der Gleichung $x^2 = \mathfrak{S}z + 1$ (99.) allerdings sein; positive und negative x von gleich grofsen zeichenfreien Werthen erfüllen die Gleichung gleichmäfsig), folgt weiter, dafs in (104.) das willkürliche n *nur* 0 und -1 sein kann. Denn $n = 1$ giebt, da $\varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0 > 0$ und $< 2z$ ist, $2x > 2z$, also $x > z$, und $n < -1$, z. B. schon $n = -2$, giebt $2x = -4z + \varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0$, also ein x, dessen zeichenfreier Werth ebenfalls $> z$ ist.

Es giebt demnach in (104.) *nur zwei* Werthe von x, und diese, zu $n=0$ und $n=-1$ gehörig, sind, wenn man sie durch $\overset{1}{x}$ und $\overset{2}{x}$ bezeichnet,

$$105.\quad \overset{1}{x} = \tfrac{1}{2}(\varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0) \text{ und}$$

$$106.\quad \overset{2}{x} = z - \tfrac{1}{2}(\varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0) = z - \overset{1}{x},$$

wo $\varkappa_0$ und λ_0 aus der Gleichung (100.) zu berechnen sind.

Nur die zwei Werthe $\overset{1}{x}$ und $z - \overset{1}{x}$ also können für ein *theilerfremdes* Factorenpaar $\varkappa$ und λ von z Statt finden; und dies ist was (VIII. *b.*) behauptet.

R. Man setze jetzt den *zweiten* nach (*P.*) möglichen Fall, nemlich, dafs $\varkappa$ und λ den *Gemeintheiler* 2 haben.

Alsdann reduciren sich die Gleichungen (100. und 101.), da sie nun beide mit 2 dividirt werden können, auf

$$107.\quad \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\lambda\varkappa_1 + 1 \text{ und}$$

$$108.\quad x = \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda\varkappa_1.$$

Wie in (*Q.*) giebt es wieder nach (§. 34. III.) *einen und nur einen Werth* von $\lambda_1 > 0$ und hier $< \frac{1}{2}\lambda$, und *einen und nur einen* Werth von $\varkappa_1 > 0$ und hier $< \frac{1}{2}\varkappa$, welche der Gleichung (107.) genugthun und welche wieder durch $\varkappa_0$ und λ_0 bezeichnet werden mögen. Desgleichen giebt es nach (§. 34. III.) noch unzählige andere Werthe von $\varkappa_1$ und λ_1, die alle durch

$$109.\quad \varkappa_1 = n.\tfrac{1}{2}\varkappa + \varkappa_0 \text{ und}$$

$$110.\quad \lambda_1 = n.\tfrac{1}{2}\lambda + \lambda_0$$

ausgedrückt werden, wo n eine *beliebige* positive oder negative ganze Zahl aber für $\varkappa_1$ und λ_1 die *nemliche* ist.

Setzt man nun wieder die Ausdrücke von $\varkappa_1$ und λ_1 (109. und 110.) in den Ausdruck von x (108.), so ergiebt sich $x = n.\frac{1}{2}\varkappa.\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\varkappa\lambda_0 + n.\frac{1}{2}\lambda.\frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}\lambda\varkappa_0$, oder, da $\varkappa\lambda = z$ ist (93.)

$$111.\quad x = \tfrac{1}{2}nz + \tfrac{1}{2}(\varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0).$$

Was nun auch $\varkappa_0$ und λ_0 sein mögen: man weifs dafs $\varkappa_0 > 0$ und $< \frac{1}{2}\varkappa$ und $\lambda_0 > 0$ und $< \frac{1}{2}\lambda$ ist, woraus folgt, dafs $\frac{1}{2}(\varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0)$ jedenfalls > 0 und $< \frac{1}{2}\varkappa\lambda$ oder $< \frac{1}{2}z$ ist.

Hieraus, und dann daraus, dafs der Werth von x zwischen sei > 0 und $< z$ sein mufs, folgt vermöge (111.) weiter, dafs n nur die vier Werthe -2, -1, 0 und $+1$ haben kann. Bezeichnet man nemlich den zu $n=0$ gehörigen positiven Werth von x durch $\overset{1}{x}$, die andern Werthe von x für $n=-1$, $n=+1$ und $n=-2$ durch $\overset{2}{x}$, $\overset{3}{x}$, $\overset{4}{x}$, so giebt (111.)

$$112.\quad \begin{cases} 1.\ \overset{1}{x} = \tfrac{1}{2}(\varkappa\lambda_0 + \lambda\varkappa_0) & \text{für } n = 0, \\ 2.\ \overset{2}{x} = -\tfrac{1}{2}z + \overset{1}{x} & \text{für } n = -1, \\ 3.\ \overset{3}{x} = +\tfrac{1}{2}z + \overset{1}{x}, & \text{für } n = +1, \\ 4.\ \overset{4}{x} = -z + \overset{1}{x}, & \text{für } n = -2. \end{cases}$$

Von allen diesen vier x sind die Werthe, da $x < \frac{1}{2}z$ ist, zeichenfrei genommen, > 0 und $< z$; wie es sein soll. Aber schon $n = +2$ und $n = -3$ giebt

$$113.\quad x = z + x \quad \text{und} \quad x = -\tfrac{3}{2}z + x,$$

wovon die Werthe zeichenfrei $> z$ sind und also nicht Statt finden.

Die Werthe (112.) von x sind nun, zeichenfrei genommen, diejenigen (17. und 18.), und also giebt es für jedes Factorenpaar $\varkappa$ und λ von z, welches den Gemeintheiler 2 hat, wie es (VIII. *c.*) behauptet, *vier* Werthe von x oder *zwei Werthenpaare* dieser Gröfsen für die Gleichung $x^2 = \mathfrak{G}z + 1$. In den Ausdrücken derselben (112.) müssen $\varkappa$ und λ aus der Gleichung (107.) berechnet werden.

S. Wir haben bis hieher gefunden, dafs es für jedes *bestimmte* Factorenpaar $\varkappa$ und λ von z entweder *ein* oder *zwei* Werthenpaare von x giebt, die der Gleichung $x^2 = \mathfrak{G}z + 1$ genugthun: ersteres wenn $\varkappa$ und λ *theilerfremd* sind, letzteres wenn $\varkappa$ und λ die Zahl 2 zum *Gemeintheiler* haben; und *nur* diese beiden Fälle können vorkommen.

Aber es kommt noch darauf an, ob und in wiefern *verschiedene bestimmte* Factorenpaare von z, z. B.

$$114.\quad \varkappa\lambda = z \quad \text{und}$$

$$115.\quad \sigma\tau = z$$

dieselben Werthe von x geben können; denn da der Zweck ist, die *Anzahl* der *überhaupt* für ein gegebenes z möglichen *verschiedenen Werthenpaare* von x, die die Gleichung $x^2 = \mathfrak{G}z + 1$ erfüllen, zu finden, und zwar eben aus den verschiedenen Factorenpaaren, in welche sich z zerlegen läfst, so mufs man nothwendig wissen, *welche* verschiedene bestimmte Factorenpaare von z, z. B. $\varkappa$ und λ, oder σ und τ, *dieselben* Werthe von x geben, um diese Werthe von x, wenn man die Factorenpaare von z *zählt*, nicht doppelt oder mehrfach zu zählen.

T. a. Man setze zu dem Ende $\sigma\tau = z$ (115.), gebe die *nemlichen* z wie $\varkappa\lambda = z$ (114.). Alsdann mufs, wenn man für $z = \sigma\tau$ in $x^2 = \mathfrak{G}z + 1$, ähnlich wie in (93.) für $z = \varkappa\lambda$,

$$116. \quad \mathfrak{G} = \sigma_1\tau_1$$

setzt mit (97. und 98.) *zugleich*

$$117. \quad x+1 = \sigma\tau_1 \text{ und}$$

$$118. \quad x-1 = \tau\sigma_1,$$

also vermöge (97. und 117.) und (98. und 118.)

$$119. \quad \sigma\tau_1 = \varkappa\lambda_1 \text{ und}$$

$$120. \quad \tau\sigma_1 = \lambda\varkappa_1$$

sein, während zugleich vermöge (114. und 115.)

$$121. \quad \sigma\tau = \varkappa\lambda$$

ist. Desgleichen mufs *zugleich* mit

$$122. \quad \varkappa\lambda_1 = \lambda\varkappa_1 + 2 \quad (100.)$$

vermöge (117. und 118.)

$$123. \quad \sigma\tau_1 = \tau\sigma_1 + 2 \text{ sein.}$$

b. Nun setze man, der *gröfste Gemeintheiler* von $\varkappa$ und σ sei δ, von λ und τ aber ε, und es sei

$$124. \quad \varkappa = k\delta, \quad \lambda = l\varepsilon,$$

$$125. \quad \sigma = s\delta, \quad \tau = t\varepsilon,$$

so sind k und s, und l und t nothwendig *theilerfremd.*

c. Man setze die Ausdrücke von $\varkappa$ und λ, σ und τ in (121.), so ergiebt sich $k\delta l\varepsilon = s\delta t\varepsilon$ oder

$$126. \quad kl = st,$$

und daraus folgt, weil k und s, l und t *theilerfremd* sind, dafs *k in t und s in l oder t in k, und l in s aufgehen mufs* und folglich vermöge (124. und 125.) auch *k in τ und s in λ, oder t in $\varkappa$ und l in σ.*

d. Man setze eben so die Ausdrücke von $\varkappa$ und λ, σ und τ in (119. und 120.), so ergiebt sich $s\delta\tau_1 = k\delta\lambda_1$ und $t\varepsilon\sigma_1 = l\varepsilon\varkappa_1$ oder

$$127. \quad s\tau_1 = k\lambda_1 \text{ und}$$

$$128. \quad t\sigma_1 = l\varkappa_1.$$

Hieraus folgt, da k und s, l und t *theilerfremd* sind, dafs *s in λ_1, k in τ_1 und t* in $\varkappa_1$, *l in σ_1 aufgehen mufs.*

e. Vermöge (*c.* und *d.*) mufs also k in τ und *zugleich* in τ_1, und s in λ und *zugleich* in λ_1, oder t in $\varkappa$ und *zugleich* in $\varkappa_1$ und l in σ und *zugleich* in σ_1 *aufgehen.*

f. Wenn aber nun k in τ und τ_1 *zugleich* aufgeht, so mufs es vermöge (123.) auch in 2 aufgehen (§. 18.). Wenn s in λ und λ_1 *zugleich* aufgeht, so mufs es vermöge (122.) ebenfalls in 2 aufgehen. Auch t, wenn es

zugleich in $\varkappa$ und $\varkappa_1$ aufgeht, mufs vermöge (122.) in 2 aufgehen. Und l, wenn es in σ und σ_1 *zugleich* aufgeht, mufs vermöge (123.) gleichfalls in 2 aufgehen.

Die Zahlen k, l, s, t müssen also *sämmtlich* in 2 aufgehen und können daher nur 1 *oder* 2 sein.

g. Daher kann in (124. und 125.) nur

$$129.\quad \begin{cases} 1.\ \varkappa = \delta, \text{ oder } \varkappa = 2\delta; \\ 2.\ \sigma = \delta, \text{ oder } \sigma = 2\delta; \\ 3.\ \lambda = \varepsilon, \text{ oder } \lambda = 2\varepsilon; \\ 4.\ \tau = \varepsilon, \text{ oder } \tau = 2\varepsilon, \end{cases}$$

also nur

$$130.\quad \sigma = \varkappa \text{ oder } \sigma = \tfrac{1}{2}\varkappa \text{ oder } \sigma = 2\varkappa \text{ und}$$

$$131.\quad \tau = \lambda \text{ oder } \tau = \tfrac{1}{2}\lambda \text{ oder } \tau = 2\lambda$$

sein. Es kann aber nicht *zugleich* $\sigma = \frac{1}{2}\varkappa$ und $\tau = \frac{1}{2}\lambda$, auch nicht *zugleich* $\sigma = 2\varkappa$ und $\tau = 2\lambda$ sein, wenn $\sigma\tau$ *gleich* $\varkappa\lambda$ ist (121.). Also kann nur

$$132.\quad \sigma = \varkappa \text{ oder } \sigma = \tfrac{1}{2}\varkappa \text{ oder } \sigma = 2\varkappa$$

und *zugleich*

$$133.\quad \tau = \lambda \text{ oder } \tau = 2\lambda \text{ oder } \tau = \tfrac{1}{2}\lambda \text{ sein.}$$

h. Haben $\varkappa$ und λ den *Gemeintheiler* 2, und setzt man das *Gleiche* von σ und τ voraus, so reduciren sich die beiden Gleichungen (122. und 123.) auf

$$134.\quad \tfrac{1}{2}\varkappa.\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\lambda.\varkappa_1 + 1 \text{ und}$$

$$135.\quad \tfrac{1}{2}\sigma.\tau_1 = \tfrac{1}{2}\tau.\sigma_1 + 1.$$

Ganz wie in (*c.* und *d.*) folgt, dafs, eben wie (*e.*) es aussagt, $\varkappa$ je in τ und τ_1, s je in λ und λ_1, t je in $\varkappa$ und $\varkappa_1$ und l je in σ und σ_1 *zugleich* aufgehen mufs, denn alles dies folgt aus den unverändert bleibenden Gleichungen (121.) und (119. und 120.). Dagegen aber können hier k, s, t und l statt 1 und 2 wie in (*f.*) nur sämmtlich = 1 sein, indem jetzt in (134. und 135.) in die Zahl 1 rechter Hand, anders wie in die Zahl 2 in (122. und 123.) nur allein 1 aufgeht. Also kann hier, statt wie in (129.), nur allein

$$136.\quad \varkappa = \delta,\ \sigma = \delta \text{ und}$$

$$137.\quad \lambda = \varepsilon,\ \tau = \varepsilon$$

und folglich *nur*

$$138.\quad \begin{cases} \sigma = \varkappa \text{ und} \\ \tau = \lambda \text{ sein.} \end{cases}$$

i. Es folgt also, zusammengenommen, dafs

Erstlich, wenn $\varkappa$ und λ *theilerfremd* sind, nur

$$139.\quad \sigma = \varkappa, \text{ oder } \tfrac{1}{2}\varkappa, \text{ oder } 2\varkappa \text{ und } \textit{zugleich}$$

$$140.\quad \tau = \lambda, \text{ oder } 2\lambda, \text{ oder } \tfrac{1}{2}\lambda \text{ und}$$

Zweitens, wenn $\varkappa$ und λ den Gemeintheiler 2 haben, nur allein

$$141.\quad \begin{cases} \sigma = \varkappa \text{ und} \\ \tau = \lambda \end{cases}$$

sein kann. Also, wenn $\varkappa$ und λ theilerfremd sind, so giebt es nur die zwei von $\varkappa$ und λ verschiedenen Factorenpaare von z: $\sigma = \frac{1}{2}\varkappa$, $\tau = 2\lambda$ und $\sigma = 2\varkappa$ und $\tau = \frac{1}{2}\lambda$, welchen dieselben x zukommen, und keine andern; und wenn $\varkappa$ und λ den Gemeintheiler 2 haben, so giebt es gar keine von $\varkappa$ und λ verschiedene Factorenpaare von z für die nemlichen x.

U. Es werden nun die Resultate in (T.) auf die verschiedenen Fälle, welche vorkommen können, anzuwenden sein.

a. Sind zuerst $\varkappa$ und λ nicht blofs *theilerfremd*, sondern auch beide *ungerade*, so findet weder $\frac{1}{2}\varkappa$ noch $\frac{1}{2}\lambda$ Statt, und daher kann in (139. und 140.) *blofs* $\sigma = \varkappa$, und $\tau = \lambda$ sein. Also giebt dann *kein* anderes Factorenpaar von z *dieselben* x, und es giebt für ein *ungerades* Factorenpaar $\varkappa$ und λ von z *nur ein* Werthenpaar von x (Q.), also für jedes *andere* $\varkappa$ und λ *andere* x. Dieses behauptet (VIII. *b.*).

b. Sind $\varkappa$ und λ zwar *theilerfremd*, aber nicht beide *ungerade*, sondern nur eins von ihnen ist es, das andere *gerade*, so sind $\frac{1}{2}\varkappa$ und 2λ *ganze* Zahlen, wenn $\varkappa$ *gerade* ist, und $2\varkappa$ und $\frac{1}{2}\lambda$ sind es, wenn λ *gerade* ist. Also giebt dann nach (139. und 140.), aufser $\sigma = \varkappa$ und $\tau = \lambda$, im *ersten* Fall auch $\sigma = \frac{1}{2}\varkappa$ und $\tau = 2\lambda$ und im *zweiten* Fall auch $\sigma = 2\varkappa$ und $\tau = \frac{1}{2}\lambda$ *dieselben* x, und folglich giebt es dann in dem einen und dem andern Fall ein *zweites* Factorenpaar $\frac{1}{2}\varkappa$ und 2λ oder $2\varkappa$ und $\frac{1}{2}\lambda$ von z, welchem *dieselben* x zukommen, wie den Factorenpaaren $\varkappa$ und λ selbst. Hier giebt es nun weiter zwei Fälle.

α. Ist nemlich von den *theilerfremden* $\varkappa$ und λ, $\varkappa$ zwar *gerade*, aber nur durch die *erste* Potenz von 2 theilbar, während, wie in (*b.*), λ *ungerade* ist, so ist umgekehrt $\frac{1}{2}\varkappa$ *ungerade* und 2λ *gerade*: also kommt dann das *zweite* Factorenpaar $\frac{1}{2}\varkappa$ und 2λ, welches nach (*b.*) *dieselben* x giebt, wie $\varkappa$ und λ selbst, unter den verschiedenen Paaren theilerfremder Factoren von z selbst vor, da einer mit 2^1 aufgeht, während der andere ungerade ist. Eben so verhält es sich, wenn $\varkappa$ *ungerade* und λ mit 2^1 theilbar ist. In diesem Fall also kommt jedes Werthenpaar von x, welches zu dieser Art von Factorenpaaren von z gehört, *zweimal* vor; gemäfs (VIII. *a.*).

β. Ist dagegen von den *theilerfremden* $\varkappa$ und λ, $\varkappa$ durch eine *höhere* als die erste Potenz von 2 theilbar, während λ *ungerade* ist, so sind

$\frac{1}{2}\kappa$ und 2λ *beide gerade*. Also kommt dann das *zweite* Factorenpaar $\frac{1}{2}\kappa$ und 2λ, welches nach (*b.*) *dieselben* x giebt wie κ und λ selbst, unter *denjenigen* Paaren von Factoren vor, die beide mit 2 theilbar sind. Eins der beiden Werthenpaare von x, welche Factorenpaaren *dieser* Art nach (*R.*) zukommen, ist also dann das hier zu κ und λ gehörige Werthenpaar von x. Eben so verhält es sich, wenn κ ungerade ist und λ mit einer höhern als der ersten Potenz von 2 aufgeht; gemäfs (VIII. *d.*).

c. Sind die Factoren κ und λ *nicht theilerfremd*, sondern mit 2 *gemeintheilbar*, so kann der eine von den beiden, z. B. κ, nur mit der *ersten* Potenz von 2 aufgehen, wenn auch der andere mit einer höhern Potenz von 2 aufgeht, indem κ und λ keinen *gröfsern Gemeintheiler* als 2 haben können: also ist dann $\frac{1}{2}\kappa$ ungerade und 2λ gerade und $\frac{1}{2}\kappa$ und 2λ sind *theilerfremd*. Alsdann giebt es dann zwar nach (*T. i.*) *kein* anderes Factorenpaar σ und τ von z, welches dieselben *beiden* Werthenpaare von x gäbe, wie κ und λ, aber umgekehrt ist das zweite Werthenpaar von x, welches nach (*e. β.*) für die hier *theilerfremden* $\frac{1}{2}\kappa$ und 2λ Statt findet, wie dort bemerkt, unter den Werthenpaaren von x enthalten, die den durch 2 gemeintheilbaren κ und λ zukommen. Eben so verhält es sich, wenn λ nur mit der ersten Potenz von 2 aufgeht, während vielleicht κ mit einer höhern als der ersten Potenz von 2 theilbar ist.

So folgt denn, dafs unter den Werthen von x, welche Factorenpaaren κ und λ zukommen, die mit 2 gemeintheilbar sind, zugleich diejenigen mit vorkommen, welche den *theilerfremden* Factorenpaaren entsprechen, deren einer gerade, der andere *ungerade* ist; gemäfs (VIII. *e.*).

V. a. Der erste Fall (*U. a.*) findet *ausschliefslich* Statt, wenn z *selbst* nicht mit 2 aufgeht, und also *ungerade* ist. Denn dann sind in allen theilerfremden Factorenpaaren von z *beide* Factoren *ungerade*. Es giebt alsdann *gar keine* Factoren, die mit 2 aufgehen. Also giebt es dann so viele verschiedene Werthenpaare x und $z - x$ von x, als verschiedene theilerfremde Factorenpaare von z; und diese Werthe von x sind *alle*, welche der Gleichung $x^2 = \mathfrak{G}z + 1$ genugthun; gemäfs (IX. *a.*).



b. Geht z nur mit der *ersten* Potenz von 2 auf, so giebt es weder Paare von Factoren, die *beide* ungerade sind, wie in (*a.*), noch durch 2 gemeintheilbare Factorenpaare, mithin *nur* Paare von Factoren, deren einer mit 2^1 aufgeht, der andere mit 2 gar nicht; also nur Factorenpaare von der Art wie in (*U. b. α.*). Diese Factorenpaare geben dann also auch, da es keine

andern giebt, *alle* die verschiedenen Werthenpaare x und $z-x$ von x, welche der Gleichung $x^2 = \mathfrak{S}z+1$ genugthun; und zwar giebt schon *die Hälfte* dieser Factorenpaare *alle* Werthenpaare von x, weil nach (*U. b. a.*) jedes Werthenpaar von x *zweimal* vorkommt; gemäfs (IX. *b.*).

c. Geht z mit einer *höhern* als der ersten Potenz von 2 auf, so giebt es aufser den Factorenpaaren, die 2 zum Gemeintheiler haben, zwar Paare theilerfremder Factoren von z, von welchen nur der eine mit 2 aufgeht, während der andere ungerade ist: aber die zu diesen letzten gehörigen Werthenpaare von x sind nach (*U. c.*) unter denen mitbegriffen, welche zu den mit 2 gemeintheilbaren Factorenpaaren gehören. Und da nun Paare von Factoren, die *beide ungerade* sind, in dem gegenwärtigen Falle gar nicht vorkommen, so sind hier die *Doppelpaare* der Werthe von x, welche den mit 2 gemeintheilbaren Factorenpaaren von z zukommen, *allein alle* diejenigen, welche der Gleichung $x^2 = \mathfrak{S}z+1$ genugthun; gemäfs (IX. *c.*).

Anm. *W.* Der Beweis von (VIII. und IX.) beruht insbesondere auf der Zerlegung von $\mathfrak{S}z = \mathfrak{S}\varkappa\lambda$ für die Gleichung $x^2 = \mathfrak{S}z+1$ in die beiden Factoren $\varkappa\lambda_1$ und $\lambda\varkappa_1$, wenn $\mathfrak{S} = \varkappa_1\lambda_1$ gesetzt wird; deren einer dann $= x+1$, der andere $= x-1$ ist (*N.*). Dieses giebt aus den Gleichungen (100 und 107.) die Werthe von $\varkappa_1$ und λ, und durch sie, vermöge der Gleichungen (101. und 108.), die Werthe von x. Die Untersuchung, ob mehrere Factorenpaare $\varkappa$ und λ von z *dieselben* x geben können, geschieht insbesondere dadurch, dafs man in (*T. b.*) die *gröfsten Gemeintheiler* von $\varkappa$ und σ, und λ und τ in Rechnung bringt.

§. 95.

Lehrsatz.

Man setze für eine beliebige ganze Zahl z, *die immer durch*

$$1. \quad \mathrm{z} = 2^{\mathrm{m}}.\mathrm{p}_1^{e_1}\,\mathrm{p}_2^{e_2}\,\mathrm{p}_3^{e_3}. \;..\, \mathrm{p}_\mu^{e_\mu}$$

ausgedrückt werden kann, wo die μ *verschiedenen* p *sämmtlich Stammzahlen* > 2 *sind, indem für den Fall, wo* z *den Stammtheiler* 2 *nicht enthält, nur* $\mathrm{m}=0$ *gesetzt werden darf,*

$$2. \quad \mathrm{z} = \varkappa\lambda.$$

Ferner bezeichne man von den verschiedenen Factorenpaaren $\varkappa$ *und* λ, *in welche* z *sich zerlegen läfst, die Anzahl*

3. 1. *Derjenigen, welche theilerfremd sind und* 2 *gar nicht enthalten, durch* τ_1;
2. *Derjenigen, welche theilerfremd sind, deren einer aber* 2^1 *zum Factor hat, durch* τ_2;
3. *Derjenigen, welche theilerfremd sind und deren einer eine beliebige Potenz von* 2, *höher als die erste, zum Factor hat, durch* τ_3;
4. *Derjenigen, deren* g r ö f s t e r *Gemeintheiler* 2 *ist, durch* τ_4.

Alsdann sind die Werthe von τ_1, τ_2, τ_3 und τ_4 *in den verschiedenen Fällen, welche für* z (1.) *vorkommen können, folgende:*

Für $m > 2$, *für* $m = 2$, *für* $m = 1$ *und für* $m = 0$ *ist*

$$4.\quad \begin{cases} 1.\ \tau_1 = 0 = 0 = 0 = 2^{\mu-1}, \\ 2.\ \tau_2 = 0 = 0 = 2^{\mu} = 0, \\ 3.\ \tau_3 = 2^{\mu} = 2^{\mu} = 0 = 0, \\ 4.\ \tau_4 = 2^{\mu} = 2^{\mu-1} = 0 = 0. \end{cases}$$

B e i s p i e l e. 1. Es sei

5. $z = 240 = 2^4.3.5$, wo also $m = 4 > 2$, $\mu = 2$ ist.

Die *sämmtlichen* Factorenpaare von z sind folgende:

$$6.\quad \begin{cases} \varkappa = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 10\ 12\ 15, \\ \lambda = 240\ 120\ 80\ 60\ 48\ 40\ 30\ 24\ 20\ 16. \end{cases}$$

Factoren $\varkappa$ und λ von der *ersten* und *zweiten* Art (3.) kommen hier *nicht* vor; also ist $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 = 0$. Factorenpaare der *dritten* Art sind die vier 1, 240; 3, 80; 5, 48 und 15, 16; also ist hier $\tau_3 = 4 = 2^{\mu}$; gemäfs (4. 3.). Factorenpaare der *vierten* Art sind die vier 2, 120; 6, 40; 8, 30 und 10, 24; also ist $\tau_4 = 4 = 2^{\mu}$; gemäfs (4. 4.). Die beiden noch übrigen Factorenpaare 4, 60 und 12, 20 kommen nicht in Betracht, da sie $4 > 2$ zum Gemeintheiler haben.

2. Es sei

7. $z = 420 = 2^2.3.5.7$, wo also $m = 2$, $\mu = 3$ ist.

Die *sämmtlichen* Factorenpaare von z sind folgende:

$$8.\quad \begin{cases} \varkappa = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 10\ 12\ 14\ 15\ 20, \\ \lambda = 420\ 210\ 140\ 105\ 84\ 70\ 60\ 42\ 35\ 30\ 28\ 21. \end{cases}$$

Factorenpaare $\varkappa$ und λ von der *ersten* und *zweiten* Art (3.) kommen wieder nicht vor; also ist $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 = 0$. Von der dritten Art (3.) sind die acht 1, 420; 3, 140; 4, 105; 5, 84; 7, 60; 12, 35; 15, 28 und 20, 21; also ist $\tau_3 = 8 = 2^{\mu}$; gemäfs (4. 3.). Von der vierten Art sind die vier 2, 210; 6, 70; 10, 42 und 14, 30, also ist $\tau_4 = 4 = 2^{\mu-1}$; gemäfs (4. 4.).

3. Es sei

9. $z = 630 = 2.3^2.5.7$, wo also $m = 1$, $\mu = 3$ ist.

Die *sämmtlichen* Factorenpaare von z sind folgende:

$$10. \quad \begin{cases} \varkappa = & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 10 \quad 14 \quad 15 \quad 18 \quad 21, \\ \lambda = & 630 \quad 315 \quad 210 \quad 126 \quad 105 \quad 90 \quad 70 \quad 63 \quad 45 \quad 42 \quad 35 \quad 30. \end{cases}$$

Factorenpaare $\varkappa$ und λ von der *ersten* Art (3.) kommen nicht vor; also ist $\tau_1 = 0$. Von der *zweiten* Art sind die acht 1, 630; 2, 315; 5, 126; 7, 90; 9, 70; 10, 63; 14, 45 und 18, 35, also ist $\tau_2 = 8 = 2^\mu$; gemäfs (4. 2.). Factorenpaare der *dritten* und *vierten* Art kommen nicht vor; also ist $\tau_3 = 0$ und $\tau_4 = 0$. Die vier übrigen Factorenpaare 3, 210; 6, 105; 15, 42 und 21, 30 kommen nicht in Betracht, da sie *gröfsere* Gemeintheiler als 2 haben.

4. Es sei

11. $z = 1575 = 3^2.5^2.7$, wo also $m = 0$ und $\mu = 3$ ist.

Die *sämmtlichen* Factorenpaare von z sind folgende:

$$12. \quad \begin{cases} \varkappa = & 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 15 \quad 21 \quad 25 \quad 35, \\ \lambda = & 1575 \quad 525 \quad 315 \quad 225 \quad 175 \quad 105 \quad 75 \quad 63 \quad 45. \end{cases}$$

Factorenpaare der ersten Art sind die vier 1, 1575; 7, 225; 9, 175; 25, 63, also ist $\tau_1 = 4 = 2^{\mu-1}$; gemäfs (4. 1.). Von der 2ten, 3ten und 4ten Art kommen keine Factoren vor, also ist $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$. Die noch übrigen Factorenpaare haben gröfsere Zahlen als 2 zu Gemeintheilern.

Beweis. *A.* Da von z nur diejenigen Factorenpaare $\varkappa$ und λ gesucht werden, die entweder theilerfremd sind, oder die keinen gröfsern Gemeintheiler als 2 haben, so kommt es auf alle die, welche irgend eines der $p > 2$ *in* $\varkappa$ *und* λ *zugleich* enthalten, gar nicht an. Es darf also keine Potenz irgend eines p *zerfället* werden, sondern immer nur die *volle* Potenz in $\varkappa$ oder in λ vorkommen. Man kann also in (1.)

13. $p_1^{\epsilon_1} = P_1$, $p_2^{\epsilon_2} = P_2$, $p_3^{\epsilon_3} = P_3$, ... $p_\mu^{\epsilon_\mu} = P_\mu$,

und folglich

14. $z = 2^m.P_1.P_2.P_3 \ldots . P_\mu$

setzen und hierin die P als *untheilbare* Zahlen betrachten.

B. Gesetzt nun, es wäre zuerst $m = 0$, also blofs

15. $z = P_1.P_2.P_3 \ldots . P_\mu$,

so kann man zuerst $\varkappa = 1$ und λ gleich dem Product *aller P* setzen; sodann $\varkappa$ gleich *jedem* der μ verschiedenen *P;* λ gleich dem Product der $\mu - 1$ übrigen. Ferner $\varkappa$ gleich dem Product jeder *zwei P;* λ gleich dem Product der

$\mu - 2$ übrigen. Weiter x gleich dem Product jeder *drei* P; λ gleich dem Product der $\mu - 3$ übrigen u. s. w.

Daraus folgt, dafs die Anzahl der verschiedenen Werthe, welche x haben kann, keine andere ist, als die Anzahl aller möglichen Producte von einem, zwei, drei bis μ verschiedenen P; wozu auch noch 1 kommt. Diese verschiedenen Producte enthält nach (§. 2.) das Product

$$16.\qquad (1+P_1)(1+P_2)(1+P_3)\ldots\ldots(1+P_\mu)$$

sämmtlich, und ihre Anzahl ist nach (§. 3.) $= 2^\mu$.

Aber offenbar kommen auf diese Weise die verschiedenen möglichen Factorenpaare jedes *zweimal* vor. Denn wegen $z = x\lambda$ ist $\lambda = \frac{z}{x}$, und $\frac{z}{x}$ ist ebensowohl ein Theiler von z, also ebensowohl ein x, als x selbst. Die λ sind nichts anderes als die sämmtlichen x selbst, aber in umgekehrter Ordnung. Der *verschiedenen* Factorenpaare giebt es also nur $\frac{1}{2}.2^\mu = 2^{\mu-1}$ und daher ist

$$17.\qquad \tau_1 = 2^{\mu-1} \text{ für } m = 0:$$

denn die τ_1 Factorenpaare sind es in (3.), welche, wie hier, den Theiler 2 *gar nicht* haben sollen; gemäfs (4.).

Factoren, welche 2 enthalten, wie (3. 2., 3. und 4.) giebt es hier gar nicht; also ist

$$18.\qquad \tau_2 = 0,\quad \tau_3 = 0,\quad \tau_4 = 0 \quad \text{für} \quad m = 0;$$

gemäfs (4.).

C. Gesetzt es sei weiter in (14.) m nicht $=0$, sondern $m = 1$, also

$$19.\qquad z = 2P_1.P_2.P_3\ldots\ldots P_\mu,$$

so kommen *nur* Factorenpaare der *zweiten* Art (3.) vor; denn *alle* haben nothwendig den Theiler 2^1, der sich immer entweder in x oder in λ befinden mufs.

Man bezeichne die verschiedenen möglichen Producte von einem, zwei, drei etc. P zusammengenommen durch $\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \overset{3}{P}, \ldots\ldots \overset{\mu}{P}$ und bringe den Theiler 2 ausschliefslich in die x, so werden durch

$$20.\qquad \begin{cases} x = \;\; 2,\; 2(\overset{1}{P}),\; 2(\overset{2}{P}),\; 2(\overset{3}{P}),\; \ldots\ldots\; 2(\overset{\mu}{P}) \text{ und} \\ \lambda = (\overset{\mu}{P}),\; (\overset{\mu-1}{P}),\; (\overset{\mu-2}{P}),\; (\overset{\mu-3}{P}),\; \ldots\ldots\; 1 \end{cases}$$

sämmtliche Factorenpaare von z ausgedrückt. Aber *alle* x sind hier von den λ *verschieden:* denn alle x gehen mit 2 auf, alle λ nicht. Die Anzahl der Factorenpaare τ_2 ist also die der x in (20.) selbst, und diese ist gemäfs (*B.*) $= 2^\mu$. Also ist hier

21. $\tau_2 = 2^\mu$ und $\tau_1 = 0$, $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$; für $m = 1$; gemäfs (4.).

D. Es sei in (14.) $m = 2$, also

22. $$z = 2^2.P_1.P_2.P_3 \ldots . P_\mu.$$

Factorenpaare der *ersten* und *zweiten* Art (3.) kommen hier nicht vor, denn kein Factorenpaar ist *ohne* den Theiler 2; wenn 2 in dem einen Factor *nicht* vorkommt, so kommt in dem andern nicht blofs 2^1, sondern 2^2 vor. Also giebt es hier nur Factorenpaare der *dritten* und *vierten* Art (3.).

Die von der *dritten* Art sind diejenigen, deren einer 2 gar nicht, der andere 2^2 enthält. Sie werden also ganz auf dieselbe Weise ausgedrückt, wie die in (20.), wenn man daselbst 2^2 statt 2 schreibt. Ihre Anzahl τ_3 ist also, wie die der dortigen, $= 2^\mu$.

Die Factorenpaare der *vierten* Art sind hier diejenigen x und λ, welche *jeder* 2 zum Theiler haben. Sie werden also nach der Bezeichnungsart von (*C.*) durch

23. $$\begin{cases} x = \quad 2, \quad 2(\overset{1}{P}), \; 2(\overset{2}{P}), \; 2(\overset{3}{P}), \; \ldots . \; 2(\overset{\mu}{P}), \\ \lambda = 2(\overset{\mu}{P}), \; 2(\overset{\mu-1}{P}), \; 2(\overset{\mu-2}{P}), \; 2(\overset{\mu-3}{P}), \; \ldots \quad 2 \end{cases}$$

ausgedrückt. Hier sind offenbar wieder die sämmtlichen λ den x in umgekehrter Ordnung gleich, wie in dem Fall in (*B.*). Also ist die Anzahl τ_4 der von einander *verschiedenen* Factorenpaare nur, wie dort, $= 2^{\mu-1}$.

Mithin ist zusammengenommen

24. $\tau_3 = 2^\mu$, $\tau_4 = 2^{\mu-1}$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$ für $m = 2$; gemäfs (4.).

E. Es sei endlich in (14.) $m > 2$.

Auch hier kommen Factorenpaare der *ersten* und *zweiten* Art (3.) nicht vor; denn kein Factorenpaar ist *ohne* den Theiler 2; und kommt 2 in dem einen Factor *nicht* vor, so kommt in dem andern nicht blofs 2^1, sondern 2^m vor. Also giebt es auch hier wieder nur Factorenpaare der *dritten* und *vierten* Art (3.).

Die von der *dritten* Art sind diejenigen, deren einer 2 gar nicht, der andere 2^m enthält. Sie werden also wieder ganz auf dieselbe Weise ausgedrückt wie die in (20.), wenn man daselbst 2^m statt 2 schreibt. Ihre Anzahl τ_3 ist daher, wie die der dortigen, $= 2^\mu$.

Die Factorenpaare der *vierten* Art sind hier diejenigen x und λ, deren einer 2, der andere 2^{m-1} zum Theiler haben. Sie werden also nach der Be-

zeichnungsart von (*C.*) durch

$$25. \quad \begin{cases} x = 2, & 2(\overset{1}{P}), \quad 2(\overset{2}{P}); \quad 2(\overset{3}{P}), \quad \dots . \; 2(\overset{\mu}{P}), \\ \lambda = 2^{m-1}(\overset{\mu}{P}), & 2^{m-1}(\overset{\mu-1}{P}), \quad 2^{m-1}(\overset{\mu-2}{P}), \quad 2^{m-1}(\overset{\mu-3}{P}), \quad \dots . \; 2^{m-1} \end{cases}$$

ausgedrückt. Hier sind offenbar die sämmtlichen λ von den x *verschieden,* wie in dem Fall (*C.*). Also ist die Anzahl τ_4 der Factorenpaare der vierten Art, wie dort, $= 2^\mu$.

Mithin ist zusammengenommen

$$26. \quad \tau_3 = 2^\mu, \quad \tau_4 = 2^\mu, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 0 \text{ für } m > 2;$$

gemäfs (4.).

§. 96.

Lehrsatz.

Es sei z *eine beliebige ganze Zahl, die, wie in* (§. 95.), *immer durch*

$$1. \quad z = 2^m . p_1^{e_1} . p_2^{e_2} . p_3^{e_3} \dots . p_\mu^{e_\mu}$$

ausgedrückt werden kann, wo die μ *verschiedenen* p *sämmtlich Stammzahlen* > 2 *sind. Alsdann ist in der Gleichung*

$$2. \quad x^2 = \mathfrak{G} z + r,$$

wo x *und* r *zu* z *theilerfremd und* $<$ z *sind, die Anzahl* n *der Paare zu* z *theilerfremder Werthe von* x, *die zu einem und demselben* r *gehören, also die Anzahl der Quadratwurzelpaare zu* r, *für jedes* r *gleichmäfsig, also auch für* r $= 1$:

$$3. \quad n = 2^{\mu-1} \text{ für } m = 0,$$
$$4. \quad n = 2^{\mu-1} \text{ für } m = 1,$$
$$5. \quad n = 2^{\mu} \text{ für } m = 2,$$
$$6. \quad n = 2^{\mu+1} \text{ für } m > 2.$$

Dagegen die Anzahl ν *der in* (2.) *möglichen verschiedenen* r $<$ z, *also die Anzahl der Quadratresté zu* z *ist, wenn, wie immer,* φz *die Anzahl der zu* z *theilerfremden Zahlen* > 0 *und* $<$ z *bezeichnet,*

$$7. \quad \nu = \frac{\varphi z}{2n};$$

wo n, *nach den verschiedenen Werthen von* m *in* (1.), *die Werthe* (3. 4. 5. 6.) *hat und nach* (§. 81. 7.)

$$8. \quad \varphi z = 2^{m-1} . p_1^{e_1-1} . p_2^{e_2-1} \dots . p_\mu^{e_\mu-1} (p_1-1)(p_2-1) \dots . (p_\mu-1)$$

ist, so dafs also φz *und* 2n, *folglich auch* ν, *unmittelbar aus der gegebenen Zahl* z (1.) *gefunden werden kann.*

Beispiel 1. Die Zahl $z = 45$ in dem *zweiten* Beispiel zu (§. 94.) ist

$$9. \quad z = 45 = 3^2.5;$$

also ist für sie, mit (1.) verglichen,

$$10. \quad m = 0, \quad \mu = 2.$$

Nach (§. 94. 47.) giebt es zu jedem der $\nu = 6$ verschiedenen Werthe, welche r haben kann, $n = 2$ *Werthenpaare* von x, und φz ist nach (8.) $= 3^{2-1}(3-1)(5-1) = 3.2.4 = 24$. Zufolge (3.) ist $n = 2^{\mu-1} = 2$ und zufolge (6.) $\nu = \frac{24}{2.2} = 6$; wie gehörig.

2. Die Zahl $z = 126$ in dem *dritten* Beispiel zu (§. 94.) ist

$$11. \quad z = 126 = 2.3^2.7;$$

also ist für sie, mit (1.) verglichen,

$$12. \quad m = 1, \quad \mu = 2.$$

Nach (§. 94. 55.) giebt es für jeden der $\nu = 9$ verschiedenen Werthe von r $n = 2$ *Werthenpaare* von x, und φz ist nach (8.) $= 1.3^{2-1}(3-1)(7-1) = 3.2.6 = 36$. Zufolge (3.) ist $n = 2^{\mu-1} = 2$ und zufolge (6.) $\nu = \frac{36}{2.2} = 9$; wie gehörig.

3. Die Zahl $z = 180$ in dem *ersten* Beispiel zu (§. 94.) ist

$$13. \quad z = 180 = 2^2.3^2.5;$$

also ist hier, mit (1.) verglichen,

$$14. \quad m = 2 \text{ und } \mu = 2.$$

Nach (§. 94. 25.) gehören zu jedem der $\nu = 6$ verschiedenen Werthe von r $n = 4$ *Werthenpaare* von x, und φz ist nach (8.) $= 2.3^{2-1}(3-1)(5-1) = 2.3.2.4 = 48$. Zufolge (3.) ist $n = 2^{\mu} = 4$ und zufolge (6.) $r = \frac{48}{2.4} = 6$; wie gehörig.

4. Die Zahl $z = 120$ in dem *vierten* Beispiele zu (§. 94.) ist

$$15. \quad z = 120 = 2^3.3.5;$$

also ist für sie, mit (1.) verglichen,

$$16. \quad m = 3 > 2 \text{ und } \mu = 2.$$

Nach (§. 91. 62. und 67.) gehören zu jedem der $\nu = 2$ verschiedenen Werthe von r, $n = 8$ Werthenpaare von x, und φz ist nach (8.) $= 2^2(3-1)(5-1) = 4.2.4 = 32$. Zufolge (6.) ist $n = 2^{\mu+1} = 8$ und zufolge (7.) $r = \frac{32}{2.8} = 2$; wie gehörig.

Beweis. *A.* Zunächst ist zu bemerken, dafs nach (§. 94. II.) zu *jedem* Werth von r in (2.) *gleichviele* x gehören, also eben so viele, als zu $r = 1$. Es kommt also nur auf den Fall $r = 1$ an.

B. Ist nun ***Erstlich*** $m=0$, so ist z ***ungerade*** und befindet sich also in dem Fall (§. 94. IX. *a.*). In diesem Fall ist nach (§. 94. IX. *a.*) die Anzahl n der Werthenpaare von x, welche der Gleichung

$$17. \quad x^2 = \mathfrak{G}z+1$$

genugthun, der Anzahl der ***theilerfremden*** Factorenpaare von z gleich. Diese Anzahl ist nach (§. 95. 4. 1.) $\tau_1 = 2^{\mu-1}$, also ist $n=2^{\mu-1}$; gemäfs (3.).

C. Ist ***Zweitens*** $m=1$, so geht z nur mit 2^1 auf und ist also in dem Falle (§. 94. IX. *b.*). In diesem Fall giebt es nach (§. 94. IX. *b.*) ***halb*** so viele Werthenpaare von x, welche der Gleichung (17.) genugthun, als ***theilerfremde*** Factorenpaare von z, von welchen allen je einer 2^1 zum Factor hat. Die Anzahl ***dieser*** theilerfremden Factorenpaare ist nach (§. 95. 4. 2.) $\tau_2 = 2^{\mu}$, also ist hier $n = \frac{1}{2}.2^{\mu} = 2^{\mu-1}$; gemäfs (4.).

D. Ist ***Drittens*** $m=2$, so geht z mit einer ***höhern*** als der ersten Potenz von 2 auf und ist also in dem Falle (§. 94. IX. *c.*). In diesem Fall giebt es nach (§. 94. IX. *c.*) ***doppelt*** so viele Werthenpaare von x, welche der Gleichung (16.) genugthun, als Factorenpaare von z, die 2 zum ***gröfsten*** Gemeintheiler haben. Die Anzahl ***dieser*** Factorenpaare ist diejenige τ_4 in (§. 95. 3. 4.), und nach (§. 95. 4. 4.) ist für $m=2$, $\tau_4 = 2^{\mu-1}$; also ist hier $n = 2.2^{\mu-1} = 2^{\mu}$; gemäfs (5.).

E. Ist endlich ***Viertens*** $m>2$, so verhält sich zwar zunächst Alles wie in (***D.***), aber τ_4 ist in diesem Fall nach (§. 95. 4. 4.) $= 2^{\mu}$: also ist hier $m = 2.2^{\mu} = 2^{\mu+1}$; gemäfs (6.).

F. Die Gleichung (7.) im Lehrsatze folgt unmittelbar aus (§. 94. 4.).

Anm. ***G.*** Wenn z eine einfache ungerade Stammzahl p ist, so ist in (1.) $m=0$ und $\mu=1$. Also ist in diesem Fall nach (3. und 7.)

$$18. \quad n = 1,$$

mithin giebt es ***nur ein*** Werthenpaar x und $z-x$ zu jedem der Quadratreste r. Ferner sind hier alle $p-1$ Zahlen 1, 2. 3, 4, ... $p-1$ zu $z=p$ theilerfremd, also ist $\varphi z = p-1$; und dies giebt nach (7.) und (17.)

$$19. \quad \nu = \tfrac{1}{2}(p-1).$$

Die Anzahl ν der verschiedenen Quadratreste zu p ist also $\frac{1}{2}(p-1)$: alles wie es nach (§. 45.) sein mufs.

§. 97.

Erklärung.

I. *Wenn in der Gleichung*

$$1. \quad z = p^c$$

p *eine beliebige ungerade Stammzahl, also* >2, e *eine beliebige positive ganze Zahl ist, und die zu den Zahlen* z_φ, *welche* >0 *und* $<z$ *und zu* z *theilerfremd sind, gehörigen Quadratreste durch* r, *die Nichtquadratreste durch* w *bezeichnet werden, so dafs also etwa*

$$2.\quad x^2 = \mathfrak{G}z + r \quad \textit{und}$$

$$3.\quad uv = \mathfrak{G}z + w$$

gesetzt wird, wo nun x, u, v, r *und* w *sämmtlich aus den zu* z *theilerfremden Zahlen* $z_\varphi > 0$ *und* $< z$ *genommen sind: so ist die Anzahl der verschiedenen* r, *welche Statt finden, der Anzahl der verschiedenen möglichen* w *gleich, und jede ist* $= \frac{1}{2}\varphi z$, *wo* φz *wie immer die Anzahl der Zahlen* z_φ *bezeichnet; so dafs also die Hälfte der zu* z *theilerfremden* φz *Zahlen* $z_\varphi > 0$ *und* $< z$ *Quadratreste, die andere Hälfte Nichtquadratreste zu den Zahlen* z_φ *selbst sind.*

Desgleichen ist für $z = p^e$ (1.), r *und* w *mögen kleiner oder gröfser als* z *sein,*

$$4.\quad r^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1 \quad \textit{für jeden Quadratrest } r,$$

$$5.\quad w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1 \quad \textit{für jeden Nichtquadratrest } w.$$

Allgemein ist für jede beliebige, zu $z = p^e$ *theilerfremde positive Zahl* z_φ, *sie mag kleiner oder gröfser als* z *sein,*

$$6.\quad z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z \pm 1 \quad \textit{für} \quad z = p^e \text{ (1.)}.$$

II. *Jeder Nichtquadratrest* w *zu* p *ist zugleich Nichtquadratrest zu* $z = p^e$ *für ein beliebiges ganzes positives* e; *und umgekehrt.*

Und wenn die ungerade Stammzahl p *eine der Stammfactoren einer beliebigen Zahl* Z *ist, so giebt es immer zu* Z *theilerfremde Zahlen* $W > 0$ *und* $< Z$, *die zu* p *und zu* Z, *also auch zu* p^e *und zu* Z *zugleich Nichtquadratreste sind. Sie werden, wenn man das Product der ersten Potenzen aller der Stammfactoren, die* Z *noch aufser* p *hat, durch* P *bezeichnet, durch*

$$7.\quad W = n_1 p + w \quad \textit{und}$$

$$8.\quad W = n_2 P + 1$$

zugleich ausgedrückt, wo $n_1 > 0$ *und* $< P$ *und* $n_2 > 0$ *und* $< p$ *ist.*

Beispiel zu I. Es sei

$$9.\quad z = 3^4 = 81, \quad \text{also} \quad p = 3, \quad e = 4,$$

so sind die zu z theilerfremden Zahlen z_φ und die dazu gehörigen *Quadratreste* r folgende:

10.

$z_\varphi =$	$\overset{*}{1}$	2	$\overset{*}{4}$	5	$\overset{*}{7}$	8	$\overset{*}{10}$	11	$\overset{*}{13}$	14	$\overset{*}{16}$	17	$\overset{*}{19}$	20	$\overset{*}{22}$	23	$\overset{*}{25}$	26	$\overset{*}{28}$	29	$\overset{*}{31}$	32	$\overset{*}{34}$	35	$\overset{*}{37}$	38	$\overset{*}{40}$
$r =$	1	4	16	25	49	64	19	40	7	34	13	46	37	76	79	43	58	28	55	31	70	52	22	10	73	67	61
$z_\varphi =$	41	$\overset{*}{43}$	44	$\overset{*}{46}$	47	$\overset{*}{49}$	50	$\overset{*}{52}$	53	$\overset{*}{55}$	56	$\overset{*}{58}$	59	$\overset{*}{61}$	62	$\overset{*}{64}$	65	$\overset{*}{67}$	68	$\overset{*}{70}$	71	$\overset{*}{73}$	74	$\overset{*}{76}$	77	$\overset{*}{79}$	80
$r =$	61	67	73	10	22	52	70	31	55	28	58	43	79	76	37	46	13	34	7	40	19	64	49	25	16	4	1.

Die Anzahl φz der Zahlen z_φ ist hier $\varphi z = 54$. Die Anzahl der verschiedenen ***Quadratreste r*** ist, wie sich zeigt, $= 27$. Es sind die mit einem Sternchen bezeichneten z_φ. Die übrigen 27 Zahlen z_φ sind daher ***Nichtquadratreste w.*** Also sind die ***Hälfte*** der Zahlen z_φ Quadratreste, die andere ***Hälfte*** Nichtquadratreste.

Ferner soll nach dem Lehrsatze (4. und 5.), da hier $\varphi z = 27$ ist, für jeden ***Quadratrest r,*** $r^{27} = \mathfrak{S}.81 + 1$, und für jeden ***Nichtquadratrest w,*** $w^{27} = \mathfrak{S}.81 - 1$ sein. In der That giebt z. B. $r = 19$, $19^3 = 6859 = \mathfrak{S}.81 + 55$, also $19^9 = (\mathfrak{S}.81 + 55)^3 = \mathfrak{S}.81 + 166375 = \mathfrak{S}.81 + 1$ und $19^{27} = (\mathfrak{S}.81 + 1)^3 = \mathfrak{S}.81 + 1$; wie es sein soll. $w = 17$ giebt $17^3 = 4913 = \mathfrak{S}.81 + 53$, also $17^9 = (\mathfrak{S}.81 + 53)^3 = \mathfrak{S}.81 + 148877 = \mathfrak{S}.81 - 1$, und folglich $17^{27} = (\mathfrak{S}.81 - 1)^3 = \mathfrak{S}.81 - 1$; ebenfalls wie es sein soll.

Beispiel zu II. *a.* Es sei

$$11. \quad p = 3, \quad p^e = 3^4 = 81.$$

Der einzige ***Nichtquadratrest*** zu p ist $w = 2$; denn es ist für die beiden zu 3 theilerfremden Zahlen 1 und 2 $1^2 = \mathfrak{S}3 + 1$ und $2^2 = \mathfrak{S}3 + 1$. Dieses $w = 2$ ist, wie aus (10.) zu sehen, auch Nichtquadratrest zu $p^e = 81$. Umgekehrt sind alle die Nichtquadratreste zu $3^4 = 81$, welches die in (10.) ***nicht*** mit einem Sternchen bezeichneten Zahlen 2, 5, 8, 11, 14 u. s. w. sind, auch ***Nichtquadratreste*** zu $p = 3$, denn alle diese Zahlen werden durch $\mathfrak{S}p + 2$ ausgedrückt, und dieses ist mit $w = 2$ ***zugleich*** Nichtquadratrest zu $p = 3$.

b. Es sei

12. $p = 5$, $p^e = 5^2 = 25$ und $Z = 2.3^2.5 = 90$, also $P = 2.3 = 6$. Die zu diesen drei Zahlen theilerfremden Zahlen, kleiner als sie, sind mit ihren ***Quadratresten r*** folgende:

13.

$5_\varphi =$	$\overset{*}{1}$	2	3	$\overset{*}{4}$,
$r =$	1	4	4	1;

14.

$25_\varphi =$	$\overset{*}{1}$	2	3	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{6}$	7	8	$\overset{*}{9}$	$\overset{*}{11}$	12	13	$\overset{*}{14}$	$\overset{*}{16}$	17	18	$\overset{*}{19}$	$\overset{*}{21}$	22	23	$\overset{*}{24}$,
$r =$	1	4	9	16	11	24	14	6	21	19	19	21	6	14	24	11	16	9	4	1;

15.

$90_\varphi =$	$\overset{*}{1}$	7	11	13	17	$\overset{*}{19}$	23	29	$\overset{*}{31}$	37	41	43	47	$\overset{*}{49}$	53	59	$\overset{*}{61}$	67	71	73	77	$\overset{*}{79}$	83	89,
$r =$	1	49	31	79	19	1	79	31	61	19	61	49	49	61	19	61	31	79	1	19	71	31	49	1.

Die ***Nichtquadratreste*** zu den drei Zahlen sind also

16. Zu $p = 5$, $w = 2\ \ 3$,

17. Zu $p^\epsilon = 25$, $w = 2\ \ 3\ \ 7\ \ 8\ 12\ 13\ 17\ 18\ 22\ 23$,

18. Zu $Z = 90$, $W = 7\ 11\ 13\ 17\ 23\ 29\ 37\ 41\ 43\ 47\ 53\ 59\ 67\ 71\ 73\ 77\ 83\ 89$.

Die Nichtquadratreste 2 und 3 (16.) sind wieder zugleich Nichtquadratreste zu $p^\epsilon = 25$ (17.); und umgekehrt können alle Nichtquadratreste zu $p^\epsilon = 25$ (17.) durch $\mathfrak{G}p + 2, 3$ ausgedrückt werden und sind also auch Nichtquadratreste zu $p = 5$.

Ferner giebt (7.), wenn man der Reihe nach $n_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ ($< P$) und nach (16.) $w = 2$ und 3 setzt,

$$19. \quad W = \begin{cases} 7\ \ 12\ \ 17\ \ 22\ \ 27, \\ 8\ \ 13\ \ 18\ \ 23\ \ 28, \end{cases}$$

und (8.) giebt, wenn man der Reihe nach $n_2 = 1, 2, 3, 4$ ($< p$) setzt,

$$20. \quad W = 7\ \ 13\ \ 19\ \ 25.$$

Von diesen Werthen von W (19. und 20.) treffen $W = 7$ und 13 ***zusammen***, das heifst, 7 und 13 erfüllen die beiden Gleichungen (7. und 8.) ***zugleich***. Und diese beiden $W > 0$ und $< Z$ sind, wie nach (13. 14. und 15.) zu sehen, Nichtquadratreste von $p = 5$, $p^\epsilon = 25$ und $Z = 90$ ***zugleich***.

Beweis von I. ***A.*** Man setze in (2.) der Reihe nach ***die erste Hälfte*** aller φz Werthe von z_φ, nemlich die $\frac{1}{2}\varphi z$ Werthe von z_φ, welche > 0 und $< \frac{1}{2}z$ sind, statt x. Die andere Hälfte der $z_\varphi > \frac{1}{2}z$ und $< z$ wird durch $z - z_\varphi$ ausgedrückt, wo $z_\varphi < \frac{1}{2}z$ ist; denn wenn z_φ keinen Theiler mit z gemein hat, so gilt das Gleiche auch von $z - z_\varphi$. Es giebt aber in (2.) $z - z_\varphi$ ***denselben*** Werth von r als z_φ, denn es ist

$$21. \quad (z - z_\varphi)^2 = \mathfrak{G}z + z_\varphi^2 = \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z + r = \mathfrak{G}z + r:$$

also kann es in (2.) ***nicht mehr*** als $\frac{1}{2}\varphi z$ ***verschiedene*** Werthe von r geben, und ***alle*** verschiedenen Werthe von r, welche es giebt, finden sich aus (2.) schon, wenn man dem x in (2.) die $\frac{1}{2}\varphi z$ Werthe von $z_\varphi > 0$ und $< \frac{1}{2}z$ beilegt.

B. Nun seien x_1 und x_2 zwei ***beliebige*** Werthe von x in (2.), beide aus den Zahlen z_φ und beide $< \frac{1}{2}z$. Gäben diese beiden Werthe von x ***einen*** und ***denselben*** Werth von r, so dafs

$$22. \quad x_1^2 = \mathfrak{G}z + r \text{ und}$$

$$23. \quad x_2^2 = \mathfrak{G}z + r$$

wäre, so müfste gemäfs (22. und 23.)

$$24. \quad x_1^2 - x_2^2 = \mathfrak{G}z \text{ oder}$$

$$25. \quad (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \mathfrak{G}z = \mathfrak{G}p^\epsilon$$

sein, also müfsten entweder *Erstlich* x_1+x_2 oder x_1-x_2 mit p^ε aufgehen, oder es müfsten *Zweitens* x_1+x_2 etwa mit p^n und x_1-x_2 mit $p^{\varepsilon-n}$ aufgehen, also x_1+x_2 und x_1-x_2 beide zugleich mit p, so dafs

$$26.\quad x_1+x_2 = \mathfrak{G}p \text{ und}$$
$$27.\quad x_1-x_2 = \mathfrak{G}p \text{ wäre.}$$

C. Mit $p^\varepsilon = z$ kann *Erstlich* weder x_1+x_2 noch x_1-x_2 aufgehen, da x_1 und x_2 nach der Voraussetzung beide $< \frac{1}{2}z$ sind und also sowohl x_1+x_2 als $x_1-x_2 < z$ ist.

D. Gingen *Zweitens* x_1+x_2 und x_1-x_2 beide zugleich mit p auf, so dafs also die Gleichungen (26. und 27.) Statt fänden, so müfste diesen Gleichungen zufolge, wenn man sie addirt und subtrahirt,

$$28.\quad 2x_1 = \mathfrak{G}p \text{ und}$$
$$29.\quad 2x_2 = \mathfrak{G}p$$

sein; also müfste, da $p>2$ vorausgesetzt wird, mithin 2 mit p nicht aufgeht, x_1 und x_2 zugleich mit p aufgehen, folglich mit $z=p^\varepsilon$ den Stammtheiler $p>1$ *gemein* haben. Dieses ist der Voraussetzung entgegen, da x_1 und x_2 aus den Zahlen z_φ genommen werden sollen, die mit z *keinen* Stammtheiler >1 gemein haben. Also können in (25.) auch x_1+x_2 und x_1-x_2 nicht beide zugleich mit p aufgehen.

E. Es kann also überhaupt die Gleichung (25.), oder die (24.), also (22. und 23.) *nicht* Statt finden, das heifst: es können keine zwei $x=z_\varphi < \frac{1}{2}z$ *denselben* Quadratrest r geben. Mithin sind die Quadratreste zu allen den $\frac{1}{2}\varphi z$ Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< \frac{1}{2}z$ *verschieden*, und folglich giebt es auch *nicht weniger* als $\frac{1}{2}\varphi z$ verschiedene Quadratreste zu z. Da es nun nach (*A.*) auch *nicht mehr* giebt, so ist die Anzahl der *Quadratreste* zu $z=p^\varepsilon$ aus den Zahlen z_φ nothwendig *gleich* $\frac{1}{2}\varphi z$.

F. Es giebt aber φz verschiedene Zahlen z_φ. Also mufs, da die *Hälfte* davon *Quadratreste* sind, die andere *Hälfte* nothwendig *Nichtquadratreste* sein; wie es der Lehrsatz behauptet.

G. Es ist ferner nach dem allgemeinen *Fermat*schen Lehrsatze (§. 87.) für *jedes* z_φ:

$$30.\quad z_\varphi^{\varphi z} = \mathfrak{G}z+1,$$

woraus

$$z_\varphi^{\varphi z}-1 = \mathfrak{G}z \text{ oder}$$
$$31.\quad (z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}+1)(z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}-1) = \mathfrak{G}z$$

und hier für $z=p^\varepsilon$

$$32. \quad (z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}+1)(z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}-1) = \mathfrak{G}p^\varepsilon$$

folgt, so dafs also entweder *Erstlich* $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}+1$ etwa mit p^n und $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}-1$ mit $p^{\varepsilon-n}$, folglich $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}+1$ und $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}-1$ beide mit p aufgehen müssen, dergestalt dafs die Gleichungen

$$33. \quad z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}+1 = \mathfrak{G}p \text{ und}$$

$$34. \quad z^{\frac{1}{2}\varphi z}-1 = \mathfrak{G}p$$

zugleich für *ein- und dasselbe* z_φ Statt finden, oder dafs *Zweitens entweder* $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}+1$ *oder* $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}-1$ mit $p^\varepsilon = z$ selbst aufgehen mufs, und dafs also

$$35. \quad \text{entweder } z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}+1 = \mathfrak{G}z$$

$$36. \quad \text{oder } z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}-1 = \mathfrak{G}z$$

sein mufs.

H. Das *Erste*, dafs $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z}+1$ und $z^{\frac{1}{2}\varphi z}-1$ beide zugleich mit p aufgehen, oder dafs die Gleichungen (33. und 34.) *zugleich* Statt finden, ist nicht möglich; denn diese beiden Gleichungen geben, von einander abgezogen,

$$37. \quad 2 = \mathfrak{G}p,$$

und 2 geht nicht mit p auf.

I. Es kann also nur das *Zweite* Statt finden, nemlich *entweder* die Gleichung (35.), *oder* die Gleichung (36.); und die eine oder die andere *mufs nothwendig* Statt finden, da die aus (30.) folgende Gleichung (32.), aus welcher (35. und 36.) genommen sind, für *jedes* z_φ *nothwendig* Statt hat.

Also ist für *jedes* z_φ, das heifst für *jede* zu $z = p^\varepsilon$ theilerfremde positive Zahl z_φ, sie mag *kleiner* oder *gröfser* als $z = p^\varepsilon$ sein (denn für *alle* solche Zahlen gilt der allgemeine *Fermat*sche Satz (§. 87.)), *entweder* $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z+1$, *oder* $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z-1$, und folglich ist allgemein für jede beliebige zu z theilerfremde Zahl $z_\varphi <$ oder $> z$,

$$38. \quad z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z \pm 1 \quad \text{für} \quad z = p^\varepsilon;$$

wie es der Lehrsatz in (6.) behauptet.

Dafs nicht die beiden Gleichungen (35. und 36.) für ein- und dasselbe z_φ *zugleich* Statt finden können, ist offenbar, denn die Gleichungen geben, von einander abgezogen,

$$39. \quad 2 = \mathfrak{G}z = \mathfrak{G}e^p,$$

und 2 geht nicht mit e^p auf.

K. Nun erhebe man die Gleichung (2.), in welcher r einer der *Quadratreste* zu $z = p^\varepsilon$ ist, zur Potenz $\frac{1}{2}\varphi z$, so ergiebt sich

$$40. \quad (x^2)^{\frac{1}{2}\varphi z} = x^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + r^{\frac{1}{2}\varphi z}.$$

Aber nach dem allgemeinen *Fermat*schen Lehrsatze ist für *jedes* zu z theilerfremde $x = z_\varphi$,

$$41. \quad x^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1,$$

also folgt aus (40.)

$$\mathfrak{G}z + 1 = \mathfrak{G}z + r^{\frac{1}{2}\varphi z} \text{ oder}$$

$$42. \quad r^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1,$$

das heifst: für *jeden Quadratrest* r ist nothwendig $r^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$; wie es der Lehrsatz in (4.) behauptet.

L. Es fragt sich nun, ob auch *Nichtquadratreste* w, $w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$ geben können. Dieses würde der Fall sein, wenn die Gleichung (42.) für *mehr* als $\frac{1}{2}\varphi z$ Werthe von r aus den Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ Statt fände, da es nach (*F.*) nicht mehr als $\frac{1}{2}\varphi z$ Quadratreste r zu $z = p^e$ giebt.

M. Es sei p^k eine beliebige, etwa niedrigere Potenz von p als $z = p^e$ und

$$43. \quad p^k = y.$$

Die zu diesem $y = p^k$ theilerfremden φy Zahlen $y_\varphi > 0$ und $< y$ sind alle diejenigen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ... y, die mit p *nicht aufgehen.* Ihre Anzahl ist nach (§. 81. 7.)

$$44. \quad \varphi y = p^{k-1}(p-1).$$

N. Es sei ferner

$$45. \quad t = p^{k+m} = p^m y$$

eine um m *höhere* Potenz von p als y. Die zu diesem $t = p^{k+m}$ theilerfremden φt Zahlen $t_\varphi > 0$ und $< t$ sind wiederum alle diejenigen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ... t $(= p^m y)$, die mit p *nicht aufgehen.* Ihre Anzahl ist nach (§. 81. 7.)

$$46. \quad \varphi t = p^{k+m-1}(p-1),$$

also p^m *mal so grofs* als die Zahl φy (44.) der zu $y = p^k$ theilerfremden Zahlen > 0 und $< y$, so dafs

$$47. \quad \varphi t = p^m \varphi y$$

ist. Dabei werden *alle* die Zahlen $t_\varphi > 0$ und $< t$ durch

$$48. \quad t_\varphi = ny + y_\varphi$$

ausgedrückt, wo

$$49. \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots p^m - 1$$

ist, und es giebt keine andern t_φ. Denn allgemein drückt $ny + r$, wo $r > 0$ und $< y$ ist, mit den Werthen (49.) von n *alle* die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... t ohne Ausnahme aus, und da nun die t_φ in (49.) diejenigen derselben sein sollen, welche mit p nicht aufgehen, so kann r in $ny + r$ nur diejenigen Zahlen > 0 und $< y$ bezeichnen, welche mit p *nicht aufgehen,* also nur die y_φ; denn

ginge in $ny+r$, r mit p auf, so würden auch die durch $ny+r$ ausgedrückten Zahlen selbst, weil $y=p^k$ mit p aufgeht, durch p theilbar sein; was t_φ nicht sein soll. Ferner giebt es auch eben deshalb *keine andern* t_φ weiter, als die, welche (48. und 49.) ausdrücken. Denn gäbe es andere, so könnten sie durch $ny+r$ nur dann ausgedrückt werden, wenn darin r *nicht mehr* wie y_φ zu $y=p^k$ theilerfremd wäre, sondern mit p aufginge. Diese mit einem *solchen* r ausgedrückten $ny+r$ aber würden mit p aufgehen und folglich keine t_φ sein.

O. Aus (48. und 49.) folgt, dafs nicht blofs nach (47.) überhaupt p^m mal so viele t_φ als y_φ verschieden sind, sondern dafs auch zu *jedem einzelnen* y_φ, p^m zu $t=p^{k+m}$ theilerfremde Zahlen >0 und $<t$ gehören; denn (48.) giebt, weil n vermöge (49.) p^m verschiedene Werthe hat, für *ein- und dasselbe* y_φ, p^m verschiedene t_φ.

P. Nun sei x irgend eines derjenigen y_φ, für welches

$$50.\quad x^{\frac{1}{2}\varphi y} = y_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi y} = \mathfrak{G}y+1$$

ist, und λ nirgend eines derjenigen y_φ, für welches

$$51.\quad \lambda^{\frac{1}{2}\varphi y} = y_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi y} = \mathfrak{G}y-1$$

ist. Eines oder das Andere ist für *jedes* y_φ der Fall, so dafs x und λ *alle* $y_\varphi >0$ und $<y$ bezeichnen. Denn da nach (6.) $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z\pm 1$ für *alle* z_φ ist, und für $z=p^e$ (1.), so ist auch für *alle* y_φ,

$$52.\quad y_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi y} = \mathfrak{G}y\pm 1$$

für $y=p^k$ (43.).

Zu *jedem* $x=y_\varphi$ gehören nun nach (*O.*) p^m und zu *jedem* $\lambda=y_\varphi$ p^m verschiedene t_φ, die durch (48. und 49.) ausgedrückt werden. Bezeichnet man also erstere durch τ, letztere durch σ, so ist nach (48.)

$$53.\quad \tau = ny+x \text{ und}$$

$$54.\quad \sigma = ny+\lambda,$$

und τ und σ bezeichnen nun zusammen *alle* vorhandenen t_φ.

Aber eben wie nach (6.) für $z=p^e$ (1.), $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z\pm 1$ ist, ist auch für $t=p^{k+m}$,

$$55.\quad t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{G}t\pm 1,$$

oder, da $\varphi t = p^m \varphi y$ ist (47.),

$$56.\quad t_\varphi^{\frac{1}{2}p^m\varphi y} = \mathfrak{G}t\pm 1$$

und, wenn man hierin den Ausdruck (48.) von t_φ setzt,

$$57.\quad t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = t_\varphi^{\frac{1}{2}p^m\varphi y} = (ny+y_\varphi)^{\frac{1}{2}p^m\varphi y} = \mathfrak{G}y + y_\varphi^{\frac{1}{2}p^m\varphi y}.$$

Giebt man in dieser Gleichung dem y_φ rechterhand die Werthe x (50.), zu deren jedem p^m verschiedene Werthe von $\tau = t_\varphi$ gehören, so erhält man aus (50.)

58. $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \tau^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}y + (\mathfrak{S}y+1)^{p^m} = \mathfrak{S}y+1$

für *alle* $\tau = t_\varphi$; und giebt man in (57.) dem y_φ rechts die Werthe λ (51.), zu deren jedem p^m verschiedene Werthe von $\sigma = t_\varphi$ gehören, so giebt (51.)

59. $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \sigma^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}y + (\mathfrak{S}y-1)^{p^m} = \mathfrak{S}y - 1,$

letzteres weil p und folglich p^m *ungerade* ist.

Es folgt also, dafs alle die p^m zu jedem $y_\varphi = x$ gehörigen Werthe τ von t_φ, zur Potenz $\frac{1}{2}\varphi t$ erhoben, $\mathfrak{S}y+1$, und alle die p^m zu jedem $y_\varphi = \lambda$ gehörigen Werthe σ von t_φ, zur Potenz $\frac{1}{2}\varphi t$ erhoben, $\mathfrak{S}y-1$ geben.

Q. Jene zu den $y_\varphi = x$ gehörigen Werthe τ von t_φ können aber *nur diejenigen* t_φ in (55.) sein, welche *zugleich*

60. $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \tau^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}t+1$

geben, und die zu den $y_\varphi = \lambda$ gehörigen Werthe σ von t_φ *nur diejenigen* t_φ in (55.), für welche *zugleich*

61. $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \sigma^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}t-1$

ist: denn wäre es anders und z. B. nach (58. und 61.) *zugleich* für ein- und dasselbe t_φ

62. $\begin{cases} t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}y+1 \text{ und} \\ t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}t-1, \end{cases}$

so müfste, Eins vom Andern abgezogen,

63. $0 = \mathfrak{S}y - \mathfrak{S}t + 2$

sein, also müfste, da y und t beide mit p aufgehen, auch 2 mit p aufgehen; was nicht der Fall ist. Aus gleichem Grunde kann nicht nach (59 und 60.) *zugleich* für ein- und dasselbe t_φ,

64. $\begin{cases} t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}y-1 \text{ und} \\ t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}t+1 \end{cases}$

sein. Es kann also nur für ein- und dasselbe t_φ *zugleich*,

65. $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}y+1$ und $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}t+1$ oder

66. $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}y-1$ und $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}t-1$

sein. Und da nun die Werthe τ von t_φ nach (58.) $\tau^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}y+1$ und die Werthe σ von t_φ nach (59.) $\sigma^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{S}y-1$ geben, so kann nur Statt finden, was die Gleichungen (60. und 61.) ausdrücken.

Es folgt demnach, dafs nur diejenigen Werthe τ von t_φ, welche nach (48.) zu den $y_\varphi = x$ (50.) gehören, $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{G}t + 1$, und *nur* diejenigen Werthe σ von t_φ, welche nach (48.) zu den $y_\varphi = \lambda$ (51.) gehören, $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{G}t - 1$ geben können; wobei zugleich die τ und die σ zusammen die *sämmtlichen* Werthe von t_φ sind. Und da nun zu jedem $y_\varphi = x$ und zu jedem $y_\varphi = \lambda$ p^m verschiedene Werthe von t_φ gehören, so folgt, dafs es p^m *mal so viele* Werthe τ von t_φ giebt, die die Gleichung (60.) erfüllen, als $y_\varphi = x$ vorhanden sind, die der Gleichung (37.) genugthun, und p^m *mal so viele* Werthe σ von t_φ, die der Gleichung (61.) genugthun, als es $y_\varphi = \lambda$ giebt, die die Gleichung (51.) erfüllen.

Man wird demnach die Anzahl der Werthe τ und σ von t_φ finden, wenn man die Zahl der Werthe x und λ von y_φ für $y = p^k$ *für irgend einen Werth von k* kennt; man darf den letzten nur mit p^m multipliciren.

R. Für $k = 1$ in $y = p^k$ (43.), nemlich für

$$67.\quad y = p,$$

ist aber die Zahl der $y_\varphi = x$ und der $y_\varphi = \lambda$, welche $x^{\frac{1}{2}\varphi y} = \mathfrak{G}y + 1$ und $\lambda^{\frac{1}{2}\varphi y} = \mathfrak{G}y - 1$ geben, wirklich bekannt. Hier ist nemlich $\frac{1}{2}\varphi y = \frac{1}{2}\varphi p = \frac{1}{2}(p-1)$; alle *Quadratreste* r zu p geben nach (§. 49.) $r^{\frac{1}{2}(p-1)} = \mathfrak{G}p + 1$, und alle *Nichtquadratreste* ϱ zu p geben $\varrho^{\frac{1}{2}(p-1)} = \mathfrak{G}p - 1$. Also sind die Quadratreste r die hiesigen x und die Nichtquadratreste ϱ die hiesigen λ. Sodann ist nach (§. 45.) die Zahl der Quadratreste der Zahl der Nichtquadratreste *gleich*, also die Zahl von beiden $\frac{1}{2}(p-1)$. Folglich giebt es für $x = 1$ $\frac{1}{2}(p-1)$ Werthe x von y_φ, die die Gleichung (50.), und $\frac{1}{2}(p-1)$ Werthe λ von y_φ, die die Gleichung (51.) erfüllen.

Demnach giebt es denn also für

$$68.\quad t = p^{m+1}\ (32.),$$

da jetzt in (45.) $k = 1$ gesetzt worden ist, vermöge (*Q.*),

69. $\frac{1}{2}(p-1).p^m$ Werthe τ von t_φ, für welche $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{G}t + 1$ ist (60.) und

70. $\frac{1}{2}(p-1).p^m$ Werthe σ von t_φ, für welche $t_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi t} = \mathfrak{G}t - 1$ ist (61.).

S. Man setze nun in (68.) $m + 1 = e$ oder $m = e - 1$, so geht t (68.) in z (1.) über und es folgt also aus (69. und 70.), dafs es

71. $\frac{1}{2}(p-1).p^{e-1}$ Werthe von z_φ giebt, für welche $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$, und

72. $\frac{1}{2}(p-1).p^{e-1}$ Werthe von z_φ, für welche $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1$ ist.

Aber nach (§. 7.) ist

$$73.\quad \tfrac{1}{2}(p-1)p^{e-1} = \tfrac{1}{2}\varphi p^e = \tfrac{1}{2}\varphi z:$$

also giebt es nach (71. und 72.)

74. $\frac{1}{2}\varphi z$ Werthe von z_φ, für welche $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$, und

75. $\frac{1}{2}\varphi z$ Werthe von z_φ, für welche $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1$ ist.

T. Nun war nach (*K.*) für *sämmtliche Quadratreste* $r = z_\varphi$, $r^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$, und die *Anzahl* der Quadratreste ist nach (*E.*) $= \frac{1}{2}\varphi z$: also folgt schliefslich, weil von den überhaupt vorhandenen φz Werthen von z_φ nur noch die $\frac{1}{2}\varphi z$ *Nichtquadratreste* übrig bleiben, dafs für *diese*, gemäfs (75.), $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1$ ist. Dieses ist was der Lehrsatz in (5.) behauptet.

U. a. Übrigens, wenn eine zu z theilerfremde Zahl z_φ, die *gröfser* als z ist, ein *Quadratrest* zu z sein soll, so kann sie nur durch

$$76. \quad z_\varphi = \mathfrak{G}z + r$$

ausgedrückt werden, wo r eine der Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ und *Quadratrest* zu z ist. Denn gesetzt x sei die Zahl, welche den vorausgesetzten Quadratrest z_φ giebt, so mufs

$$77. \quad x^2 = \mathfrak{G}z + z_\varphi$$

sein. Wäre nun in (77.) z_φ nicht nach (76.) $= \mathfrak{G}z + r$, so könnte nur

$$78. \quad z_\varphi = \mathfrak{G}z + w$$

sein, wo w eine der Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ und *Nichtquadratrest* zu z ist. Dann aber wäre in (77.)

$$79. \quad x^2 = \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z + w = \mathfrak{G}z + w$$

und es gäbe also eine Zahl x, deren *Quadrat* zu z den *Nichtquadratrest* w liefse; was nicht sein kann.

b. Eben so kann eine zu z theilerfremde Zahl z_φ, die *gröfser* als z ist, wenn sie *Nichtquadratrest* zu z sein soll, nur durch

$$80. \quad z_\varphi = \mathfrak{G}z + w$$

ausgedrückt werden, wo w eine der Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ und *Nichtquadratrest* zu z ist. Denn gesetzt es wäre nicht wie in (80.) $z_\varphi = \mathfrak{G}z + w$, so könnte nur

$$81. \quad z_\varphi = \mathfrak{G}z + r$$

sein, wo r eine der Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ und *Quadratrest* zu z ist. Dann aber gäbe es nach (*a.*) eine Zahl x, für welche

$$82. \quad x^2 = \mathfrak{G}z + z_\varphi$$

ist und z_φ wäre also nicht *Nichtquadratrest* zu z, sondern *Quadratrest*; gegen die Voraussetzung.

c. Also *alle* zu z theilerfremden Zahlen $z_\varphi > z$, welche *Quadratreste* zu z sind, werden nur durch $z_\varphi = \mathfrak{G}z + r$ ausgedrückt, wo r ein

Quadratrest zu z und $< z$ ist, und alle zu z theilerfremden Zahlen $z_\varphi > z$, welche ***Nichtquadratreste*** zu z sind, nur durch $z_\varphi = \mathfrak{G}z + w$, wo w ein ***Nichtquadratrest*** zu z und $< z$ ist.

Nun ist aber

$$83.\quad z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = (\mathfrak{G}z + r)^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + r^{\frac{1}{2}\varphi z} \text{ und}$$

$$84.\quad z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = (\mathfrak{G}z + w)^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + w^{\frac{1}{2}\varphi z}.$$

Setzt man hierin (4. und 5.), so ergiebt sich

85. $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z + 1 = \mathfrak{G}z + 1$ für die $z_\varphi > z$, welche ***Quadratreste*** zu z sind und

86. $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z - 1 = \mathfrak{G}z - 1$ für die $z_\varphi > z$, welche ***Nichtquadratreste*** zu z sind;

und folglich gelten die Gleichungen (4. und 5.) auch für die r und w, welche ***gröfser*** als z sind.

Beweis von II. *V.* Wäre ein ***Nichtquadratrest*** w zu p nicht auch Nichtquadratrest zu p^e, so könnte er nur ***Quadratrest*** zu p sein, denn ***theilerfremd*** auch zu p^e ist jedes zu p theilerfremde w. Es müfste also dann eine Zahl x geben, für welche

$$88.\quad x^2 = \mathfrak{G}p^e + w$$

wäre. Diese Gleichung heifst aber eben so viel als

$$89.\quad x^2 = \mathfrak{G}p + w,$$

denn $\mathfrak{G}p^e$ ist immer ein ganzzahliges Vielfache von p. Also wäre nach (89.) w nicht ein ***Nichtquadratrest***, sondern ein Quadratrest zu p; gegen die Voraussetzung. Mithin sind alle ***Nichtquadratreste*** zu p auch zugleich ***Nichtquadratreste*** zu p^e, was zunächst (II.) behauptet.

W. Für jeden ***Nichtquadratrest*** w zu $z = p^e$ ist nach (5.)

$$90.\quad w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1 = \mathfrak{G}p^e - 1,$$

oder, da nach (§. 81. 7.) $\frac{1}{2}\varphi z = \frac{1}{2}p^{e-1}(p-1)$ ist und $\mathfrak{G}p^e$ auch durch $\mathfrak{G}p$ ausgedrückt wird,

$$91.\quad w^{\frac{1}{2}p^{e-1}(p-1)} = \mathfrak{G}p - 1.$$

Wäre nun w nicht ein ***Nichtquadratrest*** zu p, so müfste es ein ***Quadratrest*** zu p sein, denn ***theilerfremd*** auch zu p ist jedes zu p^e theilerfremde w. Dann aber wäre nach (§. 49. 1.)

$$92.\quad w^{\frac{1}{2}(p-1)} = \mathfrak{G}p + 1.$$

Dieses zur Potenz p^{e-1} erhoben giebt

$$93.\quad w^{\frac{1}{2}p^{e-1}(p-1)} = (\mathfrak{G}p + 1)^{p^{e-1}} = \mathfrak{G}p + 1$$

statt dafs nach (91.) $w^{\frac{1}{2}p^{e-1}(p-1)} = \mathfrak{G}p - 1$ sein soll. Also kann w nicht ***Qua-***

dratrest zu p sein, und folglich ist auch umgekehrt jeder *Nichtquadratrest* w zu p^e auch *Nichtquadratrest* zu p; wie es ferner (II.) behauptet.

X. *a.* Die beliebige Zahl Z werde wie in (§. 96.) durch

$$94. \quad Z = 2^m . p_1^{e_1} . p_1^{e_2} . p_3^{e_3} \dots . p_\mu^{e_\mu}$$

ausgedrückt. Es sei w einer der *Nichtquadratreste* zu p_1 und $< p_1$. Alsdann sind nach (*U. b.*) auch alle durch

$$95. \quad W = n_1 p_1 + w$$

ausgedrückte Zahlen, wo n_1 eine ganz beliebige ganze Zahl ist, *Nichtquadratreste* zu p_1.

Die in (II.) bezeichnete Gröfse P ist hier

$$96. \quad P = 2 p_2 . p_3 . p_4 \dots . p_\mu,$$

denn sie soll das Product der ersten Potenzen aller der Stammfactoren sein, die Z (94.) noch aufser p_1 enthält. Diese Gröfse P ist zu p_1 *theilerfremd*, denn sie enthält den Stammfactor p_1 nicht.

b. Nun setze man *willkürlich* die Gleichung

$$97. \quad W = n_1 p_1 + w \text{ (95.)} = n_2 P + 1,$$

welche

$$98. \quad n_2 P = n_1 p_1 + w - 1$$

giebt. Für diese *willkürliche* Gleichung findet nach (§. 34.), weil P und p_1 *theilerfremd* sind (*a.*), für n_2 immer ein ganzzahliger positiver Werth > 0 und $< p_1$ und für n_1 ein ganzzahliger positiver Werth > 0 und $< P$ Statt. Also ist $n_1 p_1$ immer $< P p_1$ und höchstens $= (P-1) p_1$, und folglich ist in (95.) W höchstens $= (P-1) p_1 + w$, mithin, da $w < p_1$ sein soll, $W < P p_1$ und folglich jedenfalls

$$99. \quad W < z;$$

denn Z (94.) ist vermöge (96.) $= P p_1 . 2^{m-1} . p_1^{e_1 - 1} . p_2^{e_2 - 1} \dots . p_\mu^{e_\mu - 1}$.

c. Nun soll vermöge (97.) *zugleich*

$$100. \quad W = n_1 p_1 + w \text{ und}$$

$$101. \quad W = n_2 P + 1 \text{ sein.}$$

Aus (100.) folgt, dafs W nicht mit p_1 aufgeht; denn $w < p_1$ geht damit nicht auf, und aus (101.) folgt, dafs W mit keinem der Stammfactoren > 1 von P aufgeht, die alle die übrigen Stammfactoren sind, welche Z noch aufser p_1 enthält, denn 1 geht mit keinem dieser Factoren auf. Also folgt aus (100. und 101.), dafs W mit keinem einzigen der Stammfactoren > 1 von Z aufgeht und folglich zu Z *theilerfremd* ist

d. Nun kann W kein *Quadratrest* zu Z sein. Denn wäre dies der Fall, so müfste es eine zu Z und folglich auch zu p_1 theilerfremde Zahl x geben, für welche

$$102. \quad x^2 = \mathfrak{G}Z + W$$

wäre. Diese Gleichung zur Potenz $\frac{1}{2}(p-1)$ erhoben, giebt

$$103. \quad x^{p-1} = (\mathfrak{G}Z + W)^{\frac{1}{2}(p_1-1)} = \mathfrak{G}Z + W^{\frac{1}{2}(p-1)},$$

oder, da $\mathfrak{G}Z$ vermöge (94.) auch durch $\mathfrak{G}p_1$ ausgedrückt werden kann,

$$104. \quad x^{p-1} = \mathfrak{G}p_1 + W^{\frac{1}{2}(p_1-1)}.$$

Aber W ist *Nichtquadratrest* zu p_1 (*a.*), und für alle *Nichtquadratreste* zu der Stammzahl p_1 ist nach (§. 49. 1.)

$$105. \quad W^{\frac{1}{2}(p_1-1)} = \mathfrak{G}p_1 - 1:$$

also wäre in (104.)

$$106. \quad x^{p_1-1} = \mathfrak{G}p_1 + \mathfrak{G}p_1 - 1 = \mathfrak{G}p_1 - 1.$$

Nach dem allgemeinen *Fermat*schen Satze (§. 40.) ist aber für *alle möglichen* zu p_1 theilerfremden Zahlen:

$$107. \quad x^{p_1-1} = \mathfrak{G}p_1 + 1;$$

also kann W nicht *Quadratrest* zu Z sein und ist folglich nothwendig *Nichtquadratrest* zu Z.

e. Es giebt daher, wenn p_1 einer der Stammfactoren zu der beliebigen Zahl Z ist, immer Zahlen $W > 0$ und $< Z$ (99.), die durch (100. und 101.) oder durch (7. und 8.) ausgedrückt werden, wo w einer der *Nichtquadratreste* zu p_1 und > 0 und $< p_1$ ist, die zu p_1 und Z *zugleich Nichtquadratreste* sind; wie es (II.) behauptet.

Y. Anmerkung. Zu erinnern ist, dafs die Behauptungen (I.) des Lehrsatzes nur für den Fall nothwendig gelten, wo z, wie in (1.) vorausgesetzt, irgend eine Potenz mit positivem ganzzahligen Exponenten von einer *ungeraden Stammzahl* p ist, oder, was dasselbe ist, nur den einen Stammtheiler $p > 2$ hat. Denn hätte z mehrere solche Stammtheiler, oder auch nur den einen Stammtheiler 2, so würden diejenigen Schlüsse in (*D.*) und weiter, bei welchen vorausgesetzt wird, dafs p eine Stammzahl > 2 sei und z nur diesen einen Stammtheiler haben solle, *nicht* Statt finden.

§. 98.

Lehrsatz.

Wenn in der Gleichung

$$1. \quad z = 2^m$$

m *eine beliebige positive ganze Zahl* > 1 *ist und man bezeichnet die zu*

z theilerfremden Zahlen >0 *und* $<$ z, *welche hier die sämmtlichen ungeraden Zahlen*

$$2.\quad 1, 3, 5, 7, 9, \ldots . z-1$$

sind, wie immer durch z_φ, *ihre Anzahl durch* φz, *so ist für jedes* $m>1$ *und für jedes* z_φ, *sei es Quadratrest oder Nichtquadratrest zu z,*

$$3.\quad z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z+1;$$

mit der einzigen Ausnahme der Zahl

$$4.\quad z_\varphi = 3 \text{ für } m=2, \text{ also für } z=2^2=4,$$

für welche

$$5.\quad z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = 3^1 = \mathfrak{G}z-1 \text{ ist.}$$

Nichtquadratreste zu $z=2^m$ *giebt es übrigens immer, für jedes* $m>1$.

Beispiel. Es sei

$$6.\quad m=4, \text{ also } z=2^4=16.$$

Dann sind die zu z theilerfremden Zahlen >0 und $<z$ folgende:

$$7.\quad z_\varphi = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \text{ und } 15,$$

und ihre Anzahl ist

$$8.\quad \varphi z = 8, \text{ also ist } \tfrac{1}{2}\varphi z = 4.$$

Nun findet sich $1^4 = \mathfrak{G}.16+1$, $3^4=81=\mathfrak{G}.16+1$, $5^4=25^2=(\mathfrak{G}.16+9)^2 = \mathfrak{G}.16+81=\mathfrak{G}.16+1$, $7^4=49^2=(\mathfrak{G}.16+1)^2=\mathfrak{G}.16+1$, $9^4=81^2 = (\mathfrak{G}.16+1)^2=\mathfrak{G}.16+1$, $11^4=121^2=(\mathfrak{G}.16+9)^2=\mathfrak{G}.16+81 = \mathfrak{G}.16+1$, $13^4=169^2=(\mathfrak{G}.16+9)^2=\mathfrak{G}.16+81=\mathfrak{G}.16+1$, $15^4 = (\mathfrak{G}.16-1)^4=\mathfrak{G}.16+1$; der Gleichung (3.) gemäfs.

Dafs nach (5.) $3^1=\mathfrak{G}.4-1$ sei, ist offenbar.

Die Zahlen (7.) quadrirt geben der Reihe nach $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, 13^2, 15^2 = \mathfrak{G}.16+1, 9, 9, 1, 1, 9, 9$ und 1, also sind hier von den Zahlen z_φ (7.) nur die beiden 1 und 9 *Quadratreste,* die übrigen 3, 5, 7, 11, 13 und 15 sind *Nichtquadratreste.*

Beweis. *A.* Dafs zuerst die z_φ hier alle die *ungeraden* Zahlen (2.) sind, ist leicht zu sehen; denn $z=2^m$ hat nur den einen Stammtheiler 2, und diesen hat keine der ungeraden Zahlen (2.); also sind sie zunächst sämmtlich zu $z=2^m$ theilerfremd. Es giebt aber auch *keine andern* z_φ. Denn andere z_φ könnten nur *gerade* Zahlen sein, und alle diese gehen mit dem Stammtheiler 2 von $z=2^m$ auf und sind folglich zu $z=2^m$ *nicht* theilerfremd.

B. Für $m=2$, also $z=2^2=4$, giebt es nur die beiden zu z theilerfremden Zahlen 1 und 3 >0 und $<z$. Die Anzahl φz der z_φ ist also

hier $=2$, folglich ist $\frac{1}{2}\varphi z=1$, und $1^{\frac{1}{2}\varphi z}=1^1=1$ erfüllt noch die Gleichung (3.); hingegen 3 giebt $3^{\frac{1}{2}\varphi z}=3^1=3=\mathfrak{G}z-1$; gemäfs (5.).

C. Da hier z_φ nie etwas anderes als eine *ungerade* Zahl sein kann, so kann *jedes* z_φ für *jedes* m durch

$$9. \quad z_\varphi = 4n\pm1 = 2^2.n\pm1$$

ausgedrückt werden (§. 10.).

Quadrirt man die Gleichung (9.) wiederholt, so ergiebt sich, sie selbst hinzugeschrieben:

$$10. \quad \begin{cases} z_\varphi = 2^2.n\pm1, \\ z^{2^1} = (2^2.n\pm1)^2 = 2^4.n\pm2^3.n+1 = \mathfrak{G}.2^3+1, \\ z^{2^2} = (\mathfrak{G}.2^3+1) = \mathfrak{G}^2.2^6+2\mathfrak{G}.2^3+1 = \mathfrak{G}.2^4+1, \\ z^{2^3} = (\mathfrak{G}.2^4+1) = \mathfrak{G}^2.2^8+2\mathfrak{G}.2^4+1 = \mathfrak{G}.2^5+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Bei jeder neuen Quadrirung kommt $\mathfrak{G}$mal die zugehörige Potenz von 2, 2 *mal genommen* vor, und dieses Glied bestimmt die Potenz von 2 zu dem neuen $\mathfrak{G}$, die also um 1 höher ist als die vorigen. Andrerseits steigt bei jeder Quadrirung auch der Exponent der 2 in dem Exponenten von z_φ linkerhand ebenfalls um 1: also steigen die Exponenten der 2 rechts und die Exponenten der 2 in dem Exponenten von z_φ links stets um *gleich viel*, mithin beide gleichmäfsig, z. B. durch k Quadrirungen um k. Nun ist in der *zweiten* Gleichung (10.) der Exponent 3 von 2 rechts um 2 gröfser als der Exponent 1 der 2 in dem Exponenten von z_φ. Erreicht also der Exponent der 2 rechts die Zahl m, so wird der Exponent der 2 in dem Exponenten der 2 von z_φ links die Zahl $m-2$ erreicht haben, und folglich ist allgemein für jedes m

$$11. \quad z_\varphi^{2^{m-2}} = \mathfrak{G}.2^m+1.$$

Aber 2^m ist z selbst (1.), also giebt (11.)

$$12. \quad z_\varphi^{2^{m-2}} = \mathfrak{G}z+1.$$

D. Nach (§. 81. 7.) ist aber

$$13. \quad \varphi z = \varphi.2^m = 2^{m-1}.1 = 2^{m-1},$$

also ist

$$14. \quad \tfrac{1}{2}\varphi z = \tfrac{1}{2}.2^{m-1} = 2^{m-2}.$$

Es ist demnach, (14.) in (12.) gesetzt,

$$15. \quad z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z+1,$$

für jedes z_φ und jedes $m>1$; gemäfs (3.).

E. Ausgenommen ist indessen der Fall $m = 2$. Für diesen gilt nur die *erste* Gleichung (10.), und diese wird auch für $z_\varphi = 1$ und 3 gehörig erfüllt; wie es sich in (*B.*) zeigte.

F. Dafs es zu $z = 2^m$ *immer Nichtquadratreste* und *mindestens* $\frac{1}{4}\varphi z$ *Nichtquadratreste* unter den φz Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ gebe, ist (§. 90. VI.) gemäfs.

§. 99.

Lehrsatz.

Man bezeichne wie in (§. 92.) *das* **Product** *der sämmtlichen zu einer beliebigen Zahl* z **theilerfremden** *Zahlen* >0 *und* $<$ z *durch* Z, *durch* p *eine beliebige* **Stammzahl** > 2 *und durch* e *eine beliebige ganze positive Zahl. Alsdann ist*

1. $Z = \mathfrak{G}z - 1$ *für* $z = 4$, $z = p^e$, $z = 2p^e$, und
2. $Z = \mathfrak{G}z + 1$ *für jedes andere* z.

Dieses ist der **verallgemeinerte Wilsonsche Satz** (§. 48.). *Denn für den besondern Fall* $e = 1$ *in* $z = p^e$ (1.) *ist er es selbst.*

Beispiele. 1. Für $z = 4$ sind die zu z *theilerfremden* Zahlen 1 und 3, und $Z = 1.3 = 3$ ist $= \mathfrak{G}z - 1$; gemäfs (1.).

2. Für $p = 3$, $e = 2$, also $z = p^e = 9$, sind die zu z theilerfremden Zahlen 1, 2, 4, 5, 7, 8, und es ist $Z = 1.2.4.5.7.8 = 2240 = 249.9 - 1 = \mathfrak{G}z - 1$; gemäfs (1.).

3. Für $p = 3$, $e = 2$, also $z = 2p^e = 18$, sind die zu z theilerfremden Zahlen 1, 5, 7, 11, 13, 17, und ihr Product Z ist $= 85085 = 4727.18 - 1 = \mathfrak{G}z - 1$; gemäfs (1.).

4. Zu $z = 15$ sind die Zahlen 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 theilerfremd, und ihr Product Z ist $= 896896 = 59793.15 + 1 = \mathfrak{G}z + 1$; gemäfs (2.).

Erster Beweis. *A.* Nach (§. 92. 4. und 5.) ist $Z = \mathfrak{G}z - 1$, wenn die Anzahl n der Werthenpaare von x, die der Gleichung

$$3. \quad x^2 = \mathfrak{G}z + 1$$

genugthun, *ungerade*, und $Z = \mathfrak{G}z + 1$, wenn n *gerade* ist.

B. Es sei nun zuerst $z = 4$ (1.), so ist, dieses z mit dem (§. 94. 1.) verglichen,

$$4. \quad m = 2, \quad \mu = 0,$$

also für diesen Fall gemäfs (§. 96. 5.) $n = 2^0 = 1$, mithin n *ungerade*, und folglich $Z = \mathfrak{G}z - 1$; gemäfs (1.).



C. Es sei zweitens $z = p^e$ (1.), so ist, dieses z mit dem (§. 96. 1.) verglichen,

$$5.\quad m = 0,\quad \mu = 1,$$

also für diesen Fall gemäfs (§. 96. 3.) $n = 2^0 = 1$, mithin n wiederum *ungerade* und folglich $Z = \mathfrak{S}z - 1$; gemäfs (1.).

D. Es sei drittens $z = 2p^e$ (1.), so ist, dieses z mit dem (§. 96. 1.) verglichen,

$$6.\quad m = 1,\quad \mu = 1,$$

also für diesen Fall gemäfs (§. 96. 4.) $n = 2^0 = 1$, mithin n abermals *ungerade* und folglich $Z = \mathfrak{S}z - 1$; gemäfs (1.).

E. Alle andern z als $z = 4$, p^e und $2p^e$ (1.) sind in folgenden Fällen begriffen:

7. a. $m = 0$, $\mu = 2, 3, 4, \ldots$, und für diese Fälle ist nach (§. 96. 3.)

$$7.\quad n = 2^{1,2,3,\ldots},\ \text{also } n \text{ immer } gerade;$$

b. $m = 1$, $\mu = 2, 3, 4, \ldots$, und für diese Fälle ist nach (§. 96. 4.)

$$8.\quad n = 2^{1,2,3,\ldots},\ \text{also } n \text{ immer } gerade;$$

c. $m = 2$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, und für diese Fälle ist nach (§. 96. 5.)

$$9.\quad n = 2^{1,2,3,\ldots},\ \text{also } n \text{ immer } gerade;$$

d. $m > 2$, $\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots$, und für diese Fälle ist nach (§. 96. 6.)

$$10.\quad n = 2^{1,2,3,\ldots},\ \text{also } n \text{ immer } gerade.$$

Also ist für *alle* andern z als $z = 4$, p^e und $2p^e$, $Z = \mathfrak{S}z + 1$; gemäfs (2.).

Zweiter Beweis. *F.* Man setze wie in (§. 95.) den *allgemeinen* Ausdruck von z,

$$8.\quad z = 2^m . p_1^{e_1} . p_2^{e_2} . p_3^{e_3} \ldots . p_\mu^{e_\mu}.$$

Für jeden *Nichtquadratrest* w zu z ist nach (§. 92. 7.)

$$9.\quad Z = \mathfrak{S}z + w^{\frac{1}{2}\varphi z}.$$

Es kommt also nur darauf an, was $w^{\frac{1}{2}\varphi z}$ für die verschiedenen Zusammensetzungsarten von z ist.

G. Erstlich. Es sei in (8.)

$$10.\quad m = 1,\quad \mu = 0,\ \text{also blofs } z = 2.$$

Hier giebt es nur die einzige zu z theilerfremde Zahl $z_\varphi = 1$; also ist auch $Z = 1$ und folglich

$$11.\quad Z = \mathfrak{S}z + 1\ \text{ für } z = 2.$$

H. Zweitens. Es sei in (8.)

$$12.\quad m = 2,\quad \mu = 0,\ \text{also } z = 2^2 = 4.$$

Hier giebt es nur die zwei zu z theilerfremden Zahlen $z_\varphi = 1$ und $3 > 0$ und $< z$; also ist $Z = 1.3 = 3 = 4 - 1$ und folglich

$$13.\quad Z = \mathfrak{S}z - 1\ \text{ für } z = 2^2 = 4.$$

I. Drittens. Es sei in (8.)

$$14. \quad m > 2, \quad \mu = 0, \quad \text{also} \quad z = 2^m.$$

Nimmt man aus den zu z theilerfremden Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ irgend einen *Nichtquadratrest* w, deren es nach (§. 98.) immer giebt, so ist nach (§. 98. 3.)

$$15. \quad w^{\frac{1}{4}\varphi z} = \mathfrak{S}z + 1,$$

also ist für $z = 2^m$ und $m > 2$ gemäfs (9.)

$$16. \quad Z = \mathfrak{S}z + \mathfrak{S}z + 1 \text{ für jedes } m > 2 \text{ in } z = 2^m.$$

K. Viertens. Es sei in (8.)

$$17. \quad m = 0, \quad \mu = 1, \quad \text{also} \quad z = p^e.$$

Nimmt man hier wieder aus den zu z theilerfremden Zahlen $z_\varphi > 0$ und $< z$ irgend ein *Nichtquadratrest*, deren es nach (§. 97.) immer $\frac{1}{2}\varphi z$ giebt, so ist nach (§. 97. 5.)

$$18. \quad w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{S}z - 1:$$

also ist für $z = p^e$ gemäfs (9.)

19. $Z = \mathfrak{S}z + \mathfrak{S}z - 1 = \mathfrak{S}z - 1$ für jede Stammzahl $p > 2$ und jedes $e > 0$ in p^e.

L. Fünftens. Es sei in (8.)

$$20. \quad m = 1, \quad \mu = 1, \quad \text{also} \quad z = 2p^e.$$

Es giebt nach (§. 97. II.) immer zu $2p^e$ theilerfremde Zahlen w, die zu $2p^e$ und p^e *zugleich Nichtquadratreste* sind. Sie werden durch die beiden Gleichungen (7. und 8. §. 97.) ausgedrückt, und da das dortige P in (§. 97. 8.), als das Product der Stammtheiler, welche z noch aufser p hat, hier $= 2$ ist, so sind die w in (§. 97. 8.) immer *ungerade;* wie es auch nothwendig ist, da *alle* zu $2p^e$ *theilerfremden Zahlen*, also auch die Nichtquadratreste, den Theiler 2 von $2p^e$ nicht haben können und folglich nothwendig *alle* ungerade sein müssen. Unter den *ungeraden* Nichtquadratresten w zu $2p^e$ giebt es also gemäfs (§. 97. II.) solche, die *zugleich* Nichtquadratreste zu p^e sind. Für diese ist dann nach (97. 5.)

$$21. \quad w^{\frac{1}{2}\varphi p^e} = \mathfrak{S}p^e - 1.$$

Nun ist aber nach (§. 81. 7.)

$$22. \quad \tfrac{1}{2}\varphi p^e = \tfrac{1}{2}p^{e-1}(p-1) \text{ und auch } \tfrac{1}{2}\varphi(2p^e) = \tfrac{1}{2}p^{e-1}(p-1);$$

also ist auch für das gegenwärtige $z = 2p^e$, $\frac{1}{2}\varphi z = \frac{1}{2}p^{e-1}p - 1 = \frac{1}{2}\varphi p^e$, mithin in (21.)

$$23. \quad w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{S}p^e - 1.$$

Es ist aber w eine *ungerade* Zahl, also ist vermöge (23.), was auch $\frac{1}{2}\varphi z$ sein mag, $\mathfrak{S}p^e$ nothwendig *gerade*, und folglich, da p^e immer *ungerade* ist, was auch e sein mag, $\mathfrak{S}$ nothwendig *gerade*. Es mufs also in (23.) $\mathfrak{S}$ mit 2 *aufgehen*, und folglich kann statt (23.) auch geschrieben werden:

$$24. \quad w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{S}.2p^e - 1 \quad \text{oder} \quad 25. \quad w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{S}z - 1.$$

Demnach ist gemäfs (9.)

26. $Z = \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z - 1 = \mathfrak{G}z - 1$ auch für $z = 2p^e$, für jede Stammzahl $p > 2$ und jedes $e > 0$.

M. Nachdem bis hieher von den verschiedenen Zusammensetzungsarten von z (8.) die Fälle

27. $\begin{cases} \mu = 0, & m = 1\ (G.), \quad m = 2\ (H.), \quad m > 2\ (I.) \text{ und} \\ \mu = 1, & m = 0\ (K.), \quad m = 1\ (L.) \end{cases}$

durchgegangen sind, bleiben noch die beiden Fälle

28. $\mu = 1, \quad m > 1$ und

29. $\mu > 1, \quad m$ beliebig

übrig. Sind diese noch untersucht, so sind *alle möglichen* Fälle berührt. Die beiden Fälle (28. und 29.) lassen sich aber wie folgt *zusammenfassen.*

N. *Sechstens.* *a.* Nach (§. 97. II.) giebt es immer, was auch z (8.) sein mag, zu z theilerfremde Zahlen w (dort W), welche zu z (dort Z) und zu den Stammfactoren p_1 von z oder auch zu $p_1^{e_1}$ *zugleich Nichtquadratreste* sind. Sie werden aus den Gleichungen (7. und 8. §. 97. II.) gefunden.

b. Für eine solche Zahl w ist, da sie Nichtquadratrest zu $p_1^{e_1}$ ist, nach (§. 97. 5.),

30. $$w^{\frac{1}{2}\varphi p_1^{e_1}} = \mathfrak{G}p_1^{e_1} - 1.$$

Da die Zahl w zu z *theilerfremd* ist, so ist sie es auch zu den andern Factoren $p_2^{e_2}, p_3^{e_3}, \ldots p_\mu^{e_\mu}$ und 2^m von z (8.), und folglich ist für sie zugleich zufolge (§. 97. 6.), w mag Nichtquadratrest oder Quadratrest zu $p_2^{e_2}, p_3^{e_3}, \ldots 2^m$ sein,

31. $$\begin{cases} w^{\frac{1}{2}\varphi p_2^{e_2}} = \mathfrak{G}p_2^{e_2} \pm 1, \\ w^{\frac{1}{2}\varphi p_3^{e_3}} = \mathfrak{G}p_3^{e_3} \pm 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ w^{\frac{1}{2}\varphi 2^m} = \mathfrak{G}2^m \pm 1. \end{cases}$$

c. Nun ist für z (8.) gemäfs (§. 81. 7.)

32. $$\tfrac{1}{2}\varphi z = \tfrac{1}{2}.2^{m-1} p_1^{e_1-1}.p_2^{e_2-1}.p_3^{e_3-1}\ldots p_\mu^{e_\mu-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_\mu-1)$$

und

33. $$\begin{cases} \tfrac{1}{2}\varphi p_1^{e_1} = \tfrac{1}{2}p_1^{e_1-1}(p_1-1), \\ \tfrac{1}{2}\varphi p_2^{e_2} = \tfrac{1}{2}p_2^{e_2-1}(p_2-1), \\ \tfrac{1}{2}\varphi p_3^{e_3} = \tfrac{1}{2}p_3^{e_3-1}(p_3-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tfrac{1}{2}\varphi 2^m = \tfrac{1}{2}.2^{m-1} = 2^{m-2}. \end{cases}$$

Aus (32. und 33.) folgt

$$34.\begin{cases}\frac{1}{2}\varphi z = 2^{m-1}p_2^{e_2-1}.p_3^{e_3-1}.p_4^{e_4-1}\dots p_\mu^{e_\mu-1}(p_2-1)(p_3-1)(p_4-1)\dots(p_\mu-1)\times\frac{1}{2}\varphi p_1^{e_1},\\ \frac{1}{2}\varphi z = 2^{m-1}p_1^{e_1-1}.p_3^{e_3-1}.p_4^{e_4-1}\dots p_\mu^{e_\mu-1}(p_1-1)(p_3-1)(p_4-1)\dots(p_\mu-1)\times\frac{1}{2}\varphi p_2^{e_2},\\ \frac{1}{2}\varphi z = 2^{m-1}p_1^{e_1-1}.p_2^{e_2-1}.p_4^{e_4-1}\dots p_\mu^{e_\mu-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_4-1)\dots(p_\mu-1)\times\frac{1}{2}\varphi p_3^{e_3},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{2}\varphi z = \quad p_1^{e_1-1}.p_2^{e_2-1}.p_3^{e_3-1}\dots p_\mu^{e_\mu-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\dots(p_\mu-1)\times\frac{1}{2}\varphi 2^m.\end{cases}$$

d. Will man also aus (30. und 31.) wissen, was $w^{\frac{1}{2}\varphi z}$ sei, *worauf es in* (9.) *ankommt,* so mufs man die Gleichungen (30. und 31.), also auch die Gröfsen $\mathfrak{G}p_1^{e_1}-1$, $\mathfrak{G}p_2^{e_2}\pm 1$, $\mathfrak{G}p_3^{e_3}\pm 1$, ... $\mathfrak{G}2^m\pm 1$ rechterhand in denselben, der Reihe nach noch zu Potenzen erheben, deren Exponenten in (34. rechts) diejenigen Producte sind, welche $\frac{1}{2}\varphi p_1^{e_1}$, $\frac{1}{2}\varphi p_2^{e_2}$, $\frac{1}{2}\varphi p_3^{e_3}$, ... $\frac{1}{2}\varphi 2^m$ multipliciren.

e. Diese Producte sind aber in den beiden noch zu untersuchenden Fällen (28. und 29.) immer *gerade* Zahlen. Denn in dem ersten Fall (28.) $\mu = 1$, $m > 1$ sind jene Producte der Reihe nach 2^{m-1}, 2^{m-1}, 2^{m-1}, ... $p^{e_1-1}(p_1-1)$ und 2^{m-1} ist *gerade,* wenn $m > 1$ (28.) ist; desgleichen ist $p^{e_1-1}(p_1-1)$ *gerade,* weil p_1 *ungerade,* also p_1-1 *gerade* ist. Im zweiten Fall (29.), $\mu > 1$ und m beliebig, enthalten alle die Producte *wenigstens einen* der Factoren p_1-1, p_2-1, p_3-1, ... $p_\mu-1$, und alle diese Factoren sind *gerade,* weil alle die p nach der Voraussetzung *ungerade* sind.

Es sind demnach die Gröfsen rechterhand in (30. und 31.), um $w^{\frac{1}{2}\varphi z}$ zu finden, sämmtlich zu Potenzen zu erheben, deren Exponenten *gerade* sind, und daher giebt (30. und 31.)

$$35.\begin{cases}w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}p_1^{e_1}+1,\\ w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}p_2^{e_2}+1,\\ w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}p_3^{e_3}+1,\\ \dots\dots\dots\\ w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}p_\mu^{e_\mu}+1,\\ w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}2^m+1.\end{cases}$$

f. Aus (35.) folgt nun, dafs $w^{\frac{1}{2}\varphi z}-1$ sowohl mit $p_1^{e_1}$, als mit $p_2^{e_2}$, $p_3^{e_3}$, ... $p_\mu^{e_\mu}$ und 2^m, also mit *allen* Factoren von z (8.) *aufgehen* mufs. Und da alle diese Factoren von z unter sich *theilerfremd* sind, so mufs nach (§. 26.) $w^{\frac{1}{2}\varphi z}-1$ auch mit z *selbst* aufgehen, und folglich $w^{\frac{1}{2}\varphi z}-1 = \mathfrak{G}z$ oder

$$36. \quad w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z+1 \text{ sein.}$$

Dies in (9.) gesetzt giebt

37. $Z = \mathfrak{G}z + \mathfrak{G}z + 1 = \mathfrak{G}z + 1$ für $\mu = 1$ und $m > 1$, und für $\mu > 1$ und m beliebig (28. und 29.).

O. Zusammen hat sich also in (11. 13. 16. 19. 26. und 37.) gefunden, dafs

38. $Z = \mathfrak{G}z - 1$ ist für $z = 2^2 = 4$ (13.), $z = p^e$ (19.) und $z = 2p^e$ (26.) und in *allen* übrigen Fällen

39. $Z = \mathfrak{G}z + 1$ (11. 16. u. 37.); wie es der Lehrsatz in (1. u. 2.) behauptet.

P. Anmerkung. Der erste Beweis beruht insbesondere auf den Sätzen (§. 92. I., 95. und 96.), der zweite Beweis auf (§. 92. II., 97. und 98.).

§. 100.

Lehrsatz.

Es sei z eine beliebige ganze Zahl, die also immer durch

1. $z = 2^m . p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \dots p_\mu^{e_\mu}$

ausgedrückt werden kann, wo die sämmtlichen p *Stammzahlen* > 2 *und die* e *beliebige positive ganze Zahlen sind. Die zu* z *theilerfremden Zahlen sollen wie immer durch* z_φ *bezeichnet werden, die Anzahl derjenigen von ihnen, welche* > 0 *und* $< z$ *sind, durch* φz, *die Anzahl der Werthenpaare von* $x < z$, *welche der Gleichung*

2. $x^2 = \mathfrak{G}z + 1$

genugthun, wie oben durch n, *und die Anzahl der verschiedenen zu* z *möglichen Quadratreste durch* ν. *Alsdann ist*

I. *Für jedes* z_φ,

3. $z_\varphi^{\frac{\varphi z}{n}} = \mathfrak{G}z + 1$, *oder auch* 4. $z_\varphi^{2\nu} = \mathfrak{G}z + 1$;

wo nach (§. 81. 7.)

5. $\varphi z = 2^{m-1} . p_1^{e_1 - 1} . p_2^{e_2 - 1} . p_3^{e_3 - 1} \dots p_\mu^{e_\mu - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_\mu - 1)$,

nach (§. 96.)

6. $$\begin{cases} n = 2^{\mu-1} & \textit{für} \quad m = 0 \quad \textit{und} \quad m = 1, \\ n = 2^\mu & \textit{für} \quad m = 2, \\ n = 2^{\mu+1} & \textit{für} \quad m > 2 \end{cases}$$

und nach (§. 94. 4.) 7. $2\nu = \frac{\varphi z}{n}$ *ist.*

Zwar kann schon eine noch niedrigere als die 2ν*te Potenz von* z_φ *zu* z *den Rest* 1 *lassen, aber jedenfalls giebt diese Potenz den Rest* 1 *bis* z.

Dieses ist eine Vereinfachung oder, wenn man will, nähere Bestimmung des verallgemeinerten Fermatschen Satzes (§. 87.); *denn dieser sagt blofs aus, dafs*

8. $z_\varphi^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$,

nicht, dafs schon nach (3.) $z_\varphi^{\frac{\varphi z}{n}} = \mathfrak{G}z + 1$ *ist.*

II. ***Eine andere solche Vereinfachung oder nähere Bestimmung des verallgemeinerten Fermatschen Satzes besteht darin, dafs für jedes*** $z > 2$, ***für welches also*** $\frac{1}{2}\varphi z$ ***kein Bruch ist und für jede zu einem solchen z theilerfremde Zahl*** z_φ,

9. $$z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$$

ist, mit alleiniger Ausnahme

10. ***der Nichtquadratreste zu*** $z = 2^2$, p^e ***und*** $2p^e$; ***welche*** $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1$ ***geben.***

III. ***Ferner ist zu bemerken, dafs für*** $z = 2^2$, p^e ***und*** $2p^e$ ***nur ein einziges Paar der*** $z_\varphi > 0$ ***und*** $< z$ ***quadrirt zu z den Rest 1 läfst, so dafs*** $n = 1$ ***ist. Hingegen zu allen andern*** $z > 2$ ***giebt es mehrere und wenigstens 2 solcher Werthenpaare und n ist also*** > 1.

Beispiel zu I. In dem ersten Beispiel zu (§. 94.) ist $z = 180$, $n = 4$, $\nu = 6$ und $\varphi z = 48$. Eine der zu z theilerfremden Zahlen z_φ ist 77: also soll nach (3.) $77^{\frac{48}{4}} = 77^{12} = \mathfrak{G}.180 + 1$ sein. Es ist, wie aus (§. 94. 23.) zu sehen, $77^2 = \mathfrak{G}z + 169$; 169^2 oder $77^4 = \mathfrak{G}z + 121$; 121^2 oder $77^8 = \mathfrak{G}z + 61$, folglich $77^{12} = 77^8.77^4 = (\mathfrak{G}z + 61)(\mathfrak{G}z + 121) = \mathfrak{G}z + 61.121 = \mathfrak{G}z + 7381 = \mathfrak{G}z + 1$; gemäfs (3.). Jedoch kann auch schon eine *niedrigere* als die $2\nu = 12$te Potenz eines z_φ, $\mathfrak{G}z + 1$ geben. Z. B. $z_\varphi = 53$ giebt nach (§. 94. 23.) $53^2 = \mathfrak{G}z + 109$, und schon $53^4 = \mathfrak{G}z + 109^2$ giebt $\mathfrak{G}z + 1$. Für $z_\varphi = 71$ (§. 94. 23.) ist sogar schon $z_\varphi^2 = \mathfrak{G}z + 1$.

In dem vierten Beispiel zu (§. 94.) ist $z = 120$, $n = 8$, $\nu = 2$ und $\varphi z = 32$. Eine der zu z theilerfremden Zahlen z_φ ist 17; also soll nach (3. und 4.) $17^{\frac{32}{8}} = 17^4 = \mathfrak{G}z + 1 = \mathfrak{G}120 + 1$ sein. Es ist $17^2 = 289 = \mathfrak{G}z + 49$ und $17^4 = \mathfrak{G}z + 49^2 = \mathfrak{G}z + 2401 = \mathfrak{G}z + 1$; gemäfs (2.). Aber $z_\varphi = 11$ giebt schon $z_\varphi^2 = 121 = \mathfrak{G}z + 1$.

Zu II. und III. Die z_φ mit ihren Quadratresten r und die φz sind:

11. Für $z = 4$: $z_\varphi = 1, 3$; $r = 1, 1$; $\varphi z = 2$, $\frac{1}{2}\varphi z = 1$;

12. Für $z = 5^2 = 25 = p^e$ $$\begin{cases} z_\varphi = 1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9\ 11\ 12\ 13\ 14\ 16\ 17\ 18\ 19\ 21\ 22\ 23\ 24, \\ r\ = 1\ 4\ 9\ 16\ 11\ 24\ 14\ 6\ 21\ 19\ 19\ 21\ 6\ 14\ 24\ 11\ 16\ 9\ 4\ 1, \\ \varphi z = 4.5 = 20, \quad \frac{1}{2}\varphi z = 10; \end{cases}$$

13. Für $z = 2.3^3 = 18 = 2p^e$ $$\begin{cases} z_\varphi = 1\ 5\ 7\ 11\ 13\ 17, \\ r\ = 1\ 7\ 13\ 13\ 7\ 1, \\ \varphi z = 3.2 = 6, \quad \frac{1}{2}\varphi z = 3; \end{cases}$$

14. Für $z = 2^2.7 = 28 = 2^2 p$ $$\begin{cases} z_\varphi = 1\ 3\ 5\ 9\ 11\ 13\ 15\ 17\ 19\ 23\ 25\ 27, \\ r\ = 1\ 9\ 25\ 25\ 9\ 1\ 1\ 9\ 25\ 25\ 9\ 1, \\ \varphi z = 2.6 = 12, \quad \frac{1}{2}\varphi z = 6; \end{cases}$$

15. Für $z = 2.3.5 = 30 = 2p_1 p_2$ $$\begin{cases} z_\varphi = 1\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 29, \\ r\ = 1\ 19\ 1\ 19\ 19\ 1\ 19\ 1, \\ \varphi z = 2.4 = 8, \quad \frac{1}{2}\varphi z = 4. \end{cases}$$

Der *Nichtquadratrest* 3 zu $z=4$ (11.) giebt $3^{\frac{1}{2}\varphi z}=3^1=3=\mathfrak{G}z-1$; der *Quadratrest* 1 dagegen giebt $1^{\frac{1}{2}\varphi z}=\mathfrak{G}z+1$; gemäſs (9. und 10.). Ferner ist die Anzahl n der Paare von x, welche $x^2=\mathfrak{G}z+1$ geben, $=1$; gemäſs (III.).

Der *Nichtquadratrest* 7 zu $z=25$ (12.) giebt $7^{\frac{1}{2}\varphi z}=7^{10}=49^5=(\mathfrak{G}z-1)^5=\mathfrak{G}z-1$; der *Quadratrest* 11 dagegen giebt $11^{10}=121^5=(\mathfrak{G}z-4)^5=\mathfrak{G}z-1024=\mathfrak{G}z-(-1)=\mathfrak{G}z+1$; gemäſs (9. und 10.). Die Anzahl n der Paare von x, welche $x^2=\mathfrak{G}z+1$ geben, ist $=1$; gemäſs (III.).

Der *Nichtquadratrest* 5 zu $z=18$ (13.) giebt $5^{\frac{1}{2}\varphi z}=5^3=125=\mathfrak{G}z-1$; der *Quadratrest* 7 dagegen giebt $7^3=343=\mathfrak{G}z+1$; gemäſs (9. und 10.). Die Anzahl n der Paare von x, welche $x^2=\mathfrak{G}z+1$ geben, ist $=1$; gemäſs (III.).

Der *Nichtquadratrest* 3 zu $z=28$ (14.) giebt $3^{\frac{1}{2}\varphi z}=3^6=27^2=(\mathfrak{G}z-1)^2=\mathfrak{G}z+1$ und der *Quadratrest* 9 giebt ebenfalls $9^6=3^{12}=\mathfrak{G}z+1$; gemäſs (9. u. 10.). Die Anzahl n der Paare von x, welche $x^2=\mathfrak{G}z+1$ geben, ist hier $=2$; gemäſs (III.).

Der *Nichtquadratrest* 7 zu $z=30$ (15.) giebt $7^{\frac{1}{2}\varphi z}=7^4=49^2=(\mathfrak{G}z+19)^2=\mathfrak{G}z+361=\mathfrak{G}z+1$ und der *Quadratrest* 19 giebt ebenfalls $19^4=361^2=(\mathfrak{G}z+1)^2=\mathfrak{G}z+1$; gemäſs (9. und 10.). Die Anzahl n der Paare von x, welche $x^2=\mathfrak{G}z+1$ geben, ist hier wieder $=2$; gemäſs (III.).

Beweis von I. *A.* Nach (§. 94. 7.) ist für jeden beliebigen *Quadratrest* r zu z, also für jedes r, welches der Gleichung

$$16.\quad z_\varphi^2 = \mathfrak{G}z+r \text{ genugthut,}$$

$$17.\quad r^{\frac{\varphi z}{2n}} = \mathfrak{G}z+1,$$

oder auch, da nach (§. 94. 4.)

$$18.\quad \varphi z = 2n\nu \text{ ist,}$$

$$19.\quad r^\nu = \mathfrak{G}z+1.$$

B. Nimmt man nun von (16.) die $\frac{\varphi z}{2n}$te oder die νte Potenz, so ergiebt sich

$$20.\quad z_\varphi^{\frac{\varphi z}{n}} = \mathfrak{G}z+r^{\frac{\varphi z}{2n}} \quad\text{oder}\quad 21.\quad z_\varphi^{2\nu} = \mathfrak{G}z+r^\nu;$$

und dieses gilt für *jedes* z_φ. Also ist, wenn man (17. u. 19.) in (18. u. 21.) setzt,

$$22.\quad z_\varphi^{\frac{\varphi z}{n}} = \mathfrak{G}z+1 \quad\text{oder}\quad 23.\quad z_\varphi^{2\nu} = \mathfrak{G}z+1;$$

gemäſs (3. und 4.) im Lehrsatz.

Beweis von II. *C.* Die zu z theilerfremden Zahlen z_φ sind entweder *Quadratreste* oder *Nichtquadratreste* zu z.

a. Es bezeichne *Erstlich* r die *Quadratreste* zu den z_φ, so giebt

$$24.\quad z_\varphi^2 = \mathfrak{G}z+r$$

alle Quadratreste r zu z, wenn man z_φ alle seine Werthe durchlaufen läſst. Nimmt man nun von (24.) die $\frac{1}{2}\varphi z$te Potenz, so ergiebt sich

$$25.\quad z_\varphi^{2\cdot\frac{1}{2}\varphi z} = z^{\varphi z} = \mathfrak{G}z+r^{\frac{1}{2}\varphi z}.$$

Nach dem verallgemeinenten *Fermatschen* Lehrsatze (§. 87.) ist aber für *jedes* z_φ:

26. $z_\varphi^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$, also ist in (25.)

27. $\mathfrak{G}z + r^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$, und daraus folgt

28. $r^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$:

also ist, erstlich, fur jedes $z_\varphi = r$, welches ein *Quadratrest* zu z ist, *ohne alle Ausnahme*,

29. $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$.

b. Es bezeichne *Zweitens* w die *Nichtquadratreste* zu z_φ, so ist nach (§. 92. 7.)

30. $Z = z_1 z_2 z_3 \ldots . z_{\varphi z} = \mathfrak{G}z + w^{\frac{1}{2}\varphi z}$.

Nun ist nach (§. 99. 1. und 2.)

31. $Z = \mathfrak{G}z - 1$ für $z = 2^2$, p^e und $2p^e$ und

32. $Z = \mathfrak{G}z + 1$ für *jedes* andere z; also ist in (30.)

33. $\mathfrak{G}z + w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1$ für $z = 2^2$, p^e und $2p^e$ und

34. $\mathfrak{G}z + w^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$ für *jedes* andere z.

Daraus folgt für die $z_\varphi = w$, welche *Nichtquadratreste* zu z sind,

35. $z^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1$ für $z = 2^2$, p^e und $2p^e$ und

36. $z^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$ für *jedes* andere z.

c. Es folgt also zusammengenommen aus (29. 35. und 36.), dafs für alle zu z theilerfremden Zahlen z_φ,

37. $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$

ist, mit alleiniger *Ausnahme* der *Nichtquadratreste* zu $z = 2^2$, p^e und $2p^e$, welche nach (35.) $z_\varphi^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1$ geben; gemäfs II.

Beweis von III. *D. a.* Da nach (3.) für *jedes* z_φ *ohne alle Ausnahme*

38. $z_\varphi^{\frac{\varphi z}{n}} = \mathfrak{G}z + 1$,

nach (35.) aber für die *Nichtquadratreste* zu $z = 2^2$, p^e und p^{2e} *nicht* $z^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$, sondern $z^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z - 1$ und also erst $z^{\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$ ist, so kann für diese *Nichtquadratreste* zu $z = 2^2$, p^e und $2p^e$ in (38.) *n nicht gröfser* als 1 sein.

b. Für *alle* andern z_φ zu jedem beliebigen z ist dagegen nach (29. u. 36.) $z^{\frac{1}{2}\varphi z} = \mathfrak{G}z + 1$: also ist für *alle* diese z_φ in (38.) *n wenigstens* $= 2$; gemäfs (III.).

Anm. *E.* Diejenigen z_φ, von welchen *keine niedrigere* als die $2\nu = \frac{\varphi z}{n}$te Potenz zu z den Rest 1 läfst, sind für *beliebige* Zahlen z nichts anders als das was für *Stammzahlen* in (§. 57.) *Hauptstammwurzeln* genannt worden ist. Die andern z_φ sind Stammwurzeln für *niedrigere* Exponenten λ als 2ν, wenn jedesmal *keine niedrigere* als die λte Potenz von z_φ zu z den Rest 1 läfst. Hieraus eröffnet sich eine Theorie der Stammwurzeln für *beliebige* Zahlen z, als eine Erweiterung der obigen Theorie (§. 57. etc.) für *Stammzahlen.* Sie bleibt der Folge vorbehalten.

(Die Fortsetzung folgt.)

8.

Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante.

(Par Mr. G. *Eisenstein* à Berlin.)

Etant proposé deux équations algébriques quelconques, on pourra en éliminer la quantité inconnue x de deux manières différentes, soit en mettant dans la seconde à la place de x sa valeur tirée de la première, soit en mettant dans la première à la place de x sa valeur tirée de la seconde, sans changer essentiellement le résultat de l'élimination. Nous ferons voir dans ce qui suit que les lois de réciprocité pour les résidus quadratiques, cubiques et biquadratiques, (théorèmes si celèbres tant par la difficulté de leur démonstration, que par l'assiduité avec laquelle les plus grands géomètres s'en sont occupés) ne sont autre chose que l'interprétation arithmétique du simple fait algébrique dont nous venons de parler. Ainsi par exemple, en posant $\sin v = x$, si l'on désigne par p et q deux nombres premiers impairs (réel) et par $x = \pm\alpha$, $x = \pm\beta$ resp. les ensembles des racines des deux équations $\frac{\sin pv}{\sin v} = 0$, $\frac{\sin qv}{\sin v} = 0$, nous verrons que les résidus de $p^{\frac{1}{2}(q-1)}$ et $q^{\frac{1}{2}(p-1)}$ suivant les modules q, p dépendent resp. des deux expressions $\Pi(\beta^2-\alpha^2)$ et $\Pi(\alpha^2-\beta^2)$, où la multiplication se rapporte à toutes les valeurs de α et de β; il existe des résultats analogues pour les résidus cubiques et biquadratiques. La methode qui nous conduira à ces résultats est très simple, elle traite d'une manière parfaitement symmétrique les deux nombres à comparer, et conserve dans les démonstrations l'analogie qui existe entre les théorèmes qui se rapportent aux résidus des différentes puissances. Au reste on peut considérer ce que nous allons exposer comme les premiers éléments d'une nouvelle doctrine où l'on renvoie les questions arithmétiques à l'algèbre et à l'analyse, de manière qu'alors toutes les difficultés se réduisent à celles qu'offre le calcul. J'entre en matière en commençant par les résidus quadratiques.

§. 1.
Résidus quadratiques.

Etant donné un nombre premier impair (réel et positif) p, on peut toujours concevoir un système de résidus pour le module p *) distribué en deux groupes tels, que les termes qui composent le deuxième groupe sont opposés à ceux du premier; nous représenterons les termes généraux de ces deux groupes par r et par $-r$; on pourra p. e. prendre pour r les nombres $1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ et pour $-r$ les nombres $-1, -2, -3, \ldots -\frac{1}{2}(p-1)$. Cela posé, si l'on multiplie tous les r par un entier quelconque q non divisible par p, les résidus des produits qr se trouveront en partie parmi les r et en parti parmi les $-r$. En posant, selon ces deux cas que nous venons de distinguer,

$$\text{ou} \quad qr \equiv r' \quad \text{ou} \quad qr \equiv -r' \quad (\text{mod. } p),$$

de sorte que r' se trouve toujours parmi les r, on aura respectivement:

$$\sin\frac{qr\omega}{p} = \sin\frac{r'\omega}{p}, \quad \text{ou} \quad \sin\frac{qr\omega}{p} = -\sin\frac{r'\omega}{p},$$

où l'on a fait pour abréger $\omega = 2\pi$. On aura donc dans tous les cas

$$qr \equiv r'.\frac{\sin\frac{qr\omega}{p}}{\sin\frac{r'\omega}{p}} \quad (\text{mod. } p).$$

Substituant dans cette expression de r toutes ses $\frac{1}{2}(p-1)$ valeurs et multipliant entre elles toutes les expressions que cela donne, on obtiendra, en observant encore que tous les r' coïncident avec tous les r:

$$q^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi r \equiv \Pi r'.\frac{\Pi\sin\frac{qr\omega}{p}}{\Pi\sin\frac{r'\omega}{p}} \equiv \Pi r.\Pi\left\{\frac{\sin\frac{qr\omega}{p}}{\sin\frac{r\omega}{p}}\right\} \quad (\text{mod. } p),$$

donc, si l'on divise les deux membres de cette congruence par Πr, ce qui est permis, Πr n'étant pas divisible par le module p, on aura

$$(1.) \qquad q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \Pi\left\{\frac{\sin\frac{qr\omega}{p}}{\sin\frac{r\omega}{p}}\right\} \quad (\text{mod. } p).$$

Cette formule exprime le caractere quadratique de q par rapport à p. Supposant maintenant que q soit aussi un nombre premier impair, le caractère quadratique de p par rapport à q sera exprimé d'une manière analogue par la formule

*) à l'exclusion de celui des termes d'un tel système qui est un multiple du module; ce qu'on suppose toujours tacitement.

$$(2.)\qquad p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \Pi\left\{\frac{\sin\frac{p\varrho\omega}{q}}{\sin\frac{\varrho\omega}{q}}\right\} \pmod{q},$$

(la multiplication se rapportant à ϱ) qui est l'expression générale d'une suite de nombres qui joints aux $-\varrho$ composent un système de résidus pour le module q.

Il ne s'agit donc que de comparer entre eux les deux caractères quadratiques à droite dans les formules (1.) et (2.). Si l'on fait $\sin v = x$, les quantités

$$\frac{\sin pv}{\sin v} = P,\qquad \frac{\sin qv}{\sin v} = Q$$

seront des fonctions entières de x resp. des degrés $p-1$ et $q-1$; de plus, en posant $\sin\frac{r\omega}{p} = \alpha$, $\sin\frac{\varrho\omega}{q} = \beta$, les racines de l'équation $P = 0$ seront désignées par $\pm\alpha$ et celles de l'équation $Q = 0$ par $\pm\beta$. Cela étant, le deuxième membre de la formule (1.) sera équivalent au produit des valeurs que prend l'expression Q en y mettant pour x toutes les valeurs de α, et de même on obtiendra le deuxième membre de la formule (2.) en mettant dans P pour x toutes les valeurs de β, et faisant le produit des expressions qui en résultent. Or on a

$$P = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{2^{p-1}}\Pi(x^2-\alpha^2),\qquad Q = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{2^{q-1}}\Pi(x^2-\beta^2),$$

donc il viendra

$$(3.)\qquad q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv C\Pi(\alpha^2-\beta^2) \pmod{p},$$
$$(4.)\qquad p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv C\Pi(\beta^2-\alpha^2) \pmod{q},$$

où chaque valeur de α doit être combinée avec chaque valeur de β. C est une constante qui se trouve être $C = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}}{2^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)}}$. Maintenant le nombre des α est $=\frac{1}{2}(p-1)$, et le nombre des β est $=\frac{1}{2}(q-1)$, par conséquent le nombre des combinaisons α et β sera $=\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)$, d'où enfin on tire

$$\Pi(\alpha^2-\beta^2) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}\Pi(\beta^2-\alpha^2).$$

Cette dernière équation comparée avec (3.) et (4.) donne immédiatement la loi de reciprocité pour les résidus quadratiques. Si l'on veut éviter la constante C, il faut se servir des tangentes au lieu des sinus.

§. 2.

Résidus biquadratiques.

Les résidus biquadratiques peuvent être traités d'une manière absolument semblable. Les fonctions elliptiques, ou plutôt cette espèce particulière de

fonctions elliptiques qui se rapportent à la lemniscate, jouent ici le rôle des sinus; il faut donc dire d'abord quelques mots sur ces fonctions.

Nous désignerons par $x = \sin\operatorname{am} v$ la fonction de v qui satisfait à l'équation différentielle

$$dx = dv.\sqrt{(1-x^4)},$$

et qui en même temps s'évanouit avec v. Cette fonction est périodique de deux manières: en effet en posant $\omega = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, on a $\sin\operatorname{am}(v+k\omega) = \sin\operatorname{am} v$, k étant un entier complexe quelconque de la forme $a+bi$, où a et b sont des entiers réels. Une autre propriété de cette fonction est exprimée par

$$\sin\operatorname{am} iv = i\sin\operatorname{am} v,$$

propriété très-importante pour notre recherche et qui se déduit immédiatement de l'équation différentielle, en observant que celle-ci ne varie pas par le changement simultané de x en ix et de v en iv. On sait en outre par les recherches d'*Abel* et de Mr. *Jacobi* *) que $\sin\operatorname{am}(u+v)$ peut être exprimé algébriquement par $\sin\operatorname{am} u$ et $\sin\operatorname{am} v$, et surtout, qu'en prenant pour m un entier complexe *impair*, on peut réduire $\sin\operatorname{am} mv$ à une fonction *rationelle* de $\sin\operatorname{am} v$.

Soit $m = a+bi$ un nombre premier complexe impair; soit la norme de m, c'est à dire l'entier réel et positif a^2+b^2, $= p = N(m)$; on pourra toujours partager un système de résidus pour le module m, qui contient $p-1$ termes à l'exclusion de celui qui est divisible par le module, en quatre groupes, de manière que les termes du 2[ième], 3[ième] et 4[ième] groupe se déduisent de ceux du premier en multipliant ceux de celui-ci par i, par -1, et par $-i$ respectivement. Nous désignerons indéfiniment les termes de ces quatre groupes par r, ir, $-r$, $-ir$ resp. Multipliant alors tous les r par un entier complexe quelconque n non divisible par m, les résidus des produits nr se trouveront en partie parmi les r, en partie parmi les ir, $-r$, ou $-ir$. Soit selon ces quatre cas qu'il y a à distinguer,

$$nr \equiv r',\ ir',\ -r',\ -ir', \quad (\text{mod. } m),$$

où r' se trouve parmi les r. Cela posé, on aura selon les quatre cas

$$\frac{\sin\operatorname{am}\frac{nr\omega}{m}}{\sin\operatorname{am}\frac{r'\omega}{m}} = 1,\ i,\ -1,\ \text{ou } -i;$$

*) Voir p. e. le 2[d], 3[ième] et 4[ième] volume de ce journal. Il parait que Mr. *Gauss* était déjà à la fin du dernier siècle en possession des principaux théorèmes sur ces fonctions; en effet dans ses disq. arithm. il a promis un ouvrage étendu sur ces fonctions, mais il parait que les circonstances et d'autres travaux l'ont empêché d'exécuter son projet.

on aura donc *dans tous les cas*

$$nr \equiv r' \frac{\sin \operatorname{am} \frac{nr\omega}{m}}{\sin \operatorname{am} \frac{r'\omega}{m}} \pmod{m},$$

d'où, en observant que tous les r' coïncident avec tous les r, et que Πr n'est point divisible par m, on tire

$$(1.)\qquad n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \Pi \left\{ \frac{\sin \operatorname{am} \frac{nr\omega}{m}}{\sin \operatorname{am} \frac{r\omega}{m}} \right\} \pmod{m},$$

le signe Π s'étendant à tous les r. Supposant que n, ainsi que m, soit un nombre premier complexe impair et que le système de résidus pour le module n soit aussi distribué en quatre groupes tels que leurs termes généraux sont représentés par ϱ, $i\varrho$, $-\varrho$, $-i\varrho$, on aura d'une manière analogue

$$(2.)\qquad m^{\frac{1}{4}(q-1)} \equiv \Pi \left\{ \frac{\sin \operatorname{am} \frac{m\varrho\omega}{n}}{\sin \operatorname{am} \frac{\varrho\omega}{n}} \right\} \pmod{n},$$

q étant la norme de n et la multiplication se rapportant à toutes les valeurs de ϱ.

Nous avons déjà remarqué qu'on peut exprimer $\sin \operatorname{am} mv$ et par conséquent aussi $\frac{\sin \operatorname{am} mv}{\sin \operatorname{am} v}$ par une fonction rationelle de $\sin \operatorname{am} v$. Il existe entre le numérateur et le dénomiteur de cette fonction rationelle, qui sont du degré $p-1$, une relation remarquable qui dépend du résidu de m par rapport au module $2+2i$. Cette relation se réduit à sa plus simple forme si l'on suppose m *primaire*, c'est à dire $\equiv 1 \pmod{2+2i}$; dans ce cas la valeur de $\frac{\sin \operatorname{am} mv}{\sin \operatorname{am} v}$ prend la forme $\frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$, x étant $= \sin \operatorname{am} v$ et $\varphi(x)$ une fonction entière de x du degré $p-1$. En effet, supposant la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ réduite à sa plus simple expression et le coëfficient de la plus haute puissance dans le numérateur égal à l'unité, ce qui est permis, si l'on fait

$$\frac{\sin \operatorname{am} mv}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

l'expression $y = x\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ qui s'évanouit avec x, satisfera à l'équation différentielle $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, d'où l'on voit que tous les exposants des différentes puissances dans $\varphi(x)$ et dans $\psi(x)$ sont des multiples de *quatre;* posant

$y=\frac{1}{\eta}$, $x=\frac{1}{i^\mu \xi}$, où μ désigne un entier indéterminé, l'équation différentielle que nous venons d'écrire se changera par cette substitution en $\frac{i^\mu d\eta}{\sqrt{(\eta^4-1)}} = \frac{m d\xi}{\sqrt{(\xi^4-1)}}$ et on pourra disposer de μ de manière que $\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^4)}} = \frac{m d\xi}{\sqrt{(1-\xi^4)}}$. Cette dernière équation sera donc satisfaite par l'intégrale $\eta = i^\mu \xi \frac{\psi\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)}$, et comme il est facile de voir que celle-ci, réduite à la forme $i^\mu \xi \frac{\xi^{p-1}\psi\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)}$, doit coïncider avec l'intégrale y qui satisfait à la même équation différentielle, on pourra, à une unité complexe près, égaler entre eux séparément les numérateurs et les dénominateurs des deux intégrales dont il s'agit. Cela donne $\psi(x) = i^\nu x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, ν étant un entier réel. Pour en déterminer la valeur, il suffira de donner à v une valeur particulière. Posant p. e. $v=\frac{1}{4}\omega$, on trouvera $x = \sin\operatorname{am}\frac{1}{4}\omega = 1$ et $\sin\operatorname{am}\frac{1}{4}(m\omega) = \frac{\varphi(1)}{i^\nu\varphi(1)} = i^{-\nu}$; or pour une valeur primaire de m on a $\sin\operatorname{am}\frac{1}{4}(m\omega) = +1$ (Tome II. Page 111 de ce journal) et par suite $i^\nu = 1$, donc on a définitivement $\frac{\sin\operatorname{am} mv}{\sin\operatorname{am} v} = \frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$, pour une valeur *primaire* de m; ce qu'il s'agissait de prouver.

Si donc on suppose que m et n tous les deux soient $\equiv 1$ (mod. $2+2i$), et qu'on fasse

$$\frac{\sin\operatorname{am} mv}{\sin\operatorname{am} v} = \frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}, \qquad \frac{\sin\operatorname{am} nv}{\sin\operatorname{am} v} = \frac{f(x)}{x^{q-1}f\left(\frac{1}{x}\right)},$$

$$\sin\operatorname{am}\frac{r\omega}{m} = \alpha, \qquad \sin\operatorname{am}\frac{\varrho\omega}{n} = \beta,$$

les racines de l'équation $\varphi(x)=0$ seront données par $\pm\alpha$, $\pm i\alpha$, et celles de l'équation $f(x)=0$ par $\pm\beta$, $\pm i\beta$, de sorte qu'on peut écrire

$$\frac{\sin\operatorname{am} mv}{\sin\operatorname{am} v} = \frac{\Pi(x^4-\alpha^4)}{\Pi(1-\alpha^4x^4)}, \qquad \frac{\sin\operatorname{am} nv}{\sin\operatorname{am} v} = \frac{\Pi(x^4-\beta^4)}{\Pi(1-\beta^4x^4)}.$$

De là et des deux formules (1.) et (2.) on tire

$$(3.) \qquad n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \frac{\Pi(\alpha^4-\beta^4)}{\Pi(1-\beta^4\alpha^4)} \pmod{m},$$

$$(4.)\qquad m^{\frac{1}{4}(q-1)} \equiv \frac{\Pi(\beta^4-\alpha^4)}{\Pi(1-\alpha^4\beta^4)} \pmod{n},$$

où il faut combiner chaque valeur de α avec chaque valeur de β. Le nombre de ces combinaisons étant $\frac{1}{4}(p-1)\frac{1}{4}(q-1)$, la seule inspection des formules (3.) et (4.) suffit pour en conclure immédiatement le théorème fondamental sur les résidus biquadratiques.

§. 3.

Remarques.

Pour démontrer la loi de réciprocité relative aux résidus cubiques, il n'y a qu'à mettre à la place de l'équation différentielle $dx = dv\sqrt{(1-x^4)}$ celle-ci $dx = dv\sqrt{(1-x^3)}$ ou celle-ci $dx = dv\sqrt{(x(1-x^3))}$; et au lieu de prendre des nombres complexes de la forme $a+bi$, il n'y a qu'à considérer des nombres qui se composent des racines de l'équation $\zeta^2+\zeta+1=0$; au reste la marche de la démonstration est parfaitement analogue à celle que nous venons de suivre pour les résidus biquadratiques. Par cette raison et comme nous croyons avoir exposé clairement l'esprit de notre méthode, nous remettons à une autre occasion l'examen plus détaillé et les recherches ultérieures que nous avons entreprises sur ces applications de l'algèbre à l'arithmétique. Nous traiterons alors surtout des résidus de puissances supérieures, dont les théorèmes fondamentaux dépendent de l'élimination de plusieurs variables entre trois ou un plus grand nombre d'équations algèbriques.

Il se pourrait qu'on n'approuvàt pas l'usage des fonctions circulaires et elliptiques dans les raisonnement arithmétiques; mais il y a à observer que ces fonctions n'y entrent que d'une manière pour ainsi dire *symbolique*, et qu'il serait possible de les en chasser complétement sans détruire la substance et le fond des démonstrations. Pour faire voir cela rélativement aux résidus quadratiques, reprenons la congruence $q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv C\Pi(\alpha^2-\beta^2) \pmod{p}$, où toutes les lettres doivent avoir la même signification que dans le §. 1. Cette formule donnant le charactère quadratique de q par rapport à p, tout depend essentiellement du signe du second membre. Si donc on met à la place des α et des β d'autres quantités α', β' soumises à la seule condition que $\alpha'^2-\beta'^2$ ait toujours le même signe que $\alpha^2-\beta^2$, le produit $C\Pi(\alpha'^2-\beta'^2)$ exprimera toujours par son signe le caractère de q. Nous sommes donc conduits à ce théorème remarquable:

„Si l'on construit une courbe fermée quelconque, mais symmétrique „par rapport à deux axes perpendiculaires, de sorte qu'elle ait quatre parties

$y=\frac{1}{\eta}$, $x=\frac{1}{i^\mu\xi}$, où μ désigne un entier indéterminé, l'équation différentielle que nous venons d'écrire se changera par cette substitution en $\frac{i^\mu d\eta}{\sqrt{(\eta^4-1)}}=\frac{m\,d\xi}{\sqrt{(\xi^4-1)}}$ et on pourra disposer de μ de manière que $\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^4)}}=\frac{m\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^4)}}$. Cette dernière équation sera donc satisfaite par l'intégrale $\eta=i^\mu\xi\frac{\psi\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)}$, et comme il est facile de voir que celle-ci, réduite à la forme $i^\mu\xi\frac{\xi^{p-1}\psi\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)}$, doit coïncider avec l'intégrale y qui satisfait à la même équation différentielle, on pourra, à une unité complexe près, égaler entre eux séparément les numérateurs et les dénominateurs des deux intégrales dont il s'agit. Cela donne $\psi(x)=i^\nu x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, ν étant un entier réel. Pour en déterminer la valeur, il suffira de donner à v une valeur particulière. Posant p. e. $v=\frac{1}{4}\omega$, on trouvera $x=\sin\text{am}\frac{1}{4}\omega=1$ et $\sin\text{am}\frac{1}{4}(m\omega)=\frac{\varphi(1)}{i^\nu\varphi(1)}=i^{-\nu}$; or pour une valeur primaire de m on a $\sin\text{am}\frac{1}{4}(m\omega)=+1$ (Tome II. Page 111 de ce journal) et par suite $i^\nu=1$, donc on a définitivement $\frac{\sin\text{am}\,mv}{\sin\text{am}\,v}=\frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$, pour une valeur *primaire* de m; ce qu'il s'agissait de prouver.

Si donc on suppose que m et n tous les deux soient $\equiv 1 \pmod{2+2i}$, et qu'on fasse

$$\frac{\sin\text{am}\,mv}{\sin\text{am}\,v}=\frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)},\qquad \frac{\sin\text{am}\,nv}{\sin\text{am}\,v}=\frac{f(x)}{x^{q-1}f\left(\frac{1}{x}\right)},$$

$$\sin\text{am}\frac{r\omega}{m}=\alpha,\qquad \sin\text{am}\frac{\varrho\omega}{n}=\beta,$$

les racines de l'équation $\varphi(x)=0$ seront données par $\pm\alpha$, $\pm i\alpha$, et celles de l'équation $f(x)=0$ par $\pm\beta$, $\pm i\beta$, de sorte qu'on peut écrire

$$\frac{\sin\text{am}\,mv}{\sin\text{am}\,v}=\frac{\Pi(x^4-\alpha^4)}{\Pi(1-\alpha^4x^4)},\qquad \frac{\sin\text{am}\,nv}{\sin\text{am}\,v}=\frac{\Pi(x^4-\beta^4)}{\Pi(1-\beta^4x^4)}.$$

De là et des deux formules (1.) et (2.) on tire

$$(3.)\qquad n^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv\frac{\Pi(\alpha^4-\beta^4)}{\Pi(1-\beta^4\alpha^4)}\pmod{m},$$

$$(4.)\quad m^{\frac{1}{4}(q-1)} \equiv \frac{\Pi(\beta^4-\alpha^4)}{\Pi(1-\alpha^4\beta^4)} \pmod{n},$$

où il faut combiner chaque valeur de α avec chaque valeur de β. Le nombre de ces combinaisons étant $\frac{1}{4}(p-1)\frac{1}{4}(q-1)$, la seule inspection des formules (3.) et (4.) suffit pour en conclure immédiatement le théorème fondamental sur les résidus biquadratiques.

§. 3.

Remarques.

Pour démontrer la loi de réciprocité relative aux résidus cubiques, il n'y a qu'à mettre à la place de l'équation différentielle $dx = dv\sqrt{(1-x^4)}$ celle-ci $dx = dv\sqrt{(1-x^3)}$ ou celle-ci $dx = dv\sqrt{(x(1-x^3))}$; et au lieu de prendre des nombres complexes de la forme $a+bi$, il n'y a qu'à considérer des nombres qui se composent des racines de l'équation $\zeta^2+\zeta+1=0$; au reste la marche de la démonstration est parfaitement analogue à celle que nous venons de suivre pour les résidus biquadratiques. Par cette raison et comme nous croyons avoir exposé clairement l'esprit de notre méthode, nous remettons à une autre occasion l'examen plus détaillé et les recherches ultérieures que nous avons entreprises sur ces applications de l'algèbre à l'arithmétique. Nous traiterons alors surtout des résidus de puissances supérieures, dont les théorèmes fondamentaux dépendent de l'élimination de plusieurs variables entre trois ou un plus grand nombre d'équations algèbriques.

Il se pourrait qu'on n'approuvàt pas l'usage des fonctions circulaires et elliptiques dans les raisonnement arithmétiques; mais il y a à observer que ces fonctions n'y entrent que d'une manière pour ainsi dire *symbolique*, et qu'il serait possible de les en chasser complétement sans détruire la substance et le fond des démonstrations. Pour faire voir cela rélativement aux résidus quadratiques, reprenons la congruence $q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv C\Pi(\alpha^2-\beta^2) \pmod{p}$, où toutes les lettres doivent avoir la même signification que dans le §. 1. Cette formule donnant le charactère quadratique de q par rapport à p, tout depend essentiellement du signe du second membre. Si donc on met à la place des α et des β d'autres quantités α', β' soumises à la seule condition que $\alpha'^2-\beta'^2$ ait toujours le même signe que $\alpha^2-\beta^2$, le produit $C\Pi(\alpha'^2-\beta'^2)$ exprimera toujours par son signe le caractère de q. Nous sommes donc conduits à ce théorème remarquable:

„Si l'on construit une courbe fermée quelconque, mais symmétrique „par rapport à deux axes perpendiculaires, de sorte qu'elle ait quatre parties

„congrus, dont les ordonnées vont en augmentant dans le premier quart: qu'on „divise alors la circonférence de cette courbe en p et en q parties égales et „qu'on désigne par α et par β resp. les ordonnées positives qui correspondent „à ces deux divisions, je dis que q sera ou ne sera pas résidu quadratique „de p selon que le produit $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}\Pi(\alpha^2-\beta^2)=\Pi(\beta^2-\alpha^2)$ pour lequel „chaque valeur de α est à combiner avec chaque valeur de β, aura le signe „*plus* ou le signe *moins*."

Ce théorème, dont la loi de réciprocité est une conséquence immédiate, peut se démontrer d'une manière purement arithmétique. Il existe quelque chose d'analogue mais plus compliquée pour les résidus cubiques et biquadratiques, et on peut dire que pour la démonstration des lois de réciprocité qui s'y rapportent, on n'a nullement besoin de la formule de multiplication des fonctions elliptiques. Cependant il ne parait pas toujours préférable d'éviter dans les recherches arithmétiques les fonctions analytiques, surtout quand on voit à postériori qu'elles n'entrent pas essentiellement dans les démonstrations et qu'elles servent seulement à fixer les idées et à abréger les conclusions.

Berlin, 13. Février 1845.

Crelle Journal d. Math. Bd. XXIV. Heft 2.

Fac-simile einer Handschrift von Copernicus.

R^me in Christo pater et domine Domine clementissime, accepi litteras R. d. v. humanissimas
et admodum familiares, quibus etiam non dedignata est mittere ad lectorem librorum
meorum epigramma elegans sane et ad rem, non meis meritis, sed R. d. v. benevolentia
singulari, qua studiosos prosequi solet. Ipsum igitur R. d. v. multum operi meo in fastigio
praeponam, si modo dignum fit opus, quod a R. d. v. ornari tantopere mereatur, quod tamen
dubitant me doctiores esse aliquid, quibus obsequi decet. Ego vero singularem benevolentiam
et affectum erga me paternum, quo me prosequi non cessat R. d. v. quatenus in me est
promereri, eique in omnibus quibus possum voti debeo servire et obsequi semper —
Ex Frauenburg XXVII Junij 1541

E. R. d. v.

obsequentiss.

Nicolaus Copernic.

9.

Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme.

(Von Herrn Dr. phil. *Heine* zu Berlin.)

Das Potential eines an seiner Oberfläche willkürlich mit Masse belegten Ellipsoïdes läfst sich, wenn es für alle Puncte der Oberfläche gegeben ist, für jeden innerhalb liegenden Punct durch eine Methode finden, welche der ganz ähnlich ist, die ich bei der Behandlung der ähnlichen Frage für das Rotations-Ellipsoïd angewandt habe. Die genannte Aufgabe führt auf dieselbe partielle Differentialgleichung und auf dieselben Bedingungen, wie diejenigen über den von der Zeit unabhängigen Wärmezustand eines Ellipsoïdes, dessen Oberfläche in einer willkürlich gegebenen, von der Zeit unabhängigen Temperatur erhalten wird, und ist also durch die *Lamé*'sche Abhandlung im 4ten Bande des *Liouville*'schen Journals schon gelöset: aber die Form des dort gefundenen Endresultats fordert zu weiteren Untersuchungen über den Gegenstand auf. In der That ist das Bildungsgesetz der dort mit E bezeichneten Functionen so complicirt, dafs man aus demselben nicht leicht wird erkennen können, wie sie sich durch die üblichen mathematischen Zeichen ausdrücken lassen, indem man, um die E zu erhalten, eine Buchstabengleichung auflösen mufs, deren Grad wächst, je mehr Glieder man in der Reihe berechnen will, welche den gesuchten Wärmezustand darstellt: eine Gleichung, die aufserdem noch nicht fertig aufgestellt ist, sondern erst durch Substitution gebildet werden mufs. Endlich hat man noch die gefundenen Wurzeln in gewisse, gleichfalls erst zu bildende Polynome zu substituiren. Es scheint mir daher die gegenwärtige Arbeit nicht überflüssig, durch die ich die Aufgabe von der Lösung fertig gebildeter Systeme linearer Gleichungen abhängig mache, deren Determinanten nicht verschwinden; so dafs man also durch den Gebrauch des Zeichens für die Determinanten die Unbekannten vollständig entwickeln kann, und zwar durch eine endliche Anzahl von Operationen, wenn man eine endliche Zahl von Gliedern in dem Ausdruck berechnen will, welcher den gesuchten Wärmezustand oder das Potential darstellt. Die Gröfsen, aus denen die Determinanten zu bilden sind, stellen sich als Doppel-Integrale dar, hangen, wie man leicht sieht, genau mit denen zu-

sammen, welche *Jacobi* *) betrachtet hat, und lassen sich, ohne eine andere Transcendente als π ausführen **). Was sich aus meinen Betrachtungen für die E ergiebt, habe ich an verschiedenen Stellen der Abhandlung angegeben; es schien mir nicht zweckmäfsig, dieselben unberücksichtigt zu lassen, indem sie viele Untersuchungen deutlicher und kürzer machen. Da ich es für zweckmäfsig hielt, Manches zu erwähnen, was nicht gradezu zur Lösung der Aufgabe gehört, so habe ich die einzelnen Paragraphen mit kurzen Inhalts-Angaben versehen, in denen jedesmal nur die unmittelbar zur Sache gehörigen Entwicklungen angezeigt sind.

§. 1.

Transformation der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ und der Bedingung für die Oberfläche des Ellipsoïdes.

Nimmt man auf die Bedingung Rücksicht, dafs für die Oberfläche des Ellipsoïdes des Potential gegeben ist, so sieht man leicht, dafs die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, welche den Hauptachsen des gegebenen Ellipsoïdes parallel genommen werden, mit andern zu vertauschen sind. Setzt man

$$x = \rho\cos\theta, \qquad \cos\theta = \frac{\rho_1\rho_2}{bc},$$

$$y = \sqrt{(\rho^2-b^2)}\sin\theta\cos\varphi, \qquad \sin\theta\cos\varphi = \frac{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\rho_2^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}},$$

$$z = \sqrt{(\rho^2-c^2)}\sin\theta\sin\varphi, \qquad \sin\theta\sin\varphi = \frac{\sqrt{(c^2-\rho_1^2)}\sqrt{(c^2-\rho_2^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}},$$

$$\varepsilon = \int_0^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(\rho^2-c^2)}},$$

$$\varepsilon_1 = \int_b^{\rho_1}\frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(c^2-\rho_1^2)}},$$

$$\varepsilon_2 = \int_0^{\rho_2}\frac{d\rho_2}{\sqrt{(b^2-\rho_2^2)}\sqrt{(c^2-\rho_2^2)}},$$

so werden die beiden Bedingungen, dafs der gesuchte Wärmezustand oder das Potential V der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

---

*) Gegenw. Journal Bd. XV, in: De evolutione expressionis etc.

**) M. vergl. dazu die Formeln im gegenw. Journal Bd. XXVI. p. 85.

genügen, und sich, wenn

$$(2.)\quad \frac{x^2}{\varrho_0^2}+\frac{y^2}{\varrho_0^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho_0^2-c^2} = 1$$

(wo ϱ_0 die halbe Hauptachse des gegebenen Ellipsoides bezeichnet, b und c seine Eccentricitäten, so dafs $\varrho_0 > \surd(\varrho_0^2-b^2) > \surd(\varrho_0^2-c^2)$ ist), in eine gegebene Function von x, y, z verwandeln soll, in folgende umgeändert. Es soll V der partiellen Differentialgleichung

$$(3.)\quad (\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon^2}+(\varrho^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_1^2}+(\varrho^2-\varrho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_2^2} = 0$$

genügen und für $\varrho = \varrho_0$ sich in eine gegebene Function von θ und φ verwandeln, oder auch von ϱ_1 und ϱ_2, also z. B. für $\varrho = \varrho_0$

$$(4.)\quad V = F(\varrho_1, \varrho_2) = f(\theta, \varphi) \text{ sein.}$$

Etwas Weiteres über diese Substitutionen und Transformationen hinzuzusetzen, würde überflüssig sein, da sie von *Lamé* ausführlich behandelt worden sind.

§. 2.

Fundamental-Formeln.

Bekanntlich läfst sich V als Function der beiden Veränderlichen θ und φ immer, und zwar immer nur auf eine Art, in eine Reihe von der Form

$$V = X_0 + X_1 + \ldots . + X_n + \ldots .$$

entwickeln, deren allgemeines Glied X_n der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial X_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)X_n = 0 \text{ genügt.}$$

Da für $\varrho = \varrho_0$, V in $f(\theta, \varphi)$ übergehen mufs, so ist auch klar, dafs wenn man

$$f(\theta, \varphi) = X_0^0 + X_1^0 + \ldots . + X_n^0 + \ldots .$$

setzt, wo X_n^0 derselben Differentialgleichung wie X_n genügt, dafs dann auch $X_n = X_n^0$ ist für $\varrho = \varrho_0$. Endlich ist der Ausdruck von X_n^0 durch $f(\theta, \varphi)$ bekannt, indem man

$$X_n^0 = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi \partial\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} P_n[\cos\gamma] f(\theta', \partial\varphi')$$

hat *), wo zur Abkürzung

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

gesetzt ist. Der Ausdruck von X_n, in so fern es Function von θ und φ ist,

---

*) Hinsichtlich der hier gebrauchten und nicht erklärten Bezeichnungen, so wie einiger hier benutzten Formeln, verweise ich auf meine Abhandlung: Über einige Aufgaben etc. im gegenw. Journal Bd. XXVI.

hat die Form

$$X_n = \sum_{m=0}^{m=n} (\varkappa_{n,m}\cos m\varphi + \lambda_{n,m}\sin m\varphi) P_{n,m}[\cos\theta],$$

wo die $\varkappa$ und λ von θ und φ, aber nicht von ϱ unabhängige Gröſsen bezeichnen. Die hier aufgestellten Sätze, deren Beweise bekannt sind, lassen sich leicht auf die Coordinaten ϱ_1 und ϱ_2 übertragen, wenn man nur, um die allgemeine Form von X_n in den neuen Coordinaten anzugeben, die $P_{n,m}$ durch bestimmte Integrale ausdrückt. Setzt man wie gewöhnlich $\sqrt{-1} = i$ und versteht unter Π Das, was *Gauſs* damit bezeichnet, so hat man:

$$P_{n,m}[\cos\theta] = \frac{2^n i^{-m}}{\pi} \cdot \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi 2n} \int_0^\pi \{\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\}^n \cos m\psi\, d\psi.$$

Hieraus sieht man sogleich, daſs auch Folgendes die allgemeine Form von X_n ist:

$$X_n = \sum_{m=0}^{m=n} \Big\{ \varkappa_{n,m} \int_0^{2\pi} \{\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi\cos\psi + i\sin\theta\sin\varphi\sin\psi\}^n \cos m\psi\, d\psi$$

$$+ \lambda_{n,m} \int_0^{2\pi} \{\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi\cos\psi + i\sin\theta\sin\varphi\sin\psi\}^n \sin m\psi\, d\psi \Big\}.$$

Gehn wir nun von den θ und φ auf die ϱ_1 und ϱ_2 über, so haben wir folgende Reihe von Sätzen.

„Das gesuchte Potential (oder der Wärmezustand) V läſst sich als Function der beiden Veränderlichen ϱ_1 und ϱ_2 in eine Reihe von der Form

$$V = X_0 + X_1 + \ldots . + X_n + \ldots .$$

entwickeln, deren allgemeines Glied X_n der Differentialgleichung

$$(5.)\quad \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_2^2} + n(n+1)(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) X_n = 0 \text{ genügt.}$$

Da für $\varrho = \varrho_0$, V in $f(\theta, \varphi) = F(\varrho_1, \varrho_2)$ übergehen muſs, so ist auch klar, daſs, wenn man

$$(6.)\quad f(\theta, \varphi) = F(\varrho_1, \varrho_2) = X_0^0 + X_1^0 + \ldots . + X_n^0 + \ldots .$$

setzt, wo X_n^0 derselben Differentialgleichung (5.) wie X_n genügt, daſs dann für $\varrho = \varrho_0$ auch $X_n = X_n^0$ sein wird. Ferner ist

$$(7.)\quad X_n^0 = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \partial\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} P_n[\cos\gamma] f(\theta', \varphi')\, \partial\varphi',$$

wo zur Abkürzung

$$(8.)\quad \cos\gamma = \cos\theta' . \frac{\varrho_1\varrho_2}{bc} + \sin\theta'\cos\varphi' . \frac{\sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)}\sqrt{(b^2 - \varrho_2^2)}}{b\sqrt{(c^2 - b^2)}}$$

$$+ \sin\theta'\sin\varphi' . \frac{\sqrt{(c^2 - \varrho_1^2)}\sqrt{(c^2 - \varrho_2^2)}}{c\sqrt{(c^2 - b^2)}}$$

gesetzt ist. Der Ausdruck von X_n, insofern es Function von ϱ_1 und ϱ_2 ist,

hat die Form

$$(9.)\qquad X_n = \sum_{m=0}^{m=n} \{\varkappa_{n,m} U_{n,m}(\rho_1, \rho_2) + \lambda_{n,m} W_{n,m}(\rho_1, \rho_2)\},$$

wo

$$(10.)\begin{cases} U_{n,m}(\rho_1,\rho_2) = \\ \int_0^{2\pi}\left\{\frac{\rho_1\rho_2}{bc} + i\frac{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\rho_2^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}\cos\psi + i\frac{\sqrt{(c^2-\rho_1^2)}\sqrt{(c^2-\rho_2^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\sin\psi\right\}^n . \cos m\psi\, d\psi, \\ W_{n,m}(\rho_1,\rho_2) = \\ \int_0^{2\pi}\left\{\frac{\rho_1\rho_2}{bc} + i\frac{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\rho_2^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}\cos\psi + i\frac{\sqrt{(c^2-\rho_1^2)}\sqrt{(c^2-\rho_2^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\sin\psi\right\}^n . \sin m\psi\, d\psi \end{cases}$$

ist und die $\varkappa$ und λ von ρ_1 und ρ_2, nicht aber von ρ unabhängig sind. Es war überflüssig, in dem Symbol U oder W auf das Zeichen der Quadratwurzeln auf der rechten Seite Rücksicht zu nehmen, da für das Folgende keine Zweideutigkeit daraus erwächst.

Aus diesen Formeln ersieht man, dafs, wenn m gerade ist, $U_{n,m}$ keine Irrationalität enthält, sondern $W_{n,m}$ die irrationale Gröfse $\sqrt{(c^2-\rho_1^2)}\sqrt{(c^2-\rho_2^2)}\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\rho_2^2)}$; ist m ungerade, so enthält $U_{m,n}$ die Irrationalität $\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\rho_2^2)}$, und $W_{n,m}$ in demselben Falle $\sqrt{(c^2-\rho_1^2)}\sqrt{(c^2-\rho_2^2)}$. Ferner wird sich auch U und W, als Product der darin vorkommenden irrationalen Gröfse, immer in einen rationalen Ausdruck darstellen lassen (z. B. also $U_{n,2m+1}$, als Product von $\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\rho_2^2)}$, in einen rationalen Ausdruck), welcher letztere nur gerade oder nur ungerade Potenzen von ρ_1 und ρ_2 enthält, je nachdem $n-m$ gerade oder ungerade ist. Hierin erkennt man sogleich die acht Gruppen von Gliedern, die sich in den *Lamé*'schen Formeln herausstellen, von denen jede einen partiellen Wärmezustand darstellt; vier Gruppen werden nur U, vier nur W enthalten; viere nur gerade m, viere nur ungerade m; viere gerade $n-m$, die andern ungerade $n-m$.

§. 3.

Wenn X_n für einen der Werthe von ρ_2 verschwindet, während ρ_1 beliebig bleibt, so verschwindet es für jeden Werth von ρ_2.

Dadurch, dafs m alle Werthe 0, 1, 2, ... n erhält und $W_{n,0}$ verschwindet, bekommt der allgemeine Ausdruck von X_n im Ganzen $2n+1$ willkürliche Constanten. Eine von der unsrigen verschiedene Form von X_n, d. h. der Function, welche der Gleichung (5.) genügt und nach $\rho_0\rho_1$, $\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\rho_2^2)}$, $\sqrt{(c^2-\rho_1^2)}\sqrt{(c^2-\rho_2^2)}$ rational und vom Grade n ist, hat

Lamé gegeben, nämlich:

$$X_n = \sum_{m=0}^{m=2n+1} g_{n,m} E_{n,m}(\varrho_1) E_{n,m}(\varrho_2).$$

Die g bezeichnen von ϱ_1 und ϱ_2 unabhängige, willkürliche Constanten, die E gewisse Functionen, von deren Eigenschaften ich hier nur hervorheben will, dafs $E_{n,m}(\varrho_1)$ eine ganze rationale Function von ϱ_1, $\sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)}$ und $\sqrt{(c^2 - \varrho_1^2)}$ ist, und $E_{n,m}(\varrho_2)$ von ϱ_2, $\sqrt{(b^2 - \varrho_2^2)}$ und $\sqrt{(c^2 - \varrho_2^2)}$, und zwar vom Grade n. Bezeichnet ferner $B_{n,m}$ einen unbekannten Zahlenwerth, so genügt $E_{n,m}(\varrho_1)$ der Gleichung

$$\frac{d^2 E_{n,m}(\varrho_1)}{d\varepsilon_1^2} = (B_{n,m} - n(n+1)\varrho_1^2) E_{n,m}(\varrho_1)$$

und $E_{n,m}(\varrho_2)$ der Gleichung

$$\frac{d^2 E_{n,m}(\varrho_2)}{d\varepsilon_2^2} = (n(n+1)\varrho_2^2 - B_{n,m}) E_{n,m}(\varrho_2).$$

Stellt $\Phi(\varrho_1, \varrho_2)$ eine Function zweier Veränderlichen ϱ_1 und ϱ_2 vor (es mag sich ϱ_2 in den Grenzen halten, welche es in unserer Aufgabe einschränken, oder auch nicht), welche sich in eine Reihe von der Form

$$\Phi(\varrho_1, \varrho_2) = \sum_{m=1}^{m=2n+1} g_{n,m} E_{n,m}(\varrho_1) \Psi_{n,m}(\varrho_2)$$

entwickeln läfst, so kann man den Zahlencoëfficienten $g_{n,m}$ leicht bestimmen. In der That, bezeichnet man die vier Theile, aus welchen Φ unter der Voraussetzung über seine Form bestehen mufs, von denen der eine rational nach ϱ_1 ist, der zweite nach ϱ_1 und $\sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)}$, der dritte nach ϱ_1 und $\sqrt{(c^2 - \varrho_1^2)}$, der vierte endlich nach ϱ_1 und $\sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)}\sqrt{(c^2 - \varrho_1^2)}$, der Reihe nach durch Φ', Φ'', Φ''', Φ^{IV}, und die E entsprechend durch E', E'', E''', E^{IV}, stellt ferner μ einen der Indices 1, 2, 3, 4 vor, so hat man

$$\Phi^{(\mu)}(\varrho_1, \varrho_2) = \sum_{m=0}^{m=2n+1} g_{n,m} E_{n,m}^{(\mu)}(\varrho_1) \Psi_{n,m}(\varrho_2),$$

wo die Summation auf alle m auszudehnen ist, welche dem $E_{n,m}$ den Character μ geben. Aus den von *Lamé* gegebenen Sätzen sieht man sogleich, dafs der Werth des mit $E_{n,m}(\varrho_1)\Phi_{n,m}(\varrho_2)$ multiplicirten Factors $g_{n,m}$,

$$g_{n,m} = \frac{\int_b^c \Phi^{(\mu)}(\varrho_1, \varrho_2) E_{n,m}(\varrho_1) \frac{d\varrho_1}{\sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)}\sqrt{(c^2 - \varrho_1^2)}}}{\Psi_{n,m}(\varrho_2) \int_b^c \{E_{n,m}(\varrho_1)\}^2 \frac{d\varrho_1}{\sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)}\sqrt{(c^2 - \varrho_1^2)}}}$$

sein wird, also vollständig bestimmt, wenn die Form der Functionen Φ und Ψ gegeben ist. In dem Ausdruck von $g_{n,m}$ ist ϱ_2 als Constante zu betrachten; es

wird danach nicht integrirt; so dafs man folgenden Satz hat. „Ist die Form der Function Ψ gegeben, nebst $\Phi(\varrho_1, \varrho_2)$ für einen besonderen Werth von ϱ_2, der aber $\Psi_{n,m}(\varrho_2)$ nicht gleich Null macht, so läfst sich daraus $\Phi(\varrho_1 \varrho_2)$ immer, und immer nur auf eine Art, für jedes ϱ_2 angeben." Für den besondern Fall, dafs $\Psi_{n,m}(\varrho_2) = \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$ und dafs der gegebene Werth von $\Phi(\varrho_1, \varrho_2)$ Null ist, hat man hieraus Folgendes: „Es kann $\sum\limits_{m=0}^{m=2n+1} g_{n,m} \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1) \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$ nur dann für einen bestimmten Werth ϱ_2 und für jeden Werth von ϱ_1 verschwinden, wenn für jedes m, $g_{n,m} = 0$ ist." Der Summen-Ausdruck in diesem Satze ist nichts anders, als der allgemeine Ausdruck von X_n bei *Lamé*. Gehen wir auf unsere Form derselben Function zurück, so wird der eben bewiesene Satz sich so aussprechen lassen: „Soll $X_n = \sum\limits_{m=0}^{m=n} \{\varkappa_{n,m} U_{n,m}(\varrho_1, \varrho_2) + \lambda_{n,m} W_{n,m}(\varrho_1, \varrho_2)\}$ für ein bestimmtes ϱ_2 und für jedes ϱ_1 verschwinden, so müssen alle $\varkappa$ und λ gleich 0 sein." Aus diesem Satz folgt unmittelbar der andere: „Man kann nicht zwei verschiedene Functionen X_n angeben, welche für ein bestimmtes ϱ_2 sich in dieselbe Function von ϱ_1 verwandeln."

Anmerkung. Es ist klar, dafs man ebenso wenig zwei verschiedene Functionen X_n angeben kann, die der Gleichung

$$\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial\left(\sin\theta \frac{\partial X_n}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1) X_n = 0$$

genügen, ganz und rational und vom Grade n sind nach $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, und die sich z. B. für $\theta = \theta_0$ in eine gegebene Function von φ, z. B. in $F(\varphi)$ verwandeln. Denn die allgemeine Formel eines solchen X_n ist

$$X_n = \sum_{m=0}^{m=n} \{\varkappa_{n,m} \cos m\varphi + \lambda_{n,m} \sin m\varphi\} P_{n,m}[\cos\theta].$$

Man hat also die Gleichung

$$\sum_{m=0}^{m=n} \{\varkappa_{n,m} \cos m\varphi + \lambda_{n,m} \sin m\varphi\} P_{n,m}[\cos\theta_0] = F(\varphi),$$

folglich

$$\varkappa_{n,m} = \frac{1}{\pi . P_{n,m}[\cos\theta_0]} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos m\varphi \, d\varphi,$$

$$\lambda_{n,m} = \frac{1}{\pi . P_{n,m}[\cos\theta_0]} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin m\varphi \, d\varphi;$$

für $m = 0$ die Hälfte der rechten Seite genommen.

In diesem Falle kann man demnach angeben, wie X_n beschaffen sein mufs, damit es sich für $\theta = \theta_0$ in $F(\varphi)$ verwandele, und es ist klar, dafs nur

$$X_n = \frac{P_{n,0}[\cos\theta]}{2\pi P_{n,0}[\cos\theta_0]}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{P_{n,m}[\cos\theta]}{P_{n,m}[\cos\theta_0]}\int_0^{2\pi} F(\varphi')\cos m(\varphi-\varphi')\,d\varphi'$$

ein solches X_n sein wird, welches für $\theta=\theta_0$, $F(\varphi)$ giebt. Verlangt man aber, dafs sich X_n für $\varrho_2=\varrho_0$ in eine gegebene Function von ϱ_1 verwandeln soll, so ist, wie wir so eben gesehen haben, die Aufgabe zwar bestimmt, erfordert aber, wie sich später zeigen wird, die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.

§. 4.

Die Aufgabe, die Function dreier Veränderlichen V so zu bestimmen, dafs sie der gegebenen Differentialgleichung genügt und sich für $\varrho=\varrho_0$ in eine gegebene Function zweier Veränderlichen verwandelt, wird auf *die* zurückgeführt, eine Function zu finden, die einer Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen genügt und sich für $\varrho=\varrho_0$ in eine gegebene Function einer Veränderlichen verwandelt.

Setzt man in (3.) für V seinen Werth $\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$, wo X_n die schon im Vorhergehenden betrachtete ganze rationale Function $n$ten Grades von $\varrho_1\varrho_2$, $\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho_2^2)}$, $\sqrt{(c^2-\varrho_1^2)}\sqrt{(c^2-\varrho_2^2)}$ ist, die der Gleichung (5.) genügt, so hat man zunächst, da $\varrho^2-\varrho_2^2=(\varrho_1^2-\varrho_2^2)+(\varrho^2-\varrho_1^2)$ ist,

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon^2}+(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_1^2}+(\varrho^2-\varrho_1^2)\left(\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_1^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_2^2}\right)\right\}=0,$$

oder, wenn man vermittels (5.) reducirt:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_1^2}+n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho^2)X_n\right\}=0.$$

Ich behaupte, dafs diese Gleichung auch ohne das Summenzeichen bestehen mufs, so dafs man für jedes n

$$(11.)\qquad \frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_1^2}+n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho^2)X_n=0$$

hat. In der That, setzt man

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon^2}-n(n+1)\varrho^2 X_n=Y_n \quad\text{und}\quad \frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_1^2}+n(n+1)\varrho_1^2 X_n=Z_n,$$

so wird, wenn die Gleichung (5.) dadurch auf 0 gebracht wird, dafs man Z_n für X_n darin setzt (dafs Z_n zur Classe der X_n gehört), auch Y_n+Z_n zur Classe der X_n gehören, da Y_n zu ihrer Classe gehört, indem letztere Function durch Subtraction aus zwei Theilen zusammengesetzt ist, von denen der eine X_n selbst multiplicirt in eine Constante ist (denn ϱ ist in Bezug auf ϱ_1 und ϱ_2 constant), die andre X_n nach einer von ϱ_1 und ϱ_2 unabhängigen Gröfse

differentiirt. Es mufs dann nach bekannten Sätzen, wenn $\sum_{n=0}^{n=\infty}(Y_n+Z_n)=0$ ist, auch Y_n+Z_n für sich verschwinden. Dafs aber Z_n zu den X_n gehöre, sieht man leicht durch Hülfe der E; aber auch durch ganz directe Methoden. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_1^2} = \frac{\partial^4 X_n}{\partial \varepsilon_1^4} + n(n+1)\frac{\partial^2(\varrho_1^2 X_n)}{\partial \varepsilon_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 Z_n}{\partial \varepsilon_2^2} = \frac{\partial^4 X_n}{\partial \varepsilon_1^2 \partial \varepsilon_2^2} + n(n+1)\varrho_1^2 \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_2^2},$$

also

$$(12.)\qquad \frac{\partial^2 Z_n}{\partial \varepsilon_1^2}+\frac{\partial^2 Z_n}{\partial \varepsilon_2^2}+n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho_2^2)Z_n$$

$$= \left\{\frac{\partial^4 X_n}{\partial \varepsilon_1^4}+\frac{\partial^4 X_n}{\partial \varepsilon_1^2 \partial \varepsilon_2^2}+n(n+1)\frac{\partial^2(\varrho_1^2 X_n)}{\partial \varepsilon_1^2}\right\}$$

$$+n(n+1)\left\{\varrho_1^2\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_2^2}+(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_1^2}+n(n+1)\varrho_1^2(\varrho_1^2-\varrho_2^2)X_n\right\}.$$

Die letzte Parenthese, gehörig reducirt, giebt $-n(n+1)\frac{\partial^2(\varrho_2^2 X_n)}{\partial \varepsilon_1^2}$, folglich wird die rechte Seite von (12.):

$$= \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_1^2}\left\{\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_1^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_2^2}+n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho_2^2)X_n\right\} = 0.$$

Um also V zu bestimmen, hat man die X_n zu suchen (es ist nämlich $V=\sum_{n=0}^{n=\infty}X_n$), d. h. solche Gröfsen, welche

A) die Form $X=\sum_{m=0}^{m=2n+1} g_{n,m}\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$ haben, oder, was dasselbe ist, $X_n=\sum_{m=0}^{m=n}\{x_{n,m}U_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)+\lambda_{n,m}W_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)\}$, wo die g, x, λ Functionen von ϱ, nicht von ϱ_1 und ϱ_2 sind,

B) welche der Gleichung (11.) genügen,

C) welche für $\varrho=\varrho_0$ sich in die Gröfsen X_n^0 verwandeln, d. h. in die durch (7.) gegebenen Ausdrücke. Da ϱ_2 in (11.) nicht vorkommt, so kann man diese Veränderliche bei den Bedingungen (*B*) und (*C*) als constant betrachten, so dafs auch in (*C*) X_n als Function nur einer Veränderlichen ϱ_1 auftritt.

Da die X_n^0 zur Classe der X_n gehören, so wird man dieselben auf die Form

$$X_n^0 = \sum_{m=0}^{m=2n+1} f_{n,m}\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

oder auf die Form

$$X_n^0 = \sum_{m=0}^{m=n}\{g_{n,m}U_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)+h_{n,m}W_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)\}$$

gebracht sich vorstellen können, wo die f, g, h als gegeben anzunehmen sind.

§. 5.

Die Potential-Aufgabe wird durch die Bedingungen vollständig bestimmt.

Um zu bestimmen, wie ϱ in $g_{n,m}$ vorkommen mufs, damit

$$X_n = \sum_{m=0}^{m=2n+1} g_{n,m} \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

auch die Bedingung (*B*) des §. 4. erfülle, setze ich diesen Ausdruck für X_n in (11.) und erhalte

$$\sum_{m=0}^{m=2n+1} \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)\left\{\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\frac{d^2 g_{n,m}}{d\varepsilon^2} + g_{n,m}\frac{d^2 \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)}{d\varepsilon_1^2} + n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho^2)g_{n,m}\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\right\} = 0,$$

oder, nach der Definitionsgleichung von $\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)$ in §. 3.,

$$\sum_{m=0}^{m=2n+1} \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)\left\{\frac{d^2 g_{n,m}}{d\varepsilon^2} + (\mathrm{B}_{n,m} - n(n+1)\varrho^2)g_{n,m}\right\} = 0.$$

Da $\frac{d^2 g_{n,m}}{d\varepsilon^2} + (\mathrm{B}_{n,m} - n(n+1)\varrho^2)g_{n,m}$ eine Constante in Bezug auf ϱ_1 und ϱ_2 ist, so kann nach dem Lehrsatz in §. 3. die obige Gleichung nicht anders bestehen, als wenn man für jedes *m*,

$$\frac{d^2 g_{n,m}}{d\varepsilon^2} + (\mathrm{B}_{n,m} - n(n+1)\varrho^2)g_{n,m} = 0$$

hat. Ein particulaires Integral dieser Gleichung ist offenbar $\mathrm{E}_{n,m}(\varrho)$, d. h. eine ganze rationale Function von ϱ, $\sqrt{(\varrho^2-b^2)}$, $\sqrt{(\varrho^2-c^2)}$, und vom Grade *n*. Aus $\mathrm{E}_{n,m}$ kann man aber ein anderes particulaires Integral $\mathrm{F}_{n,m}$ durch die *Abel*schen Untersuchungen *) ableiten. Man erhält nämlich

$$\mathrm{F}_{n,m}(\varrho) = \mathrm{E}_{n,m}(\varrho)\int\frac{d\varepsilon}{\{\mathrm{E}_{n,m}(\varrho)\}^2}.$$

Bezeichnen also $b_{n,m}$ und $c_{n,m}$ willkürliche Constanten, so wird

$$(13.)\qquad X_n = \sum_{m=0}^{m=2n+1}\{b_{n,m}\mathrm{E}_{n,m}(\varrho) + c_{n,m}\mathrm{F}_{n,m}(\varrho)\}\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

den Bedingungen (*A*) und (*B*) in §. 4. genügen. Bestimmt man nun die *b* und *c* so, dafs

$$(14.)\qquad b_{n,m}\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_0) + c_{n,m}\mathrm{F}_{n,m}(\varrho_0) = f_{n,m},$$

so wird, wenn man diese Werthe in (13.) substituirt, X_n alle drei Bedingungen erfüllen. Aus (14.) kann aber *b* und *c* auf unendlich viele Arten gefunden werden, und dennoch kann es *nur ein* Potential geben, so dafs hier ein Widerspruch zu entstehen scheint.

Ehe ich denselben aufzulösen versuche, will ich bemerken, dafs daraus, dafs das Potential endlich sein mufs, für das *Potential des äufsern Puncts*

---

*) Gegenw. Journal Bd. II. „Über einige bestimmte Integrale."

folgt, dafs alle b verschwinden müssen, so dafs (14.)

$$c_{n,m} = \frac{f_{n,m}}{F_{n,m}(\varrho_0)}$$

giebt, weshalb diese Aufgabe durch die Formel

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=2n+1} f_{n,m} \frac{F_{n,m}(\varrho)}{F_{n,m}(\varrho_0)} E_{n,m}(\varrho_1) E_{n,m}(\varrho_2).$$

gelöset wird. Wie die $f_{n,m}$ durch die gegebene Function $f(\theta, \varphi) = F(\varrho_1, \varrho_2)$ ausgedrückt werden können, kann man bei *Lamé* sehen; es wird überflüssig sein, länger bei dieser Aufgabe zu verweilen, die nach Dem, was hier gesagt ist, als gelöset anzusehen ist, sobald die E bekannt sind.

Gehen wir zur Aufgabe des innern Punctes zurück, die wir jetzt als Wärme-Aufgabe betrachten wollen, da sich Das, was im Folgenden darüber gesagt werden soll, unter dieser Gestalt am anschaulichsten darstellen zu lassen scheint. Es sei hier sogleich bemerkt, dafs man nur dann einen Wärmezustand erhält, welcher unserer Aufgabe entspricht, wenn alle c gleich Null gesetzt werden; sind die c von Null verschieden, so ist $V = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$ noch immer ein Wärmezustand, der aber dadurch hervorgebracht wird, dafs *zwei confocale Ellipsoïden* in willkürlich gegebenen, von der Zeit unabhängigen Temperaturen erhalten werden. Bei der Aufgabe, welche der unsrigen im Falle der Kugel und eines solchen Rotations-Ellipsoïdes entspricht, dessen kleinste Achsen die gleichen sind, sieht man, dafs das Potential für jeden Punct im Innern des Körpers (also auch für den Mittelpunct) endlich sein mufs, sogleich daraus, dafs die Gruppe von willkürlichen Constanten, welche dort unserem c entspricht, verschwinden mufs, so dafs die b entsprechende Gruppe bestimmt ist, während sich für die andere Gattung von Rotations-Ellipsoïden, so wie für die dreiachsigen, nicht auf dieselbe Art das oben ausgesprochene Resultat beweisen läfst.

So lange man sich mit Wärme-Aufgaben in Bezug auf die Kugel beschäftigte, konnte demnach die Bestimmung der Constanten keine Schwierigkeit dadurch hervorrufen, dafs man eine zu grofse Anzahl derselben gehabt hätte, d. h. mehr als Bestimmungsgleichungen vorhanden sind; eine solche konnte erst entstehen, als man zu allgemeineren Untersuchungen überging, so dafs *Lamé* der erste war, der sie aufzulösen versuchte. Was dieser im §. XIV seiner Abhandlung sagt, um zu zeigen, dafs das von ihm aufgestellte Integral der partiellen Differentialrechnung (3.) allgemein genug sei *), scheint mir nicht

*) Ainsi la série (27.), dans laquelle E est une fonction rationelle, entière et du degré n, de $\sqrt{(\varrho^2 - b^2)}$ et $\sqrt{(\varrho^2 - c^2)}$, comprend, comme cela devait être, celle (26.)

genügend, indem man in der That ein allgemeineres Integral der dort unter der Nummer (30.) aufgeführten Differentialgleichung (bei uns ist dies die Gleichung für $g_{n,m}$) als $E_{n,m}$ nehmen kann, ohne dafs die Formel aufhört, den richtigen Werth für den Grenzfall (die Kugel) zu geben, wenn man im Übrigen wie *Lamé* verfährt. Es geschieht dies z. B., wenn man annimmt, dafs $F_{n,m}$ noch in dem Ausdruck vorkommt, sei es in Constanten multiplicirt, oder in gewisse Gröfsen, die mit der Differenz der Haupt-Achsen verschwinden. (Es wird nämlich $F_{n,m}(\rho)$, mit wachsendem ρ, unendlich klein werden.)

In dem unmittelbar Vorhergehenden habe ich angenommen, wie es *Lamé* thut, dafs der Grenzfall des Ellipsoïdes, wenn die Excentricitäten noch immer b und c sind, aber die grofse Achse unendlich wird, eine Kugel sei. Dafs aber das Ellipsoïd auch in solchem Falle nicht mit einer Kugel verwechselt werden dürfe, sieht man leicht, wenn man Das berücksichtigt, was am Ende dieses Paragraphs über den Zusammenhang der Wärmezustände bei confocalen Ellipsoïden gesagt ist; woraus hervorgehn würde, dafs, anstatt den Wärmezustand eines Ellipsoïdes zu berechnen, dessen Oberfläche in einer gegebenen Temperatur erhalten wird, es nur nöthig sei, eine gewisse Vertheilung auf eine Oberfläche einer Kugel mit beliebigem Radius anzunehmen und den Punct dann als in dieser Kugel liegend zu betrachten. Dies steht aber mit den Formeln, welche man direct ableiten kann, im Widerspruch. Andrerseits ist auch nicht klar, (und ich möchte nicht glauben, dafs dieses der Fall sei), dafs man für $\rho=\infty$, $E_{n,m}(\rho)$ mit ρ^n vertauschen könne.

Sollte auch endlich Das, was *Lamé* hier gesagt hat, *bewiesen* sein, so ist daraus noch immer nicht *klar*, warum die Gruppe c aus der Auflösung verschwinden müsse: die Wärme-Aufgabe ist gelöset, wenn die Anhäufung von Wärme in jedem Puncte, d. h. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, verschwindet, und die Temperatur an der Oberfläche die gegebene ist; ein Zustand des Gleichgewichts der Temperaturen kann nichts anders verlangen. Kann man auf mehrere Arten die Bedingungen erfüllen, so giebt es verschiedene Zustände des Gleichgewichts. Da es aber nur einen Zustand des Gleichgewichts geben kann, so müssen die Bedingungen ausreichen.

Aus diesem Grunde ist auch Das ungenügend, was ich in meiner eben erwähnten Abhandlung p. 185 gesagt habe; das dort gegebene Resultat ist

---

relative à la sphère; ce qui n'aurait plus lieu, si l'on prenait pour E une intégrale plus générale de l'équation (30.).

freilich ebenso wie *Lamé*'s richtig; es hätte aber gezeigt werden müssen, dafs nicht nur die Reihe convergirt, sondern dafs sie divergirt, wenn man die P mit den Q auf irgend eine noch frei gelassene Art verbindet. Man kann aber in der That, unbeschadet der Convergenz, wenigstens in den ersten Gliedern der Reihe, eine solche Verbindung eintreten lassen, dafs das dort Gesagte gleichfalls noch einer Ergänzung bedarf. Da Das, was dort noch hinzugefügt werden mufs, nicht wesentlich von Dem verschieden ist, was ich in diesem Paragraphen auseinandersetzen werde, ja sogar sich noch einfacher darthun läfst, als der ähnliche Umstand bei den dreiachsigen Ellipsoïden, so wird es hinreichen, wenn ich nur die letztere Gattung von Körpern betrachte, ohne auf den besondern Fall der Rotations-Ellipsoïden zurückzukommen.

Man denke sich, dafs ein Ellipsoïd, für welches $\varrho=\varrho'$ ist, während die Excentricitäten b und c bleiben (es sei $\varrho'<\varrho_0$), aus dem gegebnen, für welches $\varrho=\varrho_0$ ist, geschnitten sei. Wird nun *die* Fläche, für welche $\varrho=\varrho'$ ist, in einer willkürlich gegebenen Temperatur erhalten, z. B. $\vartheta(\varrho_1,\varrho_2)$, so entsteht die Aufgabe, den von der Zeit unabhängigen Wärmezustand V' dieses von zwei confocalen Ellipsoïden begrenzten Körpers zu finden, welcher an den Flächen, in denen $\varrho=\varrho_0$ oder $\varrho=\varrho'$ ist, in den Temperaturen $F(\varrho_1,\varrho_2)$ oder resp. $\vartheta(\varrho_1,\varrho_2)$ erhalten wird. Entwickelt man $\vartheta(\varrho_1,\varrho_2)$, wie oben $F(\varrho_1,\varrho_2)$, nach den mit X_n bezeichneten Functionen, setzt also

$$\vartheta(\varrho_1,\varrho_2)=\sum_{n=0}^{n=\infty}X'_n,$$

wo X'_n für X_n in (5.) gesetzt, die linke Seite auf 0 bringt, so ist X'_n durch die Function ϑ gegeben. Setzt man dann

$$X'_n=\sum_{m=0}^{m=2n+1}f'_{n,m}\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

und wie oben $V'=\sum_{n=0}^{n=\infty}X_n$, so wird X_n wiederum durch (13.) gegeben, während die b und c nicht nur durch

$$(14.)\qquad b_{n,m}\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_0)+c_{n,m}\mathrm{F}_{n,m}(\varrho_0)=f_{n,m},$$

sondern auch durch

$$(15.)\qquad b_{n,m}\mathrm{E}_{n,m}(\varrho')+c_{n,m}\mathrm{F}_{n,m}(\varrho')=f'_{n,m}$$

verbunden sind. Hierdurch sind alle b und c vollständig bestimmt, und man sieht, dafs b und c alle möglichen Werthe annehmen können, wenn man für ϑ und F verschiedene Functionen setzt. Es wird also, wenn man

$$X_n=\sum_{m=0}^{m=n}\{b_{n,m}\mathrm{E}_{n,m}(\varrho)+c_{n,m}\mathrm{F}_{n,m}(\varrho)\}\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

setzt, wo die b und c beliebige Zahlen sind, $V = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$ immer ein solcher Wärmezustand sein, der sich nicht verändert, wenn man ein Ellipsoïd, für welches $\varrho = \varrho_0$ ist, in der Temperatur

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \{b_{n,m} \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_0) + c_{n,m} \mathrm{F}_{n,m}(\varrho_0)\} \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1) \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

und ein anderes für das $\varrho = \varrho'$, wo ϱ' beliebig ist, aber kleiner als ϱ_0, in einer Temperatur

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \{b_{n,m} \mathrm{E}_{n,m}(\varrho') + c_{n,m} \mathrm{F}_{n,m}(\varrho')\} \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1) \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

erhält. Läfst man nun $\varrho' = c$ werden, so wird die Wärme im gegebenen Ellipsoïd unverändert bleiben, wenn man seine Oberfläche und *die* Ellipse für die $\varrho' = c$ in willkürlichen Temperaturen erhält; man hat also einen Zustand des Gleichgewichts im ganzen Ellipsoïd, ohne dafs die $c_{n,m}$ verschwinden. Dieser Zustand ist jedoch von dem verschieden, welchen unsere Aufgabe erfordert, da bei derselben die Wärme in *der* Ellipse, für welche $\varrho' = c$ ist, wieder aufgewandt werden mufs, um andern Puncten Wärme mitzutheilen, im Falle der zwei Ellipsoïde aber (oder des Ellipsoïdes und der Ellipse) dieser Ellipse eine beliebige Wärmemenge von den umliegenden Puncten mitgetheilt werden darf, da dieselbe, wenn sie die Temperatur der Ellipse erhöhen sollte, nach der Natur der Aufgabe wieder entfernt werden mufs. Der ganze Unterschied zwischen den beiden Aufgaben, die wir hier betrachten, kann also nur darin bestehen, dafs der Wärmezuwachs für unsern Fall in allen Puncten, von $\varrho = \varrho_0$ bis $\varrho = c$, letztere Puncte noch eingeschlossen, Null sein mufs, dafs hingegen im andern Falle die Anhäufung von Wärme von $\varrho = \varrho_0$ bis $\varrho = c$ excl. verschwinden mufs, für $\varrho = 0$ selbst aber von Null verschieden sein kann.

Die durch die Einwirkung der umgebenden Puncte im Puncte x, y, z hervorgebrachte Anhäufung von Wärme ist, wenn K einen constanten, von der Natur des Mittels etc. abhängigen Werth bezeichnet, in einer unendlich kleinen Zeit ∂t,

$$K \partial x \partial y \partial z \partial t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right).$$

Soll sie für alle Puncte verschwinden, so mufs man

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

haben. Transformirt man nun x, y, z in $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$, so erhält man für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ nicht den Ausdruck, welcher auf der linken Seite von (3.) steht, sondern diesen noch dividirt durch $(\varrho^2 - \varrho_1^2)(\varrho^2 - \varrho_2^2)(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)$. Kann man nun gleich diesen Factor im allgemeinen weglassen, und erhält so (3.),

so wird doch für einzelne Puncte der Nenner verschwinden. Es kann nämlich $\varrho^2-\varrho_2^2$ nicht verschwinden und $\varrho_1^2-\varrho_2^2$ ist Null, wenn $\varrho_1=\varrho_2=b$ ist. Dafs für diesen Fall der in Rede stehende Ausdruck noch Null ist, läfst sich ebenso zeigen, wie ich beweisen werde, dafs er für $\varrho^2-\varrho_1^2=0$ verschwindet, wenn alle $c_{n,m}$ Null werden; es wird ferner klar werden, dafs wenn die $c_{n,m}$ in der Lösung bleiben, der Ausdruck nicht verschwindet. Soll $\varrho^2-\varrho_1^2=0$ sein, so ist dies nur für die Puncte möglich, für welche ϱ und ϱ_1 beide gleich c sind, so dafs nur für die Puncte eine Schwierigkeit entsteht, für welche $\varrho=c$ ist; was auch mit Dem übereinstimmt, was wir auf physicalischem Wege fanden. Für den Fall der zwei Ellipsoïde können die $c_{n,m}$ in der Lösung enthalten sein, da für den Fall $\varrho^2-\varrho_1^2=0$ der obige Ausdruck des Wärmezuwachses nicht mehr zu verschwinden braucht. Endlich sei noch bemerkt, dafs wenn man ϱ und ϱ_1 einen unendlich kleinen Zuwachs ϖ für den Fall giebt, in welchem sie einander gleich, also beide gleich c sind, dafs dann, wenn ϖ positiv ist, ϱ in $\varrho+\varpi$, dagegen ϱ_1 in $\varrho_1-\varpi$ übergeht, indem c das Minimum von ϱ und das Maximum von ϱ_1 ist.

Aus §. 4. ersieht man, dafs wir nur zu beweisen haben, es sei $\frac{\mathrm{A}}{\varrho^2-\varrho_1^2}=0$, wenn $\varrho=\varrho_1=c$ ist, wo man zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varpi^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varpi^2}+n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho^2)X_n = \mathrm{A}$$

gesetzt hat. Es wird sich zeigen, dafs wenn man in dieser Gleichung $X_n = \mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{E}_{n,m}(\varrho)$ macht, dafs dann $\frac{\mathrm{A}}{\varrho^2-\varrho_1^2}$ wirklich verschwindet; dafs es dagegen nicht verschwindet, wenn man $X_n=\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\mathrm{F}_{n,m}(\varrho)$ setzt. Läfst man die Indices n und m weg und wählt den Buchstaben Z, um E oder F zu bezeichnen, so hat man

$$(16.)\quad \frac{\partial^2 \mathrm{Z}(\varrho)}{\partial\varrho^2}(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)+\frac{\partial \mathrm{Z}(\varrho)}{\partial\varrho}\varrho(2\varrho^2-b^2-c^2)+(\mathrm{B}-n(n+1)\varrho^2)\mathrm{Z}(\varrho)=0.$$

Setzt man für ϱ in diese Gleichung $\varrho+\varpi$ und berücksichtigt *der Kürze wegen* nicht alle 5 vorkommende Potenzen von ϖ, sondern nur die 0te und die 1te, so wird:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{Z}(\varrho+\varpi)}{\partial\varrho^2}(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)+\frac{\partial \mathrm{Z}(\varrho+\varpi)}{\partial\varrho}\varrho(2\varrho^2-a^2-b^2)+(\mathrm{B}-n(n+1)\varrho^2)\mathrm{Z}(\varrho+\varpi)$$
$$=-\varpi\left\{\frac{\partial^2 \mathrm{Z}(\varrho+\varpi)}{\partial\varrho^2}(4\varrho^3-2(b^2+c^2)\varrho)+\frac{\partial \mathrm{Z}(\varrho+\varpi)}{\partial\varrho}(6\varrho^2-a^2-b^2)-2n(n+1)\mathrm{Z}(\varrho+\varpi)\right\}.$$

Nun ist $\varrho^2-\varrho_1^2$, wenn man $\varrho+\varpi$ statt ϱ und $\varrho_1-\varpi$ statt ϱ_1 setzt und darauf $\varrho=\varrho_1$ macht,

$$\varrho^2-\varrho_1^2 = 4\varpi\varrho,$$

also für $\varrho=\varrho_1$ ist $\frac{A}{\varrho^2-\varrho_1^2}$ die Grenze von

$$(17.)\quad \{2\varrho^3-2(b^2+c^2)\varrho\}\left\{E(\varrho)\frac{\partial^2 Z(\varrho+\varpi)}{\partial\varrho^2}-Z(\varrho)\frac{\partial^2 E(\varrho-\varpi)}{\partial\varrho^2}\right\}$$
$$+(6\varrho^2-a^2-b^2)\left\{E(\varrho)\frac{\partial Z(\varrho+\varpi)}{\partial\varrho}-Z(\varrho)\frac{\partial E(\varrho-\varpi)}{\partial\varrho}\right\}$$
$$-2n(n+1)\{E(\varrho)Z(\varrho+\varpi)-Z(\varrho)E(\varrho-\varpi)\}$$

für $\varrho=c$ und $\varpi=0$. Man findet dieses sogleich, wenn man statt X_n, wie es hier geschehen ist, $E_{n,m}(\varrho_1)Z_{n,m}(\varrho)$ setzt und die linke Seite von (16.) für den Augenblick $=\chi(\varrho)$ macht. Es wird dann offenbar $A=E_{n,m}(\varrho_1)\chi(\varrho)-E_{n,m}(\varrho)\chi(\varrho_1)$, d. h. die Grenze des Ausdrucks (17.). Setzt man darin $\varpi=0$, so wird derselbe offenbar, wenn $Z=E$ ist, als Differenz zweier gleichen Gröfsen, für jedes ϱ, also auch für $\varrho=c$ verschwinden; was zu beweisen war.

Ist $Z=F$, so ist bekanntlich

$$E(\varrho)\frac{\partial^2 F(\varrho)}{\partial\varepsilon^2}-F(\varrho)\frac{\partial^2 E(\varrho)}{\partial\varepsilon^2}=0;$$

es verschwindet also in (17.) der mit $4\varrho^3-2(b^2+c^2)\varrho$ multiplicirte Theil, und ebenso auch der Factor von $2n(n+1)$. Dagegen wird

$$E(\varrho)\frac{\partial F(\varrho)}{\partial\varepsilon}-F(\varrho)\frac{\partial E(\varrho)}{\partial\varepsilon}=K,$$

wo K eine von 0 verschiedene Constante ist; also wird der Factor von $6\varrho^2-a^2-b^2$ in (17.) gleich $\frac{K}{(\sqrt{\varrho^2-b^2})\sqrt{(\varrho^2-c^2)}}$, mithin für $\varrho=c$ unendlich. Da nun X_n, wenn auch nicht immer *ein* Glied von der Form $E(\varrho_1)Z(\varrho)$, so doch eine Summe von solchen Gliedern ist, von welchen jedes noch mit $E(\varrho_2)$ und einer Constante multiplicirt ist, so sieht man, dafs bei unserer Aufgabe die F nicht vorkommen können, also die $c_{n,m}$ verschwinden müssen. Es wird demnach $b_{n,m}=\frac{f_{n,m}}{E_{n,m}(\varrho_0)}$ oder

$$(18.)\quad V=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=2n+1} f_{n,m}\frac{E_{n,m}(\varrho)}{E_{n,m}(\varrho_0)}E_{n,m}(\varrho_1)E_{n,m}(\varrho_2).$$

In dem Falle, auf welchen sich die Gleichung (15.) bezieht, ist

$$V'=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=2n+1}\frac{E_{n,m}(\varrho)\{f_{n,m}F_{n,m}(\varrho')-f'_{n,m}F_{n,m}(\varrho_0)\}+F_{n,m}(\varrho)\{f'_{n,m}E_{n,m}(\varrho_0)-f_{n,m}E_{n,m}(\varrho')\}}{E_{n,m}(\varrho_0)F_{n,m}(\varrho')-F_{n,m}(\varrho_0)E_{n,m}(\varrho')}.$$

In dem folgenden Paragraph werde ich die hier gegebne Lösung der Aufgabe (18.) in einer andern Form mittheilen: *ich werde den Bedingungen (A), (B), (C) des §. 4. noch die hinzufügen, dafs die X_n nach ϱ und ϱ_2 symmetrisch sein müssen, (denn dieses drückt vollkommen*

aus, dafs V nur die E, *keine* F *enthält) und dann den Factor* $\varrho^2-\varrho_1^2$ *im Nenner vernachlässigen können.*

Aus (18.) geht hervor, dafs man, anstatt die Oberfläche eines gegebenen Ellipsoïdes in einer gegebenen Temperatur zu erhalten, ein ihm confocales gröfseres oder kleineres in einer gewissen Temperatur an der Oberfläche erhalten kann, ohne dafs der Wärmezustand der Puncte, welche beidemal innere sind, verändert wird.

In der That, wenn die Temperatur für $\varrho=\varrho_0$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=2n+1} f_{n,m}\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

ist, so wird diejenige für einen beliebigen innern Punct ϱ, ϱ_1, ϱ_2 durch (18.) ausgedrückt. Dieselbe Formel findet sich aber auch, wenn man *die* Oberfläche, für welche $\varrho=\varrho'$ ist, in einer Temperatur erhält, welche durch

$$V=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=2n+1} f_{n,m}\,\frac{\mathrm{E}_{n,m}(\varrho')}{\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_0)}\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2)$$

ausgedrückt wird.

Ist die gegebene Temperatur für $\varrho=\varrho_0$

$$V=f_{n,m}\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_1)\,\mathrm{E}_{n,m}(\varrho_2),$$

wo $f_{n,m}$ eine beliebige Constante ist, so werden die Wärmezustände zweier Puncte ϱ', ϱ_1, ϱ_2 und ϱ'', ϱ_1, ϱ_2, die ich durch V' und V'' bezeichne, das Verhältnifs

$$V':V''=\mathrm{E}_{n,m}(\varrho'):\mathrm{E}_{n,m}(\varrho'')$$

haben. Die Wärmezustände haben also dasselbe Verhältnifs, welches auch ϱ_0, und wie grofs auch $f_{n,m}$ sei. Welche geometrische Beziehung zwei Puncte dieser Art haben, ist hinlänglich bekannt. Man sieht aber aus diesen Betrachtungen die bedeutende Rolle der von *Lamé* eingeführten Functionen E in der Wärmetheorie, und wie wichtig es sei, dieselben genauer zu erforschen.

§. 6.

Aufstellung der Formel für das Potential des innern Punctes.

Bekanntlich ist

$$P_n[\cos\gamma]=\sum_{m=0}^{m=n} a_{n,m}P_{n,m}[\cos\theta]\,P_{n,m}[\cos\theta']\cos m(\varphi-\varphi'),$$

wo

$$a_{n,m}=2.\frac{\{1.3.5\ldots.(2n-1)\}^2}{\Pi(n-m)\,\Pi(n+m)},\qquad a_{n,0}=\left\{\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{\Pi n}\right\}^2.$$

Da nun

$$\int_0^{2\pi}\{\cos\theta+i\sin\theta\cos(\varphi-\psi)\}^n\cos m\psi\, d\psi$$
$$=2\cos m\varphi\int_0^{\pi}\{\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi\}^n\cos m\psi\, d\psi,$$

so wird

$$P_{n,m}[\cos\theta]\cos m\varphi = \frac{2^{n-1}.i^{-m}}{\pi}.\frac{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}{\Pi(2n)}U_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2).$$

Macht man also

$$(19.)\quad \mathrm{Y}=\frac{\varrho_1\varrho_2}{bc}.\frac{\varrho'\varrho}{bc}+\frac{\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho_2^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}.\frac{\sqrt{(\varrho'^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}$$
$$+\frac{\sqrt{(c^2-\varrho_1^2)}\sqrt{(c^2-\varrho_2^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}.\frac{\sqrt{(c^2-\varrho'^2)}\sqrt{(c^2-\varrho^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

und $g'_{n,m}=i^{-m}\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)$, so ist

$$P_n[\mathrm{Y}]=\frac{4^{n-1}}{\pi^2\{\Pi 2n\}^2}\sum_{m=0}^{m=n}a_{n,m}g'^2_{n,m}(U_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)U_{n,m}(\varrho',\varrho)+W_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)W_{n,m}(\varrho',\varrho)).$$

Diese Formel erfüllt die Bedingungen (*A*) und (*B*) zugleich, und ist symmetrisch nach ϱ und ϱ_2, ebenso wie folgende:

$$(20.)\quad \int_0^{2\pi}P_n[\mathrm{Y}]\,\Theta(\chi)\frac{\partial\chi}{\varrho^m}=T_n,$$

wo zur Abkürzung

$$\cos\chi=\frac{c\sqrt{(\varrho'^2-b^2)}}{\varrho'\sqrt{(c^2-b^2)}},\qquad \sin\chi=\frac{b\sqrt{(c^2-\varrho'^2)}}{\varrho'\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

gesetzt und, wenn α, β Constanten bedeuten, ferner t eine sogleich zu bestimmende Zahlengröfse

$$t\Theta(\chi)=\alpha_0+\alpha_1\cos\chi+\alpha_2\cos 2\chi+\ldots+\alpha_n\cos n\chi$$
$$+\beta_1\sin\chi+\beta_2\sin 2\chi+\ldots+\beta_n\sin n\chi \text{ ist.}$$

Setzt man noch für $v_m^{(p)}(\varrho)$ (oder schlechtweg für $v_m^{(p)}$, wenn das Argument ϱ nicht zweifelhaft ist):

$$(21.)\begin{cases} v_m^{(p)}(\varrho)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\varrho+\sqrt{(\varrho^2-b^2)}\cos\chi\cos\psi+\sqrt{(\varrho^2-c^2)}\sin\chi\sin\psi\}^n\cos m\psi\cos p\chi\,\partial\psi\,\partial\chi,\\ w_m^{(p)}(\varrho)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\varrho+\sqrt{(\varrho^2-b^2)}\cos\chi\cos\psi+\sqrt{(\varrho^2-c^2)}\sin\chi\sin\psi\}^n\sin m\psi\sin p\chi\,\partial\psi\,\partial\chi,\end{cases}$$

wo $v_m^{(p)}=v_p^{(m)}$ und $w_m^{(p)}=w_p^{(m)}$, so ist

$$\frac{U_{n,m}(\varrho',\varrho)}{\varrho'^m}=\frac{1}{\pi b^n c^n}\left\{\tfrac{1}{2}v_0^{(0)}(\varrho)+\sum_{m=1}^{m=n}\cos p\chi\, v_m^{(p)}(\varrho)\right\},$$
$$\frac{W_{n,m}(\varrho',\varrho)}{\varrho'^m}=\frac{1}{\pi b^n c^n}\sum_{m=1}^{m=n}\sin p\chi\, w_m^{(p)}(\varrho),$$

also, nimmt man bei der Summation für $p=0$ die Hälfte,

$$\frac{P_n[Y]}{\varrho^m}=\sum_{m=0}^{m=n}\frac{4^{n-1}}{n^2 b^n c^n(\Pi 2n)^2}a_{n,m}g_{n,m}^{\prime 2}\sum_{p=0}^{p=n}\{\cos p\chi\, v_m^{(p)}(\varrho)\,U_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)$$
$$+\sin p\chi\, w_m^{(p)}(\varrho)\,W_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)\}.$$

Setzt man $\frac{n^2 b^n c^n(\Pi 2n)^2}{4^{n-1}}=t$, so erhält man endlich

$$T_n=\sum_{m=0}^{m=n}a_{n,m}g_{n,m}^{\prime 2}\{U_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)\sum_{p=0}^{p=n}\alpha_p v_m^{(n)}(\varrho)+W_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)\sum_{p=1}^{p=n}\beta_p w_m^{(p)}(\varrho)\}.$$

Sind die Constanten α und β so bestimmt, dafs für $\varrho=\varrho_0$ auch $T_n=X_n^0$, so ist $V=\sum_{n=0}^{n=\infty}T_n$ der gesuchte Wärmezustand. Um zu zeigen, worauf diese Bedingung hinauskommt, führe ich für die ϱ_1 und ϱ_2 wiederum θ und φ ein; dann ist $\left(\text{da } U_{n,m}(\varrho_1,\varrho_2)=\frac{\Pi 2n}{g_{n,m}}\cdot\frac{n}{2^{n-1}}P_{n,m}[\cos\theta]\cos m\varphi\right)$

$$(22.)\quad T_n=\sum_{m=0}^{m=n}a_{n,m}g'_{n,m}P_{n,m}[\cos\theta]\{\cos m\varphi\sum_{p=0}^{p=n}\alpha_p v_m^{(p)}(\varrho)+\sin m\varphi\sum_{p=0}^{p=n}\beta_p w_m^{(p)}(\varrho)\},$$

wenn man die constanten Factoren wegläfst, in welchen m nicht vorkommt. Andrerseits hat $X_n^{(0)}$ die Form

$$X_n^0=\sum_{m=0}^{m=n}a_{n,m}\{g_{n,m}\cos m\varphi+h_{n,m}\sin m\varphi\}P_{n,m}[\cos\theta].$$

Setzt man also für X_n^0 seinen Werth aus §. 2., so wird

$$(23.)\quad\begin{cases} g_{n,m}=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\partial\theta'\sin\theta' P_{n,m}[\cos\theta']\int_0^{2\pi}f(\theta',\varphi')\cos m\varphi'\,\partial\varphi',\\ h_{n,m}=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\partial\theta'\sin\theta' P_{n,m}[\cos\theta']\int_0^{2\pi}f(\theta',\varphi')\cos m\varphi'\,\partial\varphi'.\end{cases}$$

Soll demnach für $\varrho=\varrho_0$, T_n sich in X_n^0 verwandeln, so hat man die α und β aus den linearen Gleichungen

$$(24.)\quad \sum_{p=0}^{p=n}\alpha_p v_m^{(p)}(\varrho_0)=\frac{g_{n,m}}{g'_{n,m}};\quad \sum_{p=1}^{p=n}\beta_p w_m^{(p)}(\varrho_0)=\frac{h_{n,m}}{g'_{n,m}}$$

zu bestimmen, wo

$$(25.)\quad \frac{1}{g'_{n,m}}=\frac{i^m}{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}\text{ ist.}$$

Sind hieraus die α und β gefunden, so substituire man ihre Werthe in (22.); dies giebt schliefslich $V=\sum_{n=0}^{n=\infty}T_n$, als den verlangten Wärmezustand eines Punctes, dessen Coordinaten ϱ, ϑ, φ sind. Wir haben demnach nur noch zu beweisen, dafs die Systeme von linearen Gleichungen (24.) möglich sind.

§. 7.

Über die linearen Gleichungen in §. 6.

Jedes der beiden Systeme linearer Gleichungen im vorhergehenden Paragraphen zerfällt wiederum in zwei andere, indem offenbar $v_m^{(p)}$ und $w_m^{(p)}$ verschwinden, wenn nicht m und p zugleich gerade oder zugleich ungerade sind. Wir haben daher statt der Gleichungen (24.) vier Systeme zu lösen. Ist das Argument der v und w, welches der Kürze wegen weggelassen werden soll, ϱ_0, so hat man

A) wenn n gerade ist,

$$1)\quad \alpha_0 v_0^{(0)}+\alpha_2 v_2^{(0)}+\dots+\alpha_n v_n^{(0)}=\frac{g_{n,0}}{g'_{n,0}},\qquad 2)\quad \alpha_1 v_1^{(1)}+\alpha_3 v_3^{(1)}+\dots+\alpha_{n-1} v_{n-1}^{(1)}=\frac{g_{n,1}}{g'_{n,1}},$$

$$\alpha_2 v_0^{(2)}+\alpha_2 v_2^{(2)}+\dots+\alpha_n v_n^{(2)}=\frac{g_{n,2}}{g'_{n,2}},\qquad \alpha_1 v_1^{(3)}+\alpha_3 v_3^{(3)}+\dots+\alpha_{n-1} v_{n-1}^{(3)}=\frac{g_{n,3}}{g'_{n,3}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_n v_0^{(n)}+\alpha_2 v_2^{(n)}+\dots+\alpha_n v_n^{(n)}=\frac{g_{n,n}}{g'_{n,n}};\qquad \alpha_1 v_1^{(n-1)}+\alpha_3 v_3^{(n-1)}+\dots+\alpha_{n-1} v_{n-1}^{(n-1)}=\frac{g_{n,n-1}}{g'_{n,n-1}};$$

$$3)\quad \beta_2 w_2^{(2)}+\beta_4 w_4^{(2)}+\dots+\beta_n w_n^{(2)}=\frac{h_{n,2}}{g'_{n,2}},\qquad 4)\quad \beta_1 w_1^{(1)}+\beta_3 w_3^{(1)}+\dots+\beta_{n-1} w_{n-1}^{(1)}=\frac{h_{n,1}}{g'_{n,1}},$$

$$\beta_2 w_2^{(4)}+\beta_4 w_4^{(4)}+\dots+\beta_n w_n^{(4)}=\frac{h_{n,4}}{g'_{n,4}},\qquad \beta_1 w_1^{(3)}+\beta_3 w_3^{(3)}+\dots+\alpha_{n-1} w_{n-1}^{(3)}=\frac{h_{n,3}}{g'_{n,3}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots$$

$$\beta_2 w_2^{(n)}+\beta_4 w_4^{(n)}+\dots+\beta_n w_n^{(n)}=\frac{h_{n,4}}{g'_{n,4}};\qquad \beta_1 w_1^{(n-1)}+\beta_3 w_3^{(n-1)}+\dots+\beta_{n-1} w_{n-1}^{(n-1)}=\frac{h_{n,n-1}}{g'_{n,n-1}};$$

B) wenn n ungerade ist, ergeben sich gleichfalls vier Systeme von Gleichungen, aus welchen der Reihe nach $\alpha_0, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$; $\alpha_1, \alpha_3, \dots \alpha_n$; $\beta_2, \beta_4, \dots \beta_{n-1}$; $\beta_1, \beta_3, \dots \beta_n$ bestimmt werden

Vorausgesetzt dafs $f(\theta, \varphi)$ reell ist, so werden die α und β mit ungeradem m von der Form Pi sein, wenn P eine reelle Gröfse bezeichnet; woraus hervorgeht, dafs der Ausdruck von T, ungeachtet des imaginairen Werthes von $g'_{n,m}$, reell wird. Hat man die α und β gefunden, nachdem man für g, h, g' die Werthe aus (23.) und (25.) gesetzt hat, so findet sich, wenn man für $m=0$ die Hälfte nimmt,

$$(26.)\qquad V = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=n}\sum_{p=0}^{p=n}\{1.3.5\dots(2n-1)\}^2 i^{-m} P_{n,m}[\cos\theta]$$
$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\varrho+\sqrt{(\varrho^2-b^2)}\cos\chi\cos\psi+\sqrt{(\varrho^2-c^2)}\sin\chi\sin\psi\}^n(\alpha_p\cos p\psi+\beta_p\sin p\psi)\cos m(\varphi-\chi)\,\partial\psi\,\partial\chi.$$

Ist $b=c=1$, so verschwindet $v_m^{(p)}$ und $w_m^{(p)}$, wenn nicht $m=p$ ist, und man hat aus (24.)

$$\alpha_m = \frac{g_{n,m}}{g'_{n,m}\, v_m^{(m)}(\varrho_0)}, \qquad \beta_m = \frac{h_{n,m}}{g'_{n,m}\, w_m^{m}(\varrho_0)}.$$

Da ferner

$$2\,\frac{i^{-m}.\{1.3.5\ldots.(2n-1)\}^2}{g'_{n,m}} = a_{n,m} \text{ und}$$

$$\frac{v_m^{(m)}(\varrho)}{v_m^{(m)}(\varrho_0)} = \frac{w_m^{(m)}(\varrho)}{w_m^{m}(\varrho_0)} = \frac{P_{n,m}[\varrho]}{P_{n,m}[\varrho_0]} \text{ ist,}$$

so geht diese Formel in die (15.) meiner früheren Abhandlung über (wie es auch sein mufs), wenn man bemerkt, dafs das dortige $\sqrt{(\varrho^2-1)}$ hier ϱ ist.

Wenn gleich es mir nicht gelungen ist, die linearen Gleichungen ohne Gebrauch der Determinanten allgemein aufzulösen, so läfst sich doch zeigen, dafs sie sich immer durch dieselben vollständig auflösen lassen; und zwar werde ich den Beweis für ein beliebiges System von den zweimal vier führen, z. B. für das Nr. 1. unter *A*. Zur Bequemlichkeit bezeichne ich in diesem Paragraphen durch m und p *gerade* Zahlen, und setze

$$J_p^{(m)} = \int_0^{2\pi} U_{n,p}(\varrho', \varrho_0)\, U_{n,m}(\varrho', \varrho_0)\, \frac{d\chi}{\varrho'^{2n}}.$$

Alsdann kann man das System

$$\begin{aligned}
\lambda_0 J_0^{(0)} + \lambda_2 J_2^{(0)} + \ldots + \lambda_n J_n^{(0)} &= 0,\\
\lambda_0 J_0^{(2)} + \lambda_2 J_2^{(2)} + \ldots + \lambda_n J_n^{(2)} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
\lambda_n J_0^{(n)} + \lambda_2 J_2^{(n)} + \ldots + \lambda_n J_n^{(n)} &= 0
\end{aligned}$$

blofs dadurch auflösen, dafs alle λ gleich Null gesetzt werden. In der That, wenn für jedes p

$$\sum_{m=0}^{m=n} \lambda_m J_m^{(p)} = \int_0^{2\pi} U_{n,p}(\varrho', \varrho_0) \sum_{m=0}^{m=n} \lambda_m U_{n,m}(\varrho', \varrho_0)\, \frac{d\chi}{\varrho'^{2n}} = 0$$

ist, so ist auch

$$\sum_{m=0}^{m=n} \sum_{p=0}^{p=n} \lambda_m \lambda_p J_m^{(p)} = \int_0^{2\pi} \Big\{\sum_{m=0}^{m=n} \lambda_m U_{n,m}(\varrho', \varrho_0)\Big\}\, \frac{d\chi}{\varrho'^{2n}} = 0,$$

also für jedes ϱ'

$$\sum_{m=0}^{m=n} \lambda_m U_{n,m}(\varrho', \varrho_0) = 0;$$

welches nach §. 3. nicht anders möglich ist, als wenn alle λ verschwinden

Es ist daher

$$\Sigma \pm J\, J_2^{(2)}\, J_4^{(4)} \ldots J_n^{(n)}$$

von 0 verschieden. Andrerseits ist

$$\frac{b^n c^n \pi}{\varrho'^n} U_{n,m}(\varrho', \varrho_0) = \tfrac{1}{2} v_m^{(1)} + v_m^{(2)} \cos 2\chi + v_m^{(4)} \cos 4\chi + \ldots + v_m^{(n)} \cos n\chi,$$

$$\frac{b^n c^n \pi}{\varrho'^n} U_{n,m}(\varrho', \varrho_0) = \tfrac{1}{2} v_p^{(1)} + v_p^{(2)} \cos 2\chi + v_p^{(4)} \cos 4\chi + \ldots + v_p^{(n)} \cos n\chi,$$

also ist

$$J_m^{(p)} = J_p^{(m)} = b^{-2n} c^{-2n} \pi^{-1} \{\tfrac{1}{2} v_m^{(1)} v_p^{(1)} + v_m^{(2)} v_p^{(2)} + \ldots + v_m^{(n)} v_p^{(n)}\}.$$

Nach den Sätzen über die Zerlegung der Determinanten folgt aus dieser Gleichung, dafs $(\Sigma \pm v\, v_2^{(2)} \ldots v_n^{n})^2$, oder dafs

$$\Sigma \pm v\, v_2^{(2)} v_4^{(4)} \ldots v_n^{(n)}$$

nicht verschwindet.

In §. 3. ist bemerkt worden, dafs die Aufgabe, eine ganze rationale Function P von $\varrho_1 \varrho$, $\sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)}\sqrt{(\varrho^2 - b^2)}$, $\sqrt{(c^2 - \varrho_1^2)}\sqrt{(\varrho^2 - c^2)}$ zu finden, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \varepsilon_1^2} + n(n+1)(\varrho_1^2 - \varrho^2)\mathrm{P} = 0$$

genügt und für $\varrho = \varrho_0$ in eine gegebene Function von ϱ_1 übergeht, die ich mit $F(\varrho_1)$ bezeichnen will (wo natürlich $F(\varrho_1)$ nicht ganz willkürlich gegeben sein kann), auf Systeme linearer Gleichungen führt. In der That erhält man, da P die Form

$$\mathrm{P} = \sum_{q=0}^{q=n} (g_q U_{n,q}(\varrho_1, \varrho) + h_q W_{n,q}(\varrho_1, \varrho))$$

haben mufs, die Gleichung

$$\sum_{q=0}^{q=n} (g_q U_{n,q}(\varrho_1, \varrho_0) + h_{n,q} W_{n,q}(\varrho_1, \varrho_0)) = F(\varrho_1).$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit ϱ^n und setzt

$$\cos\chi = \frac{c\sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)}}{\varrho_1 \sqrt{(c^2 - b^2)}}, \qquad \sin\chi = \frac{b\sqrt{(c^2 - \varrho_1^2)}}{\varrho_1 \sqrt{(c^2 - b^2)}},$$

woraus

$$\frac{b^2 c^2}{\varrho_1^2} = b^2 \cos^2\chi + c^2 \sin^2\chi$$

hervorgeht, so wird

$$\int_0^{2\pi} (\varrho_0 + \sqrt{(\varrho_0^2 - b^2)} \cos\chi \cos\psi + \sqrt{(\varrho_0^2 - c^2)} \sin\chi \sin\psi)^n \sum_{q=0}^{q=n} (g_q \cos q\psi + h_q \sin q\psi)\, d\psi$$
$$= (b^2 \cos^2\chi + c^2 \sin^2\chi)^{\frac{1}{2}n} F\left(\frac{bc}{\sqrt{(b^2 \cos^2\chi + c^2 \sin^2\chi)}}\right),$$

so dafs man

$$(27.) \begin{cases} \sum_{q=0}^{q=n} g_q v_q^{(r)}(\varrho_0) = \int_0^{2\pi} (b^2 \cos^2\chi + c^2 \sin^2\chi)^{\frac{1}{2}n} F\left(\frac{bc}{\sqrt{(b^2 \cos^2\chi + c^2 \sin^2\chi)}}\right) \cos r\chi\, d\chi, \\ \sum_{q=0}^{q=n} h_q w_q^{(r)}(\varrho_0) = \int_0^{2\pi} (b^2 \cos^2\chi + c^2 \sin^2\chi)^{\frac{1}{2}n} F\left(\frac{bc}{\sqrt{(b^2 \cos^2\chi + c^2 \sin^2\chi)}}\right) \sin r\chi\, d\chi \end{cases}$$

erhält, also zwei Systeme Gleichungen von der Form (24.), die demnach im



Anfange dieses Paragraphen schon behandelt sind. Da diese Gleichungen immer möglich sind, so ist klar, dafs wenn die Aufgabe, mit der wir uns jetzt beschäftigen, möglich sein soll, die Function F so beschaffen sein mufs, dafs

$$(b^2\cos^2\chi+c^2\sin^2\chi)^{\frac{1}{2}n}F\left(\frac{bc}{\sqrt{(b^2\cos^2\chi+c^2\sin^2\chi)}}\right)$$
$$=a_0+a_1\cos\chi+a_2\cos 2\chi+\ldots.+a_n\cos n\chi$$
$$+b_1\sin\chi+b_2\sin 2\chi+\ldots.+b_n\sin n\chi$$

ist; wo die a und b beliebige Constanten bedeuten.

Es ist also die Aufgabe, obige Systeme Gleichungen zu lösen, mit derjenigen gleichbedeutend, P aus den gegebenen Bedingungen zu finden; die Lösung der einen giebt sogleich die der andern. Für einzelne besondere Fälle von $F(\rho)$, z. B. wenn

$$F(\rho_1)=\left(\frac{\rho_0\rho_1}{bc}+\frac{\sqrt{(\rho_1^2-b^2)}\sqrt{(\rho_0^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}\cos\psi+\frac{\sqrt{(c^2-\rho_1^2)}\sqrt{(\rho_0^2-c^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\sin\psi\right)^n$$

ist, wo ψ einen beliebigen Winkel bedeutet, kann man freilich P finden (in letzterem Falle entsteht es aus $F(\rho_1)$, wenn man darin ρ_0 mit ρ vertauscht), jedoch bleibt die Aufgabe im Allgemeinen noch ungelöset, während bei den Rotations-Ellipsoïden die Möglichkeit, die in der Anmerkung zu §. 3. aufgestellte Frage zu beantworten, die für diesen Fall bekannte Lösung verschafft.

§. 8.

Einige Bemerkungen über den Zusammenhang der E mit den U und W.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dafs die Producte $E(\rho_1).E(\rho_2)$ linear aus den U oder W bestehen, so dafs man für einige derselben

$$E_{n,m}(\rho_1)E_{n,m}(\rho_2)=\sum_{m=0}^{m=n}g_m U_{n,m}(\rho_1,\rho_2),$$

für andere

$$E_{n,m}(\rho_1)E_{n,m}(\rho_2)=\sum_{m=0}^{m=n}h_m W_{n,m}(\rho_1,\rho_2)$$

hat, wo die g und h constante Werthe bezeichnen (einige von ihnen können auch 0 sein). Ebenso sieht man, dafs die E aus den v oder w zusammengesetzt sind, so dafs sie die Form

$$E_{n,m}(\rho_1)=\sum_{m=0}^{m=n}\sum_{p=0}^{p=n}g_{m,p}v_{m,p}(\rho_1)\quad\text{oder}\quad E_{n,m}(\rho_1)=\sum_{m=0}^{m=n}\sum_{p=0}^{p=n}h_{m,p}w_{m,p}(\rho_1)$$

haben, wo die g und h wiederum Constanten bezeichnen.

In dem Endausdruck für einen partiellen Wärmezustand bei *Lamé* erscheint als Nenner ein Doppel-Integral, von welchem *Lamé* zeigt, dafs es sich ohne andere Transcendenten als π ausführen läfst. Um zu zeigen, welche

…olle dieses Integral spiele, setze ich dasselbe gleich $A_{n,m}$, und habe also

$$(28.)\quad A_{n,m} = \int_0^b\int_b^c \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\{E_{n,m}(\varrho_1)E_{n,m}(\varrho_2)\}^2}{\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho_2^2)}\sqrt{(c^2-\varrho_1^2)}\sqrt{(c^2-\varrho_2^2)}}\,d\varrho_1\,d\varrho_2.$$

Es sollen hier, wie bei *Lamé*, nur solche $A_{n,n}$ betrachtet werden, aus E entstehend, welche nur gerade Potenzen von ϱ_1 und ϱ_2 enthalten und rational nach ϱ_1 und ϱ_2 sind.

Nun ist klar, dafs

$$(29.)\quad P_n[Y] = \sum_{m=0}^{m=2n+1} f_{n,m}E_{n,m}(\varrho)E_{n,m}(\varrho')E_{n,m}(\varrho_1)E_{n,m}(\varrho_2),$$

wenn ϱ, ϱ' etc. in beliebigen Grenzen liegen. Macht man Y, wenn man darin ϱ_1 und ϱ_2 mit ϱ_1' und ϱ_2' vertauscht, gleich Y', und setzt

$$\frac{\varrho_1\varrho_2}{bc}.\frac{\varrho_1'\varrho_2'}{bc}+\frac{\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho_2^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}.\frac{\sqrt{(\varrho_1'^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho_2'^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}+\frac{\sqrt{(c^2-\varrho_1^2)}\sqrt{(c^2-\varrho_2^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}.\frac{\sqrt{(c^2-\varrho_1'^2)}\sqrt{(c^2-\varrho_2'^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}:$$

so ist

$$(30.)\quad \int_0^b\int_b^c \frac{P_n^{(\mu)}[Y']\,P_n^{(\mu)}[Z](\varrho_1'^2-\varrho_2'^2)}{\sqrt{(\varrho_1'^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho_2'^2)}\sqrt{(c^2-\varrho_1'^2)(c^2-\varrho_2'^2)}}\,\partial\varrho_1'\,\partial\varrho_2'$$
$$= \sum_{m=0}^{m=2n+1} f_{n,m}^2 A_{n,m}E_{n,m}^{(\mu)}(\varrho)E_{n,m}^{(\mu)}(\varrho')E_{n,m}^{(\mu)}(\varrho_1)E_{n,m}^{(\mu)}(\varrho_2),$$

wo der den P und den E angehängte Index μ bezeichnet, dafs nur *die* E und nur *der* Theil von P genommen werden sollen, welche nach ϱ_1 und ϱ_2 rational sind und nur gerade Potenzen von ϱ_1 und ϱ_2 enthalten.

Transformirt man das Integral links in (30.) und setzt dazu

$$\frac{\varrho_1'\varrho_2'}{bc}=\cos\theta',\quad \frac{\sqrt{(\varrho_1'^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho_2'^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}=\sin\theta'\cos\varphi',\quad \frac{\sqrt{(c^2-\varrho_1'^2)}\sqrt{(c^2-\varrho_2'^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}=\sin\theta'\sin\varphi',$$

$$t=\frac{\varrho\varrho'}{bc}.\cos\theta'+\frac{\sqrt{(\varrho'^2-b^2)}\sqrt{(b^2-\varrho^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}.\sin\theta'\cos\varphi'+\frac{\sqrt{(c^2-\varrho'^2)}\sqrt{(c^2-\varrho^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}.\sin\theta'\sin\varphi',$$

so erhält man nach (8.) für dasselbe

$$\tfrac{1}{4}.\int_0^\pi\partial\theta'\sin\theta'\int_0^{2\pi}P_n[t]\,P_n[\cos\gamma]\,\partial\varphi'.$$

Andrerseits ist dieser Ausdruck nach (7.) $=\frac{\pi}{2(2n+1)}P_n[Y]$, so dafs, wenn man für $P_n[Y]$ seine Entwicklung aus (28.) setzt, die Gleichung

$$\frac{\pi}{2(2n+1)}f_{n,m}=f_{n,m}^2A_{n,m}\quad\text{oder}\quad A_{n,m}=\frac{\pi}{2(2n+1)f_{n,m}}\ \text{entsteht.}$$

Es ist demnach der bei *Lamé* vorkommende Factor $\frac{1}{A_{n,m}}$, wo $A_{n,m}$ durch (28.) definirt wird, gleich $\frac{2(2n+1)}{\pi}$ multiplicirt in den Factor $f_{n,m}$, der bei der Entwicklung von $P_n[Y]$ in der Form der Gleichung (29.) entsteht.

Berlin, den 19. April 1844.

10.

Additamentum ad functionis $\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}.x^{a-1}\partial x$ theoriam.

(Auctore Dr. *Chr. Gudermann*, prof. math. ordin. Monast. Guestph.)

Functionem $\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}.x^{a-1}\partial x$ (sive $\Pi(a-1)$ secundum *Gaussii* significationem) inde ab *Eulero* saepius pertractatam a Geometris celeberrimis anno modo praeterito felicissime perscrutatus est *Bern. Jos. Féaux*, Philosoph. Dr. et superioris magisterii candidatus illustris in dissertatione inaugurali mathematica, cui titulus: „De functione, quae littera $\Gamma(\,)$ obsignatur, sive de integrali *Euleriano* secundae speciei; Monasterii typis Coppenrathianis." Invenit inter alia formulam sive seriem, quae infinite multas continet series infinitas, et quidem hanc

$$(1.)\quad \Gamma(a)=\tfrac{1}{2}\log 2\pi-a+(a-\tfrac{1}{2})\log a+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\dots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3.4}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+2)^3}+\dots\right)$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4.5}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{(a+1)^4}+\frac{1}{(a+2)^4}+\dots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5.6}\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{(a+1)^5}+\frac{1}{(a+2)^5}+\dots\right)$$
$$+\text{ etc.},$$

cui calculum functionis numericum superstruendum esse voluit, quod vero negotium, quia series tarde convergunt, non sine molestiis peragetur. Quam ego seriem alio disposui ordine, ut singulae series infinitae, quibus illa constat, summari queant, quod contigit adiumento formulae

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{2}{3.4}\cdot\frac{1}{a^3}+\frac{3}{4.5}\cdot\frac{1}{a^4}-\frac{4}{5.6}\cdot\frac{1}{a^5}+\frac{5}{6.7}\cdot\frac{1}{a^6}-\frac{6}{7.8}\cdot\frac{1}{a^7}+-\dots\right)$$
$$=(a+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-1.$$

Hoc modo oritur series simpliciter infinita convergens, quemcunque valorem argumento a tribuas, ideoque ad calculum propositum absolvendum expeditissime

$$(2.)\quad \log\Gamma(a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - a + (a-\tfrac{1}{2})\log a + (a+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{a}\right) - 1$$
$$+ (a+\tfrac{3}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+1}\right) - 1$$
$$+ (a+\tfrac{5}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+2}\right) - 1$$
$$+ (a+\tfrac{7}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+3}\right) - 1$$
$$+ \text{etc.}$$

in qua logarithmi obvii sunt naturales. Si vis concedere locum nonnisi logarithmis vulgaribus, sive Briggicis, adhibeas formulam

$$(3.)\quad \log\Gamma(a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \mu a + (a-\tfrac{1}{2})\log a + (a+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{a}\right) - \mu$$
$$+ (a+\tfrac{3}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+1}\right) - \mu$$
$$+ (a+\tfrac{5}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+2}\right) - \mu$$
$$+ (a+\tfrac{7}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+3}\right) - \mu$$
$$+ \text{etc.}$$

in qua est $\mu = 0{,}43429448190$. Si functionis argumentum a in formula (2.) unitate augetur, series abit in similem

$$\log\Gamma(a+1) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - (a+1) + (a+\tfrac{1}{2})\log(a+1) + (a+\tfrac{3}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+1}\right) - 1$$
$$+ (a+\tfrac{5}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+2}\right) - 1$$
$$+ \text{etc.},$$

quae vero, quia $\log(a+1) = \log a + \log\left(1+\frac{1}{a}\right)$ est, ita disponi potest:

$$(4.)\quad \log\Pi(a) =$$
$$\log\Gamma(a+1) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi - a + (a+\tfrac{1}{2})\log a + (a+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{a}\right) - 1$$
$$+ (a+\tfrac{3}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+1}\right) - 1$$
$$+ (a+\tfrac{5}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+2}\right) - 1$$
$$+ (a+\tfrac{7}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+3}\right) - 1$$
$$+ \text{etc.}$$

Si aequationem (2.) subtrahis ab hac, remanet aequatio simplex notissima $\log\Gamma(a+1) - \log\Gamma(a) = \log a$, sive

$$\Gamma(a+1) = a.\Gamma(a),$$

unde perspicis, formulas (1.) et (2.) esse revera eas, ut functionis naturae, quam exprimit formula $\Gamma(a+1)=a.\Gamma(a)$, egregie satisfaciant.

Formula (4.) in primis saltem terminis congruit cum formula notissima *Gaussiana*, vel si mavis, *Euleriana*

$$\log\Pi(a)=\tfrac{1}{2}\log 2\pi-a+(a+\tfrac{1}{2})\log a+\frac{\overset{1}{B}}{1.2.a}-\frac{\overset{2}{B}}{3.4.a^3}+\frac{\overset{3}{B}}{5.6.a^5}-\frac{\overset{4}{B}}{7.8.a^7}+-\ldots,$$

at in eo longe ab ipsa discrepat, quod in reliquis terminis deest potentia $\frac{1}{a}$, quam in hac continet terminus $\frac{\overset{1}{B}}{1.2.a}$; qua e re gravissimi momenti, ut alia silentio praeteream, coniiciendum esse videtur, alterutram formulam esse falsam. Si formulae (4.) vis inesse logarithmos vulgares loco naturalium, ipsam mutabis in

$$(5.)\quad \log\Pi(a) =$$

$$\begin{aligned}\log\Gamma(a+1) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi-\mu a+(a+\tfrac{1}{2})\log a&+(a+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-\mu\\ &+(a+\tfrac{3}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+1}\right)-\mu\\ &+(a+\tfrac{5}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+2}\right)-\mu\\ &+(a+\tfrac{7}{2})\log\left(1+\frac{1}{a+3}\right)-\mu\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

Formulae prolatae novae eo magis convergunt, quo maius sit argumentum a, at semper convergunt, quicunque argumento a tribuatur valor, quam eximiam proprietatem formulae modo dictae *Gaussianae* deesse notissimum est. Si obsignationem a celeberrimo *Gaussio* nuncupatam ulterius prosequimur, et $\frac{\partial\log\Pi a}{\partial a}=\Psi(a)$ ponimus, aequatio (4.) illico praebet formulam novam

$$\begin{aligned}(6.)\quad \Psi(a) = \log a+\frac{1}{2a}&+\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{2a+1}{2a(a+1)}\\ &+\log\left(1+\frac{1}{a+1}\right)-\frac{2a+3}{2(a+1)(a+2)}\\ &+\log\left(1+\frac{1}{a+2}\right)-\frac{2a+5}{2(a+2)(a+3)}\\ &+\log\left(1+\frac{1}{a+3}\right)-\frac{2a+7}{2(a+3)(a+4)}\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

in qua est

$$\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{2a+1}{2a(a+1)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{a^3}-\frac{2}{4}.\frac{1}{a^4}+\frac{3}{5}.\frac{1}{a^5}-\frac{4}{6}.\frac{1}{a^6}+\frac{5}{7}.\frac{1}{a^7}-+\dots\right),$$

et quae satisfacit aequationi notae

$$\Psi(a+1) = \Psi(a)+\frac{1}{a+1}.$$

Quia $\frac{2a+1}{2a(a+1)}=\frac{1}{2}.\frac{1}{a}+\frac{1}{2}.\frac{1}{a+1}$ et pari modo omnes fractiones subtractivae decomponi possunt, series etiam hoc modo se habet

$$\begin{aligned}\Psi(a) = \log(a+k)-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}-\dots-\frac{1}{a+k-1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{a+k}\\ +\log\left(1+\frac{1}{a+k}\right)-\frac{1}{2}.\frac{2a+2k+1}{(a+k)(a+k+1)}\\ +\log\left(1+\frac{1}{a+k+1}\right)-\frac{1}{2}.\frac{2a+2k+3}{(a+k+1)(a+k+2)}\\ +\log\left(1+\frac{1}{a+k+2}\right)-\frac{1}{2}.\frac{2a+2k+5}{(a+k+2)(a+k+3)}\\ +\text{ etc.};\end{aligned}$$

quare vides, functionem $\Psi(a)$ esse limitem expressionis

$$\log(a+k)-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+k-1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{a+k}$$

crescente numero positivo k in infinitum.

Scriptum die 9 Februarii 1845.

11.

Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.

(Auctore *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Berol.)

(Cont. dissert. No. 16. tom. XXVII. fasc. III.)

Caput tertium.

Theoria Multiplicat .is systematis aequationum differentialium ad varia exempla applicata.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium cuiuslibet ordinis.

§. 14.

Aequationum differentialium systema, quo altissima quaeque variabilium dependentium differentialia per differentialia inferiora ipsasque variabiles exprimuntur, constat in systema redire aequationum differentialium primi ordinis, si cuiusque variabilis dependentis differentialia altissimo inferiora ipsis variabilibus adscribantur. Designantibus enim x, y etc. variabilis independentis t functiones, proponantur inter t, x, y etc. aequationes differentiales,

$$1. \quad \frac{d^p x}{dt^p} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B, \text{ etc.}$$

ipsaeque A, B etc. non altioribus afficiantur differentialibus quam $(p-1)^{\text{to}}$ ipsius x, $(q-1)^{\text{to}}$ ipsius y etc. Patet, habendo pro novis variabilibus dependentibus differentialia, quae *Lagrangiano* more per indices denoto,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dots \quad x^{(p-1)} = \frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}},$$

$$y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \dots \quad y^{(q-1)} = \frac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}, \text{ etc.},$$

aequationibus differentialibus (1.) has alias substitui posse *primi* ordinis:

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} dt : dx : dx' \dots : dx^{(p-2)} : dx^{(p-1)} \\ \quad : dy : dy' \dots : dy^{(q-2)} : dy^{(q-1)} \text{ etc.} \\ = 1 : x' : x'' \dots : x^{(p-1)} : A \\ \quad : y' : y'' \dots : y^{(q-1)} : B \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Quibus in aequationibus variabilium numerus summam ordinum altissimorum differentialium in (1.) unitate superat.

Multiplicator aequationum differentialium primi ordinis (2.), cum quibus aequationes differentiales (1.) conveniunt, etiam a me in sequentibus appellabitur aequationum (1.) Multiplicator. Unde ut omnia theoremata de Multiplicatore aequationum differentialium primi ordinis in duobus Capitibus praecedentibus in medium prolata ad Multiplicatores aequationum differentialium cuiuslibet ordinis (1.) applicentur, sufficit ut pro aequationibus ibi propositis,

$$3. \quad dx : dx_1 : dx_2 \ldots . : dx_n = X : X_1 : X_2 \ldots . : X_n,$$

sumantur aequationes (2.).

Si aequationes differentiales primi ordinis (2.) et (3.) inter se comparamus, videmus in illis specialitatem quandam formae locum habere, videlicet quantitates primis differentialibus proportionales, quae generaliter variabilium functiones sunt, maximam partem in ipsas abire variabiles, neque vero in eas quarum differentialibus proportionales ponuntur. Quo habitu speciali fit ut aequationum (2.) Multiplicator, quem aequationum (1.) quoque Multiplicatorem voco, definiatur formula quae, tantopere licet aucto in (2.) variabilium numero, non pluribus constat terminis, quam si ipsae primi ordinis fuissent aequationes differentiales propositae (1.). Consideremus enim formulam ad definiendum aequationum (3.) Multiplicatorem propositam §. 7. (4.),

$$(4.) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \ldots . + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = -X \frac{d \log M}{dx}.$$

Si pro aequationibus (3.) sumimus aequationes (2.) fit $x = t$, $X = 1$; porro variabilibus x_1, x_2 etc. substituendae sunt

$$x, x', x'', \ldots . x^{(p-2)}, x^{(p-1)},$$
$$y, y', y'', \ldots . y^{(q-2)}, y^{(q-1)}, \text{ etc.};$$

functionibus denique X_1, X_2 etc. substituendae sunt quantitates

$$x', x'', x''', \ldots . x^{(p-1)}, A,$$
$$y', y'', y''', \ldots . y^{(q-1)}, B, \text{ etc.}$$

Iam in (4.), quoties est X_i una e variabilibus x, x_1, x_2 etc., ab ipsa x_i diversa, evanescit terminus $\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$, uti generaliter fit si functio X_i ipsam x_i non implicat. Unde sumendo pro (3.) aequationes (2.), abit aggregatum (4.) in hanc expressionem simplicem,

$$5. \quad \frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} + \text{etc.} = -\frac{d \log M}{dt}.$$

Hac formula Multiplicator M definitur systematis aequationum differentialium cuiuslibet ordinis (1.).

Sequitur e (5.), quoties simul ipsum A a differentiali $(p-1)^{to}$ ipsius x, ipsum B a differentiali $(q-1)^{to}$ ipsius y etc. vacuum sit, sive generalius, *quoties aggregatum*

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} \text{ etc.}$$

identice evanescat, statui posse $M = 1$. Si aggregatum (5.) non identice evanescit, ad indagandum Multiplicatorem circumspiciendum erit differentiale completum, cui idem aggregatum sua sponte vel etiam per aequationes differentiales propositas aequetur.

Principium ultimi Multiplicatoris systemati aequationum differentialium cuiuslibet ordinis applicatum.

§. 15.

Aequationum differentialium propositarum (1.) §. pr. Integralibus praeter unum omnibus inventis, quantitates

$$(A.) \quad \begin{cases} t,\ x,\ x',\ \ldots\ldots\ x^{(p-1)}, \\ y,\ y',\ \ldots\ldots\ y^{(q-1)} \text{ etc.} \end{cases}$$

omnes exprimere licet per duas u et v, pro quibus sumere licet binas e quantitatibus (A.) vel earum functiones quaslibet. Differentialia $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, substituendo differentialibus $x^{(p)}$, $y^{(q)}$ etc. si opus est valores A, B etc., et ipsa aequantur quantitatum t, x, x' etc. functionibus. Quae functiones, Integralium inventorum ope per u et v expressae, si denotantur per

$$U = \frac{du}{dt}, \qquad V = \frac{dv}{dt},$$

dabitur inter u et v aequatio differentialis primi ordinis, ultima quae integranda restat,

$$1. \qquad V du - U dv = 0.$$

Secundum ea quae §. 11. tradidi, cognito aequationum differentialium propositarum Multiplicatore M erui potest factor N qui eius ultimae aequationis differentialis (1.) laevam partem efficiat differentiale completum, quem *ultimum Multiplicatorem* appello. *Habendo enim, quod per Integralia inventa licet, quantitates (A.) pro functionibus ipsarum u et v Constantiumque Arbitrariarum quas Integralia implicant, earumque functionum formando Determinans* $\varDelta$, *fit ultimus Multiplicator* $N = \varDelta . M$.

Principium ultimi Multiplicatoris, quod propositione antecedente continetur, etiam sic concipi potest,

diviso ultimae aequationis differentialis (1.) Multiplicatore per Determinans Δ, conditionem Eulerianam pro Multiplicatore valentem transformari in aliam conditionem ab Integralibus reductioni adhibitis independentem, cui formulandae sufficiant solae aequationes differentiales propositae.

Videlicet aequatio conditionalis, cui aequationis (1.) Multiplicator N satisfacere debet, fit

$$\frac{\partial . NU}{\partial u} + \frac{\partial . NV}{\partial v} = 0.$$

Quae ponendo

$$M = \frac{N}{\Delta}$$

et substituendo Constantibus Arbitrariis functiones quantitatum (A.) aequivalentes transformabitur in hanc,

$$\frac{d \log M}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} \text{ etc.} = 0,$$

cui formandae sufficiunt aequationes differentiales propositae (1.).

Sint $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ etc. aequationes integrales reductioni adhibitae binaeque aequationes quibus u et v ab ipsis t, x, x' etc. pendent, sive etiam aliae quaecunque aequationes cum illis aequivalentes: constat e Determinantium functionalium proprietatibus, *aequari Δ fractioni, cuius denominator sit functionum Π_1, Π_2 etc. Determinans formatum quantitatum (A.) respectu, numerator autem earundem functionum Determinans, quantitatum u et v Constantiumque Arbitrariarum respectu formatum.* Si pro u et v ipsae sumuntur t et x, pro aequationibus $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ etc. solae sumendae sunt aequationes integrales simulque t et x in binis Determinantibus formandis de numero variabilium tollendae sunt. Porro aequatio (1.) in hanc abit,

$$dx - V dt = 0,$$

ubi V est ipsius $\frac{dx}{dt}$ valor, Integralium inventorum ope per t et x expressus. Si aequationes $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ etc. inventae sunt per integrationem successivam, ita ut in quaque aequatione insequente, in qua nova accedit Constans Arbitraria, simul unius variabilis differentiale altissimum ad ordinem proxime inferiorem sit depressum, alterutrum Determinans in unicum terminum abit. Sic proposita unica aequatione differentiali n^{ti} ordinis inter t et x,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right),$$

integratione successiva inventae sint aequationes,

$$2. \quad \begin{cases} \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = f_1\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \ldots \dfrac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}, \alpha_1\right), \\ \dfrac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} = f_2\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \ldots \dfrac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}}, \alpha_1, \alpha_2\right), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dx}{dt} = f_{n-1}(t, x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}), \end{cases}$$

in quibus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ sunt Constantes Arbitrariae: simpliciter erit

$$\varDelta = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}},$$

cum alterum Determinans in ipsam unitatem abeat. Si functio f ab ipso $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ vacuum est, fit aequationis differentialis propositae Multiplicator $= 1$. Quo igitur casu hoc eruitur ultimum Integrale:

$$\int \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} \{dx - f_{n-1}(t, x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})\, dt\} = \text{Const.},$$

ubi quantitas sub integrationis signo, per t et x expressa, fit differentiale completum. Ut per solas t et x exprimatur valor producti

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}},$$

sufficit ut in eo *successive* substituantur differentialium $\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}, \frac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}}, \ldots \frac{dx}{dt}$ valores $f_2, f_3, \ldots f_{n-1}$.

Formula symbolica qua Multiplicator systematis aequationum differentialium impliciti definiri potest.

§. 16.

Aequationes differentiales, e quibus petantur altissimorum differentialium valores,

$$1 \qquad x^{(p)} = A, \qquad y^{(q)} = B, \quad \text{etc.}$$

ponamus forma dari implicita,

$$2. \qquad \varphi = 0, \qquad \psi = 0, \quad \text{etc.}$$

E quibus aequationibus ut eruantur valores differentialium partialium

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}}, \qquad \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}}, \quad \text{etc.},$$

quarum summa aequat ipsum $-\frac{d \log M}{dt}$, statuo

$$3.\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(p)}} = a, & \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(q)}} = a_1, \quad \text{etc.}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^{(p)}} = b, & \frac{\partial \psi}{\partial y^{(q)}} = b_1, \quad \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

nec non

$$4.\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(p-1)}} = \alpha, & \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(q-1)}} = \alpha_1, \quad \text{etc.}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^{(p-1)}} = \beta, & \frac{\partial \psi}{\partial y^{(q-1)}} = \beta_1, \quad \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

formoque aequationes

$$5.\quad \begin{cases} au + a_1 u_1 \text{ etc. } + \alpha v + \alpha_1 v_1 \text{ etc.} = 0, \\ bu + b_1 u_1 \text{ etc. } + \beta v + \beta_1 v_1 \text{ etc.} = 0. \end{cases}$$

Resolutione aequationum (5.) si determinantur u, u_1 etc. ut functiones lineares quantitatum v, v_1 etc., erit quod ex elementis calculi differentialis sequitur,

$$6.\quad \frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} = \frac{\partial u}{\partial v}, \quad \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} = \frac{\partial u_1}{\partial v_1}, \quad \text{etc.}$$

unde prodit

$$7.\quad d\log M = -\left\{\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \text{ etc.}\right\} dt.$$

Iam e formulis, quas de aequationum linearium resolutione et Determinantium proprietatibus tradidi, sequitur, *si in aequationibus linearibus* (5.) *ponatur*

$$8.\quad \begin{cases} \alpha\, dt = \delta a, & \alpha_1\, dt = \delta a_1, \quad \text{etc.}, \\ \beta\, dt = \delta b, & \beta_1\, dt = \delta b_1, \quad \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

fieri

$$9.\quad -\left\{\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \text{ etc.}\right\} dt = \delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots.$$

Unde formula, qua Multiplicator M definitur, proponi potest hac forma *symbolica*,

$$10.\quad d\log M = \delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots.$$

Cui formulae ea inest significatio ut variando per regulas notas ipsum $\lg \Sigma \pm a b_1 \ldots$ atque elementorum variationibus singulis substituendo valores (8.), obtineatur expressio ipsi $d\log M$ aequalis.

Si statuitur

$$11.\quad \begin{cases} \alpha\, dt - \lambda\, da = \Delta a, & \alpha_1\, dt - \lambda\, da_1 = \Delta a_1, \quad \text{etc.}, \\ \beta\, dt - \lambda\, db = \Delta b, & \beta_1\, dt - \lambda\, db_1 = \Delta b_1, \quad \text{etc. etc.}, \end{cases}$$

characteristicae δ substituendum est $\lambda d + \Delta$, unde abit (10.) in hanc formulam,

$$12.\quad d\log M = \lambda\, d.\log \Sigma \pm a b_1 \ldots. + \Delta.\log \Sigma \pm a b_1 \ldots.,$$

sive, designante λ Constantem,

$$13.\quad d\log \frac{M}{\{\Sigma \pm a b_1 \ldots.\}^{\lambda}} = \Delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots.$$

Quae formula cum commodo adhibetur, quoties variationum $\varDelta a$, $\varDelta b$ etc. valores valoribus variationum δa, δb etc. simpliciores sunt.

Sint n aequationes differentiales inter t et variabiles dependentes x_1, x_2, ... x_n propositae,

$$14.\quad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \dots\dots\quad \varphi_n = 0,$$

sintque altissima differentialia in iis obvenientia et quorum valores ex iis petere liceat,

$$x_1^{(m_1)},\quad x_2^{(m_2)},\quad \dots\dots\quad x_n^{(m_n)}.$$

Statuendo secundum antecedentia,

$$15.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = a_k^{(i)}, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}}\, dt = \delta a_k^{(i)} = \lambda\, d a_k^{(i)} + \varDelta a_k^{(i)}, \end{cases}$$

fit

$$16.\quad \begin{cases} d \log M = \delta \log \Sigma \pm a_1' a_2'' \dots\dots a_n^{(n)}, \\[1ex] d \log \dfrac{M}{\{\Sigma \pm a_1' a_2'' \dots\dots a_n^{(n)}\}^\lambda} = \varDelta \log \Sigma \pm a_1' a_2'' \dots\dots a_n^{(n)}. \end{cases}$$

Accuratius examinemus casum quo fit

$$17.\quad a_k^{(i)} = a_i^{(k)},$$

unde elementa $a_k^{(i)}$ ad numerum $\frac{n(n+1)}{2}$ reducere licet. Differentialia partialia uncis includendo aut non includendo, prout ista reductio facta est aut non facta est, habetur, si i et k inter se diversi sunt,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right) = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}} + \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}},\quad \left(\frac{\partial R}{\partial a_i^{(i)}}\right) = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(i)}}.$$

Designante R Determinans

$$R = \Sigma \pm a_1' a_2'' \dots\dots a_n^{(n)},$$

constat per notas Determinantium proprietates, si aequationes (17.) locum habeant, etiam fieri

$$18.\quad \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}} = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}},$$

unde

$$19.\quad \left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right) = 2\,\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}$$

Cum in symbolis adhibitis variationes $\delta a_k^{(i)}$ vel $\varDelta a_k^{(i)}$ ab ipsis $a_k^{(i)}$ independentes sint, ex aequationibus (17.) non etiam variationum aequalitas sequitur, unde in formanda Determinantis variatione pro diversis haberi debent $\delta a_k^{(i)}$ et $\delta a_i^{(k)}$ vel

$\Delta a_k^{(i)}$ et $\Delta a^{(k)}$, ideoque post institutam ipsius R variationem demum aequationum (17.) usus faciendus est. At observandum est, in Determinantis variatione binorum elementorum $a_k^{(i)}$ et $a_i^{(k)}$ variationum tantum summam obvenire, cum per (18.) et (19.) habeatur,

$$\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\delta a_k^{(i)}+\frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}}\delta a_i^{(k)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right)\{\delta a_k^{(i)}+\delta a_i^{(k)}\}.$$

Quae formula docet, in Determinante R etiam ante eius variationem instituendam poni posse $a_k^{(i)}=a_i^{(k)}$, modo ipsi $\delta a_k^{(i)}=\delta a_i^{(k)}$ tribuatur valor $\frac{1}{2}\{\delta a_k^{(i)}+\delta a_i^{(k)}\}$. Quoties igitur aequationes (17.) locum habent sive fit

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i)}},$$

valebunt adhuc aequationes (16.), etsi Determinantis elementa ad numerum $\frac{n.n+1}{2}$ inter se inaequalium revocentur, dummodo statuatur

$$20.\qquad \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}}+\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i-1)}}\right\}.dt = \delta a_k^{(i)} = \lambda\, da_k^{(i)}+\Delta a_k^{(i)}.$$

Quod si igitur aequationes differentiales propositae (14.) *ita comparatae sunt, ut habeatur*

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i)}},$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}}+\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i-1)}}\right\}dt = \lambda\, d.\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}},$$

designante λ Constantem, evanescet variatio Δ dubiturque Multiplicator

$$M = \left\{\Sigma\pm\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1^{(m_1)}}.\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2^{(m_2)}}\cdots\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n^{(m_n)}}\right\}^{\lambda}.$$

Cuius propositionis applicatio infra dabitur.

Observo ipsum R pro Determinante functionali haberi posse; erit enim R functionum $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ Determinans, si sola altissima differentialia $x_1^{(m_1)}, x_2^{(m_2)}$, etc. pro variabilibus sumuntur quarum respectu Determinans formetur. Quarum variabilium valores cum supponamus ex aequationibus (14.) peti posse, non fieri potest ut Determinans R identice evanescat; alioquin enim functiones φ_1, φ_2, etc. earum variabilium respectu non a se invicem independentes forent. V. *Comm. de Det. Funct.* §§. 3 sqq. Si vero per ipsas (14.) evanescit Determinans R, id indicio est, duo valorum variabilium systemata inter se aequalia evadere, unde aequationum praeparatione quadam opus est qua radicibus duplicibus liberentur.

Iam praecepta generalia variis applicabo exemplis.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium linearium.

§. 17.

Proponantur aequationes differentiales lineares primi ordinis,

$$1.\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = A'_1 x_1 + A'_2 x_2 \ldots + A'_n x_n = X_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = A''_1 x_1 + A''_2 x_2 \ldots + A''_n x_n = X_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = A^{(n)}_1 x_1 + A^{(n)}_2 x_2 \ldots + A^{(n)}_n x_n = X_n, \end{cases}$$

quarum Coëfficientes $A^{(i)}_k$ solius t functiones designant. Systematis aequationum (1.) Multiplicator M definitur formula differentiali,

$$\frac{d\log M}{dt} = -\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}$$
$$= -\{A'_1 + A''_2 \ldots + A^{(n)}_n\},$$

unde

$$2.\quad M = e^{-\int\{A'_1 + A''_2 \ldots + A^{(n)}_n\}dt}.$$

Hac formula cognito M, sequitur e §. 15., *si aequationes differentiales lineares* (1.) *per quascunque* $n-1$ *aequationes integrales,* $n-1$ *Constantibus Arbitrariis affectas, ad unicam aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles reducantur, eius quoque ultimae aequationis integrationem per Quadraturas absolvi posse.* Quod hactenus non constabat nisi aequationes quoque integrales reductioni adhibitae lineares erant.

Aequationibus (1.) alterum systema aequationum differentialium linearium coniugatum est,

$$3.\quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\{A'_1 y_1 + A''_1 y_2 \ldots + A^{(n)}_1 y_n\}, \\ \frac{dy_2}{dt} = -\{A'_2 y_1 + A''_2 y_2 \ldots + A^{(n)}_2 y_n\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} = -\{A'_n y_1 + A''_n y_2 \ldots + A^{(n)}_n y_n\}. \end{cases}$$

Aequationibus (1.) respective per $y_1, y_2, \ldots y_n$ atque aequationibus (3.) respective per $x_1, x_2, \ldots x_n$ multiplicatis omniumque aequationum provenientium additione facta, termini ad dextram positi omnino abeunt, expressio ad laevam autem fit differentiale aggregati $x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n$; unde integratione facta eruitur,

$$4.\quad x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n = \text{Const.}$$

Quot habentur aequationum (3.) solutiones particulares, tot formula (4.) suppeditantur aequationum (1.) Integralia, et quot habentur solutiones particulares aequationum (1.), tot eadem formula suppeditantur aequationum (3.) Integralia. Aequationum (3.) Multiplicator invenitur

$$N = e^{\int\{A'_1 + A''_2 \dots + A^{(n)}_n\} dt},$$

unde *binorum systematum aequationum differentialium linearium inter se coniugatorum Multiplicatores M et N valoribus reciprocis gaudent.*

Functionum $y_1, y_2, \dots y_n$ denotemus n systemata a se independentia per

$$y_1^{(k)},\ y_2^{(k)},\ \dots\ y_n^{(k)},$$

tribuendo successive indici superiori k valores $1, 2, \dots n$. Unde aequationum (1.) proveniunt n Integralia huiusmodi,

$$f_k = x_1 y_1^{(k)} + x_2 y_2^{(k)} \dots + x_n y_n^{(k)} = \alpha_k,$$

designantibus $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ Constantes Arbitrarias. Secundum Multiplicatoris definitionem, initio huius Commentationis adhibitam, fit

$$5.\qquad M = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm y'_1 y''_2 \dots y^{(n)}_n.$$

Unde obtinetur formula,

$$6.\qquad \Sigma \pm y'_1 y''_2 \dots y^{(n)}_n = e^{-\int\{A'_1 + A''_2 \dots + A^{(n)}_n\} dt}$$

Quae sic directe demonstratur.

Designante enim R Determinans ad laevam, fit

$$dR = \Sigma\Sigma \frac{\partial R}{\partial y_i^{(k)}} dy_i^{(k)}$$
$$= -\Sigma\Sigma \frac{\partial R}{\partial y_i^{(k)}} \{A'_i y_1^{(k)} + A''_i y_2^{(k)} \dots + A_i^{(n)} y_n^{(k)}\} dt,$$

extensa duplici summatione ad omnes indicum i et k valores $1, 2, \dots n$. Summando primum indicis k respectu, evanescunt termini in A'_i, A''_i etc. ducti praeter eos qui in $A_i^{(i)}$ ducuntur,

$$-A_i^{(i)} \left\{ \frac{\partial R}{\partial y'_i} y'_i + \frac{\partial R}{\partial y''_i} y''_i \dots + \frac{\partial R}{\partial y_i^{(n)}} y_i^{(n)} \right\} dt$$
$$= -A_i^{(i)} . R\, dt,$$

sicuti notis Determinantium proprietatibus patet. Hinc altera summatio indicis i respectu instituta suggerit,

$$dR = -\{A'_1 + A''_2 \dots A^{(n)}_n\} dt,$$

cuius aequationis integratione formula (6.) obtinetur.

Si aequationes differentiales lineares proponuntur quae altiora quam prima differentialia involvunt, secundum §. 14. (5.) statim earum quoque Multiplicator obtinetur. Brevitatis causa duas tantum consideremus aequationes,

$$7.\quad \begin{cases} \frac{d^p x}{dt^p} = Ax + A_1\frac{dx}{dt}\dots + A_{p-1}\frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} \\ \qquad + Bx + B_1\frac{dy}{dt}\dots + B_{q-1}\frac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}, \\ \frac{d^q x}{dt^q} = A'x + A'_1\frac{dx}{dt}\dots + A'_{p-1}\frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} \\ \qquad + B'y + B'_1\frac{dy}{dt}\dots + B'_{q-1}\frac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}, \end{cases}$$

in quibus Coëfficientes A, A_1 etc. solius t functiones designant; fit earum aequationum Multiplicator,

$$M = e^{-\int\{A_{p-1}+B'_{q-1}\}dt}.$$

Ponamus, addendo aequationes (7.) respective per λ et μ multiplicatas produci aequationem per se integrabilem: secundum conditiones integrabilitatis fieri debet,

$$8.\quad \begin{cases} \frac{d^p\lambda}{dt^p} = -\frac{d^{p-1}(A_{p-1}\lambda + A'_{p-1}\mu)}{dt^{p-1}} + \frac{d^{p-2}(A_{p-2}\lambda + A'_{p-2}\mu)}{dt^{p-2}}\dots \pm (A\lambda + A'\mu), \\ \frac{d^q\mu}{dt^q} = -\frac{d^{q-1}(B_{q-1}\lambda + B'_{q-1}\mu)}{dt^{q-1}} + \frac{d^{q-2}(B_{q-2}\lambda + B'_{q-2}\mu)}{dt^{q-2}}\dots \pm (B\lambda + B'\mu), \end{cases}$$

quod est aequationum differentialium systema proposito coniugatum. Quod, si p et q inter se inaequales sunt, non ea gaudet forma qua §. 14. supposui aequationes differentiales exhibitas esse, videlicet ut altissima differentialia inveniantur per inferiora ipsasque variabiles expressa. Si $p > q$, ut ea forma obtineatur, aequatio posterior $p - q - 1$ vicibus iteratis differentianda est et aequationum ope provenientium eliminanda sunt e priore ipsius μ differentialia superiora $(q-1)^{\text{to}}$. Hac eliminatione priorem aequationem novi non ingrediuntur termini $(p-1)^{\text{to}}$ ipsius λ differentiali affecti, unde in ea immutatus manet unicus terminus differentiale $\frac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}$ implicans,

$$-A_{p-1}\frac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}.$$

Porro in aequatione posteriore unicus extat terminus ipso $\frac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}$ affectus,

$$-B'_{q-1}\frac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}.$$

Unde secundum §. 14. aequationum (8.), dicto modo praeparatarum, eruitur Multiplicator

$$N = e^{\int \{A_{p-1}+B'_{q-1}\} dt}.$$

Videmus igitur, bina quoque systemata coniugata (7.) et (8.) Multiplicatoribus reciprocis gaudere. Similiter pro pluribus aequationibus demonstratur, in systemate coniugato per eliminationes, ad formam normalem obtinendam instituendas, hos non mutari terminos qui valorem ipsius $\frac{d \log N}{dt}$ afficiunt, unde facile sequitur, binorum systematum coniugatorum Multiplicatores semper evadere inter se reciprocos.

Observo, formam normalem aequationibus (8.) conciliari posse sine differentiationibus et eliminationibus, cum earum loco hoc pateat substitui posse systema aequationum differentialium linearium primi ordinis inter $p+q+1$ variabiles,

$$9. \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = -\{A_{p-1}\lambda + A'_{p-1}\mu + \lambda_1\}, \\ \frac{d\lambda_1}{dt} = -\{A_{p-2}\lambda + A'_{p-2}\mu + \lambda_2\}, \\ \dots \quad \dots \\ \frac{d\lambda_{p-1}}{dt} = -\{A\lambda + A'\mu\}, \\ \frac{d\mu}{dt} = -\{B_{q-1}\lambda + B'_{q-1}\mu + \mu_1\}, \\ \frac{d\mu_1}{dt} = -\{B_{q-2}\lambda + B'_{q-2}\mu + \mu_2\}, \\ \dots \quad \dots \\ \frac{d\mu_{q-1}}{dt} = -\{B\lambda + B'\mu\} \end{cases}$$

Aequationes (9.) eodem gaudent Multiplicatore N supra invento. Quod adnotari meretur. Nam valor supra inventus N Multiplicatori aequationum (8.) conveniebat supponendo eas locum tenere aequationum differentialium primi ordinis, in quibus praeter t, λ, μ pro variabilibus habeantur

$$(A.) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt}, \ \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \ \dots \ \frac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}, \\ \frac{d\mu}{dt}, \ \frac{d^2\mu}{dt^2}, \ \dots \ \frac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}; \end{cases}$$

dum aequationes (9.) sunt inter t, λ, μ aliasque variabiles

$$(B.) \quad \begin{cases} \lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots \ \lambda_{p-1}, \\ \mu_1, \ \mu_2, \ \dots \ \mu_{q-1} \end{cases}$$

Aliis autem variabilibus introductis vidimus in secundo Capite mutari Multiplicatorem, videlicet eum dividi per novarum variabilium Determinans, ipsarum formatum variabilium respectu quarum loco introductae sunt. Unde, cum utrique aequationum systemati *idem* conveniat Multiplicator N, sequitur, si quantitates $(B.)$ per t, λ, μ et quantitates $(A.)$ exprimantur, Determinans quantitatum $(B.)$, ipsarum $(A.)$ respectu formatum, aequari Constanti, ac reapse aequale invenitur unitati.

Aequationes differentiales secundi ordinis quarum assignare licet Multiplicatorem. Exempla *Euleriana.*

§. 18.

Paullo immorabor applicationi theoriae novi Multiplicatoris ad aequationes differentiales secundi ordinis inter duas variabiles, qui est casus simplicissimus post aequationes differentiales primi ordinis, ad quas *Eulerianus* Multiplicator refertur. Ac primum per theoremata §§. 14, 15 tradita patet,

„*si proponatur aequatio* $\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+B=0$, *in qua* A *solius* x, B *utriusque* x *et* y *functiones quaecunque sunt, atque integratione prima eruatur* $\frac{dy}{dx}=u$, *designante* u *variabilium* x *et* y *et Constantis Arbitrariae* α *functionem, fore alterum Integrale,*

$$\int e^{\int A\,dx}.\frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy-u\,dx) = Const\text{"}$$

Quantitatem sub maiore integrationis signo esse differentiale completum, sic verificari potest. Nam ut aequatio differentialis proposita proveniat differentiatione aequationis $\frac{dy}{dx}=u$, locum habere debet aequatio *identica,*

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}+Au+B = 0.$$

Qua ipsius α respectu differentiata et per $e^{\int A\,dx}$ multiplicata prodit,

$$\frac{\partial . e^{\int A\,dx}\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\partial x}+\frac{\partial . e^{\int A\,dx}u\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\partial y} = 0,$$

quae est conditio requisita, ut quantitas

$$e^{\int A\,dx}\frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy-u\,dx)$$

differentiale completum sit.

Generalius e §§. 14, 15 sequitur, *si proponatur aequatio,*

$$1. \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx}+B=0,$$

in qua et φ et B variabilium x et y functiones quaecunque sunt, atque integratione prima inventum sit $\frac{dy}{dx}=u$, designante u variabilium x et y et Constantis Arbitrariae α functionem, fieri aequationem inter x et y quaesitam,

$$2. \quad \int e^{\varphi}\frac{\partial u}{\partial\alpha}(dy-u\,dx)=\text{Const.}$$

Aequationis (1.) tractavit *Eulerus* specimina quibus ei integratio prima successit (Cf. Calc. Integr. Vol. I. Sect. I. Cap. VI. pgg. 162 sqq.). At aequationes differentiales primi ordinis, ad quas ea ratione pervenit, tanta irrationalitate erant implicatae, ut de integratione directa desperans alia artificia circumspexerit. Atque missum facto Integrali invento contigit ei, aequationes differentiales secundi ordinis propositas differentiando alias deducere lineares, Coëfficientibus constantibus affectas, quarum nota integratio propositarum quoque ei suppeditavit integrationem completam. At per antecedentem formulam (2.) illarum aequationum differentialium primi ordinis quamvis complicatarum assignare licet Multiplicatores. Adiungam ipsam variabilium separationem, qua elucescat, revera adiectis illis Multiplicatoribus aequationes sponte integrabiles fore.

Exempla *Euleriana* forma paullo generaliori exhibebo, quod sine calculi complicatione fieri potest.

Exemplum I.

$$y^2\frac{d^2y}{dx^2}+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+by-cx=0.$$

(b et c Constantes.)

Secundum *Eulerum* aequationis propositae fit Integrale primum, quod si placet differentiando comprobare licet,

$$y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+bxy^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(by-3cx)yy\frac{dy}{dx}$$
$$+cy^3+b^2y^2x-2bcyx^2+c^2x^3=\alpha,$$

designante α Constantem Arbitrariam. Cuius aequationis resolutione eruatur

$$y\frac{dy}{dx}=yu=v,$$

designante v radicem aequationis cubicae

$$3. \quad v^3+bxv^2+y(by-3cx)v$$
$$+cy^3+b^2y^2x-2bcyx^2+c^2x^3=\alpha.$$

Comparando aequationem differentialem propositam cum (1.) fit

$$\varphi = 2\log y, \quad e^{\varphi} = y^2,$$

unde secundum (2.) invenitur alterum Integrale

$$\int y^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy - u\,dx) = \int \frac{\partial v}{\partial \alpha}(y\,dy - v\,dx) = \text{Const.}$$

Fit autem e (3.)

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{1}{3vv + 2bxv + y(by - 3cx)}.$$

Quem aequationis $y\,dy - v\,dx = 0$ Multiplicatorem esse, propter ipsius v irrationalitatem non facile cognoscitur, et minus adhuc separatio variabilium in promtu est. Quam sic assequor.

Aequationem (3.) bene vidit *Eulerus* hac ratione exhiberi posse,

$$4. \quad f.f'.f'' = \alpha,$$

posito

$$5. \quad \begin{cases} f = v + \lambda y + \frac{c}{\lambda}x, \\ f' = v + \lambda' y + \frac{c}{\lambda'}x, \\ f'' = v + \lambda'' y + \frac{c}{\lambda''}x, \end{cases}$$

designantibus λ, λ', λ'' radices diversas aequationis cubicae,

$$6. \quad \lambda^3 + b\lambda - c = 0,$$

unde $\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0$, $\lambda\lambda'\lambda'' = c$. Ex aequationibus (4.) et (5.) sequitur

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f'}{\partial \alpha} = \frac{\partial f''}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{1}{f'f'' + f''f + ff'},$$

unde expressio

$$\frac{y\,dy - v\,dx}{f'f'' + f''f + ff'}$$

fieri debet differentiale completum. Invenitur autem e (5.):

$$d(f' - f'') = (\lambda' - \lambda'')(dy - \lambda\,dx),$$
$$d(f'' - f) = (\lambda'' - \lambda)(dy - \lambda' dx),$$
$$d(f - f') = (\lambda - \lambda')(dy - \lambda'' dx),$$
$$\lambda f.d(f' - f'') + \lambda' f'.d(f'' - f) + \lambda'' f''.d(f - f')$$
$$= \Lambda.(y\,dy - v\,dx),$$

siquidem ponitur

$$\Lambda = \lambda^2(\lambda' - \lambda'') + \lambda'^2(\lambda'' - \lambda) + \lambda''^2(\lambda - \lambda')$$
$$= (\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')(\lambda' - \lambda'') = 0,$$

atque adnotatur fieri

$$\lambda^3(\lambda'-\lambda'')+\lambda'^3(\lambda''-\lambda)+\lambda''^3(\lambda-\lambda')$$
$$= \Delta(\lambda+\lambda'+\lambda'') = 0.$$

Hinc substitutendo $\lambda''=-(\lambda+\lambda')$ fit

$$\Delta(y\,dy-v\,dx) = \lambda\{(f+f'')df'-d.ff''\}$$
$$-\lambda'\{(f'+f'')df-d.f'f''\},$$

unde denuo substituendo, quod e (4.) sequitur,

$$d.ff'' = -f''.\frac{df'}{f'},\quad d.f'f'' = -f'f''.\frac{df}{f},$$

eruitur

$$\frac{y\,dy-v\,dx}{f'f''+f''f+ff'} = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\lambda\,df'}{f'}-\frac{\lambda'\,df}{f}\right\}.$$

Quod per se integrabile est atque nihilo aequiparatum integratumque suppeditat:

$$\frac{\log f}{\lambda}-\frac{\log f'}{\lambda'} = \text{Const.},$$

quod alterum Integrale est.

Exemplum II.

$$2y^2\frac{d^2y}{dx^2}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-ay^2+bx^2-c=0.$$

(a, b, c Constantes.)

Secundum *Eulerum* huius aequationis integratione prima obtinetur $y\,dy-v\,dx=0$, designante v radicem aequationis biquadraticae,

7. $$(aa-4b)y^2-2(abx^2+av^2-4bxv)+\left(\frac{c-bx^2+v^2}{y}\right)^2 = \alpha,$$

atque α Constantem Arbitrariam. Comparando aequationem differentialem propositam cum (1.) fit

$$\varphi = \log y,\quad e^\varphi = y,$$

unde e (2.) eruitur aequatio integralis inter x et y quaesita,

$$\int y\frac{\partial u}{\partial \alpha}\{dy-u\,dx\} = \int\frac{\partial v}{\partial \alpha}.\frac{y\,dy-v\,dx}{y} = \text{Const.}$$

Ponamus $a=\lambda+\lambda'$, $b=\lambda\lambda'$, abit (7.) in hanc formam,

8. $$(\lambda-\lambda')^2y^2-2\{\lambda(v-\lambda'x)^2+\lambda'(v-\lambda x)^2\}$$
$$+\left\{\frac{c-\lambda\lambda'x^2+v^2}{y}\right\}^2 = \alpha.$$

Ponatur

9. $$v-\lambda'x = (\lambda-\lambda')p,\quad v-\lambda x = (\lambda'-\lambda)p',$$

unde

$$10.\quad \begin{cases} x = p+p', \quad v = \lambda p+\lambda' p', \\ \sqrt{\lambda}.p+\sqrt{\lambda'}.p' = \dfrac{v+\sqrt{(\lambda\lambda')}\,x}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda'}}, \quad \sqrt{\lambda}.p-\sqrt{\lambda'}.p' = \dfrac{v-\sqrt{(\lambda\lambda')}\,x}{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'}}; \end{cases}$$

abit (8.) in hanc aequationem,

$$11.\quad y^2+\left\{\frac{c}{\lambda-\lambda'}+\lambda p^2-\lambda' p'^2\right\}^2\frac{1}{y^2} = 2\left\{\lambda p^2+\lambda' p'^2+\frac{a}{2(\lambda-\lambda')^2}\right\}.$$

Hinc fit

$$12.\quad y = \sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')},$$

siquidem ponitur

$$13.\quad \varepsilon = \frac{a}{4(\lambda-\lambda')^2}+\frac{c}{2(\lambda-\lambda')}, \quad \varepsilon' = \frac{a}{4(\lambda-\lambda')^2}+\frac{c}{2(\lambda'-\lambda)}.$$

E formulis (9.) et (13.) sequitur

$$\frac{\partial p}{\partial a} = -\frac{\partial p'}{\partial a} = \frac{1}{\lambda-\lambda'}.\frac{\partial v}{\partial a},$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = \frac{\partial \varepsilon'}{\partial a} = \frac{1}{4(\lambda-\lambda')^2};$$

unde e (12.) obtinetur,

$$14.\quad \frac{1}{y}.\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{1}{8(\lambda-\lambda')\{\lambda' p'\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}-\lambda p\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}\}},$$

qui fieri debet Multiplicator aequationis $y\,dy-v\,dx=0$. Ac reapse invenitur e (10.) et (12.),

$$\begin{aligned} y\,dy-v\,dx &= \left\{\frac{\lambda p\,dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}}+\frac{\lambda' p'\,dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}}\right\}\{\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}\} \\ &\quad -\{\quad dp \quad + \quad dp' \quad\}\{\quad \lambda p \quad + \quad \lambda' p' \quad\} \\ &= \{\lambda p\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p)}-\lambda' p'\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}\}\left\{\frac{dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}}-\frac{dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}}\right\}. \end{aligned}$$

Unde per factorem (14.) atque substitutionem (9.) aequationem differentialem, $y\,dy-v\,dx=0$, in aliam mutamus, in qua variabiles separatae sunt,

$$\frac{dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}}-\frac{dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}} = 0.$$

Cuius integratione prodit:

$$\frac{\{\sqrt{\lambda}.p+\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}\}^{\sqrt{\lambda'}}}{\{\sqrt{\lambda'}.p'+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}\}^{\sqrt{\lambda}}} = \text{Const.}$$

Ponendo autem

$$\begin{aligned}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda'})y+v+\sqrt{(\lambda\lambda')}x &= A,\\ (\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})y+v-\sqrt{(\lambda\lambda')}x &= B,\\ (\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})y-v+\sqrt{(\lambda\lambda')}x &= C,\end{aligned}$$

fit e (10.) et (11.) post calculos faciles,

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda}.p+\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)} &= \frac{AB+c}{2(\lambda-\lambda')y},\\ \sqrt{\lambda'}.p+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda'p'p')} &= \frac{AC-c}{2(\lambda-\lambda')y}.\end{aligned}$$

Unde aequatio integralis inventa sic exhiberi potest,

$$\frac{(AB+c)^{\sqrt{\lambda'}}}{(AC-c)^{\sqrt{\lambda}}} = \beta.y^{\sqrt{\lambda'}-\sqrt{\lambda}},$$

ubi β est nova Constans Arbitraria atque quantitas v, quae ipsas A, B, C afficit, est radix aequationis biquadraticae (7.), porro λ et λ' sunt radices diversae aequationis quadraticae $\lambda^2-a\lambda+b=0$.

Integrationem his duobus exemplis praestitam etiam assequi licuisset ponendo cum *Eulero* $dx=y\,dt$, et aequationem differentialem secundi ordinis exemplo primo propositam *semel*, exemplo secundo propositam *bis* differentiando, ita ut t pro variabili independente habeatur. Quo facto respective pervenitur ad aequationes differentiales lineares tertii et quarti ordinis, quae Coëfficientibus gaudent constantibus notisque methodis integrantur.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium vulgarium quod mediante solutione completa unius aequationis differentialis partialis primi ordinis integratur.

§. 19.

Systema aequationum differentialium vulgarium proponatur hoc,

$$1.\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1},\quad \frac{dp_1}{dt}=-\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial V}\right\},\\ &\frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_2},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}+p_2\frac{\partial\varphi}{\partial V}\right\},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{dq_n}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_n},\quad \frac{dp_n}{dt}=-\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}+p_n\frac{\partial\varphi}{\partial V}\right\},\\ &\frac{dV}{dt}=p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\cdots\cdots+p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n},\end{aligned}\right.$$

ubi φ est functio quaecunque quantitatum $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n, V, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$. Designante M aequationum (1.) Multiplicatorem, secundum formulas nostras gerales fit

$$\frac{d\log M}{dt} = -\Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial q_i}+\Sigma\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial p_i}+p_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial V\partial p_i}\right\}+n\frac{\partial\varphi}{\partial V}$$
$$-\frac{\partial\left\{p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\dots+p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\right\}}{\partial V},$$

tribuendo indici i valores $1, 2, \dots n$. Unde reiectis terminis se destruentibus obtinetur,

$$2.\quad \frac{d\log M}{dt} = n\frac{\partial\varphi}{\partial V}.$$

Quae evanescit expressio si φ ipsa V vacat. *Quoties igitur functio φ ab ipsa V vacua est, aequationum (1.) Multiplicatorem unitati aequare licet.*

Aequationum (1.) habetur Integrale unum,

$$3.\quad \varphi = h,$$

designante h Constantem. In ea aequatione ponatur

$$4.\quad p_1=\frac{\partial V}{\partial q_1},\quad p_2=\frac{\partial V}{\partial q_2},\quad \dots\quad p_n=\frac{\partial V}{\partial q_n},$$

obtinetur aequatio differentialis partialis primi ordinis, in qua V est functio quaesita atque $q_1, q_2, \dots q_n$ sunt variabiles independentes. Faciamus inventam esse eius aequationis differentialis partialis solutionem *quamcunque* V, dico aequationes (4.) totidem esse aequationes integrales, quibus aequationes differentiales vulgares (1.) gaudere possint. Nam differentiando ex. gr. earum primam $\frac{\partial V}{\partial q_1}-p_1=0$ et substituendo aequationes differentiales (1.) prodit,

$$5.\quad \Sigma\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial V} = 0.$$

Cui aequationi satisfit substituendo ipsorum p_1, p_2, etc. valores (4.). Nimirum e suppositione facta aequatio (3.) identica evadit substituendo (4.) solutionisque V valorem, eam autem aequationem identicam ipsius q_1 respectu differentiando prodit aequatio in quam abit (5.) per aequationes (4.). *Itaque aequationes (4.) una cum ipsa aequatione, qua V per $q_1, q_2, \dots q_n$ definiri ponitur, constituunt systema $n+1$ aequationum integralium idque tale e quo differentiando ipsasque aequationes differentiales propositas substituendo deducere non licet aequationes integrales novas.* Scilicet aequationes provenientes (5.) per illas $n+1$ aequationes identicas fieri vidimus.

Constans h ubi servat significationem generalem ingredi debet solutionem quamcunque V unde, data V, differentiale quoque partiale $\frac{\partial V}{\partial h}$ assignare licebit, quod per z designabo. Erit per (1.), (3.), (4.),

$$6.\quad \frac{dz}{dt} = \Sigma\frac{\partial^2 V}{\partial h\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial h}-\frac{\partial\varphi}{\partial V}z = 1-\frac{\partial\varphi}{\partial V}z.$$

Si solutio V aliquam involvit Constantem Arbitrariam α atque ponitur $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = y$, similiter erit

$$7.\quad \frac{dy}{dt} = \Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha\, \partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial V} y = -\frac{\partial \varphi}{\partial V} y.$$

Scilicet functio φ, substituendo datam solutionem V atque ponendo $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, identice aequatur Constanti h ideoque post eam substitutionem differentiata ipsius h respectu unitati aequatur, differentiata ipsius α respectu evanescit. E (2.) et (7.) sequitur,

$$d \log M = -n\, d \log y,$$

ideoque fit

$$8.\quad y^n M = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)^n M = \beta,$$

designante β Constantem. Haec formula docet, Multiplicatori M competere valorem qui per aequationes integrales (3.) et (4.) aequetur quantitati $\left\{\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right\}^{-n}$. Observo adhuc, e binis formulis (6.) et (7.) sequi

$$y\, dz - z\, dy = y\, dt,$$

unde, designante U functionem quantitatum y et z homogeneam rationalem $(-1)^{ti}$ ordinis, assignari poterit integrale $\int U\, dt$. Si solutio V plures Constantes Arbitrarias involvit, totidem habebuntur aequationes (8.), binarumque divisione obtinebuntur aequationes integrales, inventis (3.) et (4.) accedentes. Si functio φ ab ipsa V vacua est ideoque $M = 1$, aequationes (8.) per se sunt aequationes integrales.

Si habetur solutio *completa* $V = F$, n Constantes Arbitrarias $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ involvens, poniturque $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = u_i$, fit systema aequationum integralium completarum,

$$9.\quad \begin{cases} F - V = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_1} - p_1 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} - p_2 = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial q_n} - p_n = 0, \\ \qquad\qquad \frac{u_1}{u_n} - \beta_1 = 0, \quad \frac{u_2}{u_n} - \beta_2 = 0, \quad \ldots \quad \frac{u_{n-1}}{u_n} - \beta_{n-1} = 0, \end{cases}$$

designantibus $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ alias Constantes Arbitrarias. Si ex his aequationibus petuntur valores quantitatum h, α_i, β_i, atque functionum iis aequivalentium formantur Determinantia *partialia*, in quibus una quantitatum q_i, p_i, V pro Constante, reliquae pro variabilibus habentur, ea aequare debent quantitates ad dextram aequationum differentialium (1.) positas, in *Multiplicatorem* ductas. Supersedere resolutioni aequationum (9.) et immediat functionum $F - V$, $\frac{\partial F}{\partial q_1} - p_1$ etc. sumere possumus Determinantia partiali

dummodo ea dividimus per earundem functionum Determinans, quantitatum h, α_i, β_i respectu formatum. Qua de re Cap. I. egi. Determinantia functionalia hic obvenientia in alia simpliciora redeunt, propterea quod quantitates V, p_1, p_2, ... p_n tantum in $n+1$ prioribus aequationum (9.), quantitates β_1, β_2, ... β_{n-1} tantum in $n-1$ posterioribus, singulae in singulis reprehenduntur. Sic Determinans, quantitatum h, α_i, β_i respectu formatum, quod per ∇ designabo, aequatur Determinanti functionum ab ipsis β_i vacuarum,

$$F,\ \frac{\partial F}{\partial q_1},\ \frac{\partial F}{\partial q_2},\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial q_n},$$

solarum h et α_1, α_2, ... α_n respectu formato. Determinans partiale, in quo q_n pro Constante habetur et quod per (q_n) designabo, aequatur Determinanti functionum

$$\frac{u_1}{u_n},\ \frac{u_2}{u_n},\ \ldots\ \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

formato solarum respectu q_1, q_2, ... q_{n-1}. Per theorema autem in Comment. *de Determinantibus functionalibus* comprobato, quod Determinantia spectat functionum communi denominatore praeditarum, fit

$$(q_n) = u_n^{-n} Q_n = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)^{-n} Q_n,$$

posito

$$Q_n = \Sigma \pm \frac{\partial u_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_{n-1}} u_n,$$

ubi formantur Determinantis Q_n termini permutando omnimodis functiones u_1, u_2, ... u_n. Substituendo autem valores $u_i = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}$ et differentiationum ordinem invertendo sequitur, ***Determinans Q_n fieri Determinans functionum***

$$F,\ \frac{\partial F}{\partial q_1},\ \frac{\partial F}{\partial q_2},\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial q_{n-1}},$$

quantitatum α_1, α_2, ... α_n ***respectu formatum.*** Iam aequationem identicam,

$$\varphi\left(q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_n,\ F,\ \frac{\partial F}{\partial q_1},\ \frac{\partial F}{\partial q_2},\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial q_n}\right) = h,$$

differentiando respectu quantitatum h, α_1, α_2, ... α_n, quibus ipsae F, $\frac{\partial F}{\partial q_1}$ etc. afficiuntur, scribendoque V et p_i ipsarum F et $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ loco, obtinentur inter incognitas $\frac{\partial \varphi}{\partial V}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$ aequationes $n+1$ lineares, quarum resolutione invenitur

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = \frac{Q_n}{\nabla},$$

unde

$$\frac{(q_n)}{\nabla} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n}.$$

Eadem ratione generaliter, ubi vocamus (q_i) functionum (9.) Determinans partiale in quo q_i pro Constante habetur, invenitur

$$10.\qquad \frac{(q_i)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}.$$

Vocando W functionum

$$\frac{\partial F}{\partial q_1},\ \frac{\partial F}{\partial q_2},\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial q_n}$$

Determinans, quantitatum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ respectu formatum, earundem $n+1$ aequationum linearium resolutione eruitur,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = \frac{W}{\nabla}.$$

Functionum (9.) Determinans partiale (p_n), in quo p_n pro Constante habetur, aequatur Determinanti functionum

$$\frac{\partial F}{\partial q_n},\ \frac{u_1}{u_n},\ \frac{u_2}{u_n},\ \ldots\ \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_n$ respectu formato. Invertendo autem ordinem differentiationum in differentialibus ipsius $\frac{\partial F}{\partial q_n}$ atque similes adhibendo formulas earum quibus supra (q_n) ad Q_n revocavi, redit $u_n^n(p_n)$ in differentiam Determinantis P_n functionum

$$F,\ \frac{\partial F}{\partial q_1},\ \frac{\partial F}{\partial q_2},\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial q_n},$$

quantitatum $q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ respectu formati, atque Determinantis functionalis modo adhibiti W per $\frac{\partial F}{\partial q_n}$ multiplicati, sive fit

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)^n (p_n) = P_n - \frac{\partial F}{\partial q_n}.W = P_n - p_n W.$$

Adiiciendo autem $n+1$ aequationibus linearibus commemoratis aliam provenientem ex aequatione $\varphi = h$, quantitatis q_n respectu differentiata, eruitur per eliminationem quantitatum $\frac{\partial \varphi}{\partial V}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$,

$$\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + P_n = 0.$$

Unde fit

$$\frac{(p_n)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \left\{\frac{P_n}{\nabla} - p_n \frac{W}{\nabla}\right\} = -\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \cdot \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial V}\right\};$$

eademque ratione obtinetur generaliter, ubi (p_i) est functionum (9.) Determinans partiale in quo habetur p_i pro Constante,

$$11.\qquad \frac{(p_i)}{\nabla} = -\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \cdot \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial V}\right\}.$$

Quae paullo difficiliora erant indagatu. Postremo functionum (9.) Determinans partiale (V), in quo habetur V pro Constante, aequale erit functionum

$$F, \frac{u_1}{u_n}, \frac{u_2}{u_n}, \ldots \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

Determinanti, quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_n$ respectu formato. Quod adhibendo notationem supra traditam fieri patet

$$(V) = \frac{\partial F}{\partial q_1}(q_1) + \frac{\partial F}{\partial q_2}(q_2) \ldots + \frac{\partial F}{\partial q_n}(q_n),$$

unde secundum (10.) invenitur:

$$12. \quad \frac{(V)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \left\{p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \ldots + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\right\}.$$

Formulae (10.), (11.), (12.) docent, functionum ad laevam aequationum (9.) positarum Determinantia partialia aequari quantitatibus ad dextram aequationum differentialium (1.) positis, per factorem communem $\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n}$ multiplicatis. Ea Determinantia partialia autem sunt ut differentialia dq_i, dp_i, dV. Unde antecedentibus continetur demonstratio directa, aequationes differentiales propositas e formulis (9.) differentiatis per aequationum linearium resolutionem fluere easque Multiplicatore gaudere $\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n}$, qualis e formula (8.) obtinebatur. Quam demonstrationem hic breviter indicasse placuit, cum ad illustrandam Determinantium theoriam faciat.

Casu quo φ ab ipsa V vacua est cum cognitus sit Multiplicator, videamus, quid sit quod ea cognitione lucremur in exemplo simplicissimo quo $n = 2$. Tributo Constanti h valore particulari, substituamus aequationi $\varphi = h$ aliam qua ipsius p_2 valor per q_1, q_2, p_1 exhibetur, ita ut aequationes differentiales proponantur sequentes,

$$13. \quad dq_1 : dq_2 : dp_1 = \frac{\partial p_2}{\partial p_1} : -1 : -\frac{\partial p_2}{\partial q_1}.$$

Quarum Multiplicatorem patet *unitati* aequari, cum summa differentialium quantitatum ad dextram, respective secundum q_1, q_2, p_1 sumtorum, evanescat. Unde si post primam integrationem exprimitur p_1 per q_1, q_2 et Constantem Arbitrariam α, secundum principium ultimi Multiplicatoris fit alterum Integrale,

$$14. \quad \int \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left\{dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} dq_2\right\} = \text{Const.}$$

Sub integrationis signo haberi differentiale completum, e *Lagrangiana* aequationum differentialium partialium theoria sic probatur. Nam cum expressis p_1 et p_2 per q_1 et q_2 fieri debeat $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ differentiale completum atque p_2 per

q_1, q_2, p_1 expressum detur, pro p_1 talis sumi debet quantitatum q_1 et q_2 functio quae satisfaciat conditioni,

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_1} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} = 0.$$

Qualem functionem, e theoria aequationum differentialium partialium primi ordinis *linearium* constat, e quocunque Integrali aequationum differentialium vulgarium (13.) erui. Quod ubi Constantem Arbitrariam α implicat, eandem implicabunt valores ipsarum p_1 et p_2 per q_1 et q_2 exhibiti, qui expressionem $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ integrabilem reddebant. Quae secundum Constantem α differentiata rursus prodire debet expressio integrabilis, sive expressio

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_2 = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left\{ dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} dq_2 \right\}$$

evadere debet differentiale completum. Q. D. E. Simul videmus, Integrale (14.) obtineri aequiparando novae Constanti Arbitrariae differentiale partiale solutionis $V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2\}$, ipsius α respectu sumtum, id quod cum supra expositis convenit.

De Multiplicatore aequationum differentialium vulgarium systematis quod mediante solutione completa problematis *Pfaffiani* integratur. Conditiones ut aequatio differentialis vulgaris linearis primi ordinis inter p variabiles per pauciores quam $\frac{1}{2}p$ aequationes integrari possit.

§. 20.

Problema ***Pfaffianum*** voco integrationem singularis aequationis differentialis linearis primi ordinis inter numerum variabilium parem per semissem aequationum finitarum numerum. Sit aequatio differentialis singularis proposita,

$$1.\quad 0 = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \ldots + X_{2m}\, dx_{2m},$$

designantibus X_1, X_2 etc. variabilium x_1, x_2, ... x_{2m} functiones quascunque. Qua integrata per numerum m aequationum, totidem Constantibus Arbitrariis affectarum, demonstravi *Diar. Crell. Vol. XVII. pgg. 148 sqq.*, praestari integrationem completam systematis aequationum differentialium sequentis,

$$2.\quad \begin{cases} X_1\, dt = \quad * \quad + a_{1,2}\, dx_2 + a_{1,3}\, dx_3 \ldots + a_{1,2m}\, dx_{2m}, \\ X_2\, dt = -a_{1,2}\, dx_1 \quad * \quad + a_{2,3}\, dx_3 \ldots + a_{2,2m}\, dx_{2m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{2m}\, dt = -a_{1,2m}\, dx_1 - a_{2,2m}\, dx_2 \ldots\ldots\ldots \quad * \quad, \end{cases}$$

ubi

$$3.\quad a_{i,k} = -a_{k,i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \quad a_{i,i} = 0.$$

Dedi in *Diario Crell. Vol. II. pgg. 354 sqq.* resolutionem algebraicam generalem aequationum linearium ad instar aequationum (2.) formatarum. Cuius ope exhibitis aequationibus differentialibus forma proportionum nobis usitata,

$$4.\qquad dx_1 : dx_2 \dots : dx_{2m} = A_1 : A_2 \dots : A_{2m},$$

investigemus formulam qua aequationum (4.) Multiplicator definiatur sive valorem expressionis

$$5.\qquad \frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}\dots+\frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = -A_i\frac{d\log M}{dx_i}.$$

Auspicabor ab aequationum linearium (2.) resolutione quae sic proponi potest.

Deriventur de producto

$$a_{1,2}\, a_{3,4} \dots a_{2m-1,2m}$$

alii similes termini, mutando indices $2, 3, \dots 2m-1, 2m$ respective in $3, 4, \dots 2m, 2$, eandemque indicum commutationem repetendo, donec ad terminum primitivum reditur, id quod suggerit $2m-1$ terminos diversos. Ea ratione, indicum certo ordine proposito, si quisque eorum in proxime sequentem, ultimus in primum mutatur idque repetitur dum ad ordinem indicum primitivum reditur, dicam *indices cyclum percurrere.* Postquam e producto proposito $2m-1$ termini deducti sunt per cyclum, quem indices $2, 3, \dots 2m$ fecimus percurrere, rursus in eorum terminorum unoquoque ponamus indices $2m-3$ postremos cyclum percurrere, unde nanciscimur terminorum numerum $(2m-1)(2m-3)$. In eorum terminorum unoquoque rursus ponamus indices $2m-5$ postremos cyclum percurrere, erit terminorum diversorum provenientium numerus totalis $(2m-1)(2m-3)(2m-5)$. Ita pergendo donec postremo soli tres indices postremi cyclum percurrant, producta $3.5\dots(2m-1)$ ex uno proposito deducta erunt, quorum omnium aggregatum R vocemus. Sit ex. gr. $m=3$, erit R aggregatum *quindecim* terminorum,

$$\begin{aligned} &a_{1,2}\,a_{3,4}\,a_{5,6}+a_{1,2}\,a_{3,5}\,a_{6,4}+a_{1,2}\,a_{3,6}\,a_{4,5}\\ +&a_{1,3}\,a_{4,5}\,a_{6,2}+a_{1,3}\,a_{4,6}\,a_{2,5}+a_{1,3}\,a_{4,2}\,a_{5,6}\\ +&a_{1,4}\,a_{5,6}\,a_{2,3}+a_{1,4}\,a_{5,2}\,a_{3,6}+a_{1,4}\,a_{5,3}\,a_{6,2}\\ +&a_{1,5}\,a_{6,2}\,a_{3,4}+a_{1,5}\,a_{6,3}\,a_{4,2}+a_{1,5}\,a_{6,4}\,a_{2,3}\\ +&a_{1,6}\,a_{2,3}\,a_{4,5}+a_{1,6}\,a_{2,4}\,a_{5,3}+a_{1,6}\,a_{2,5}\,a_{3,4},\end{aligned}$$

quorum quinque in prima verticali ex eorum uno derivantur, identidem mutando indices 2, 3, 4, 5, 6 in 3, 4, 5, 6, 2; terni iuxta positi indicibus tribus posterioribus cyclum percurrentibus ex uno eorum fluunt. Aggregatum R fit denominator communis expressionum algebraicarum quibus valores incognitarum exhibentur. Numeratorum autem Coëfficientes, qui ducuntur in terminos ad laevam aequationum linearium constitutos, sunt ipsius R differentialia, quantitatum $a_{i,k}$

respectu sumta, ita ut aequationum (2.) resolutione proveniant valores,

$$5^*.\quad \begin{cases} R\frac{dx_1}{dt} = \quad * \quad -\frac{\partial R}{\partial a_{1,2}}X_2 - \dots - \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}X_{2m}, \\ R\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2}}X_1 \quad * \quad - \dots - \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}X_{2m}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R\frac{dx_{2m}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}X_1 + \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}X_2 + \dots\dots \quad * \quad . \end{cases}$$

Aggregatum R gaudet proprietatibus plane analogis earum quae de Determinantibus circumferuntur. Quarum gravissima ea est ut *binis indicum* $1, 2, \dots 2m$ *inter se permutatis simul omnes ipsius* R *termini valores oppositos induant ideoque ipsum* R *in valorem oppositum abeat.* Porro fit

$$6.\quad R = a_{1,i}\frac{\partial R}{\partial a_{1,i}} + a_{2,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2,i}} \dots + a_{2m,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2m,i}},$$

et quoties i et k inter se diversi sunt,

$$7.\quad 0 = a_{1,i}\frac{\partial R}{\partial a_{1,k}} + a_{2,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2,k}} \dots + a_{2m,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2m,k}},$$

ubi terminus in $a_{k,i}$ ductus ommittendus est. Designantibus i, i', i'' etc. indices inter se diversos, si sumuntur differentialia partialia

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,i'}}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'}\,\partial a_{i'',i'''}}, \quad \text{etc.}$$

ea erunt aggregata ad instar aggregati R formata, respective reiectis Coëfficientium binis, quatuor etc. seriebus cum horizontalibus tum verticalibus, eritque

$$8.\quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'}\,\partial a_{i'',i'''}} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i''}\,\partial a_{i''',i'}} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'''}\,\partial a_{i',i''}}.$$

His rebus praemissis, quarum demonstrationem aliis relinquo vel ad alium locum relego, Multiplicator quaesitus sic invenitur. Sequitur e (5*.), siquidem signo summatorio subscribuntur indices quorum respectu summatio instituenda est,

$$9.\quad R\frac{dx_i}{dt} = A_i = \sum_\alpha \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}X_\alpha,$$

unde

$$10.\quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = -\sum_{\alpha,i}\frac{\partial.\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} - \sum_{\alpha,i}\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}.\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i},$$

ubi indicibus α et i tribuuntur valores $1, 2, \dots 2m$, solis ommissis valoribus $i = \alpha$. Examinemus formulae (10.) summam priorem. Aggregati $\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}$ cum terminus nullus afficiatur elemento cuius alter index est α aut i, fit

$$\frac{\partial . \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\, \partial a_{k,l}} . \frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i},$$

summatione duplici ad omnes $\frac{(2m-2)(2m-3)}{1\,.\,2}$ combinationes extensa, quibus indices k et l valores obtinent et inter se et ab ipsis α et i diversos. E formula antecedente sequitur,

$$\sum_i \frac{\partial . \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = \sum_{i,k,l} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\, \partial a_{k,l}} . \frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i},$$

ubi indicum i, k, l valores in quoque termino sub signo summatorio et inter se et ab indice α diversi sunt, ipsi i valores $1, 2, \ldots . 2m$ conveniunt, binorum k et l valores non inter se permutari debent. Unde triplex summa conflatur e $\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1\,.\,2\,.\,3}$ terminis huiusmodi,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\, \partial a_{k,l}} \left\{ \frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{l,i}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l} \right\},$$

qui obtinentur sumendo pro indicibus i, k, l ternos diversos ex indicibus $1, 2, \ldots . \alpha-1, \alpha+1, \ldots . 2m$. At substituendo quantitatum $a_{i,k}$ valores (3.), ternorum terminorum uncis inclusorum summa,

$$\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{l,i}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l},$$

identice evanescit, ideoque pro quoque ipsius α valore fit,

$$11. \quad \sum_i \frac{\partial . \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = 0,$$

sive formulae (10.) prior summa evanescit. Alterius summae valor facile invenitur permutando indices α et i formulamque (6.) in auxilium vocando, quae summata pro omnibus indicis i valoribus suppeditat,

$$\sum_{\alpha,i} a_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} = 2m.R.$$

Hinc enim fit,

$$\sum_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} . \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} \left\{ \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} \right\} = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,i} \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} a_{\alpha,i} = mR.$$

Unde iam formula (10.) in hanc abit,

$$12. \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \ldots . + \frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = mR.$$

Cuius formulae pars laeva cum secundum (5.) et (9.) ipsi $-R\frac{d \log M}{dt}$ aeque-

tur, aequationum differentialium (4.) Multiplicatorem statuere licet

$$13.\qquad M = e^{-mt}.$$

Docet ea formula, aequationibus differentialibus (4.) complete integratis ad eruendam relationem inter t et variabiles x_i nulla amplius opus esse Quadratura, sed valorem integralis

$$\int \frac{R\,dx_i}{A_i} = t + \text{Const.}$$

exhiberi posse per logarithmum Determinantis functionum quae Constantibus Arbitrariis aequantur.

Ponamus quod semper licet $X_{2m} = -1$ sintque Coëfficientes reliqui omnes $X_1, X_2, \ldots, X_{2m-1}$ a variabili x_{2m} vacui, redit problema *Pfaffianum* in hoc, *ut expressio differentialis* $2m-1$ *variabilium*

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2m-1}\,dx_{2m-1}$$

per $m-1$ *aequationes finitas reddatur differentiale completum* dx_{2m}. Scilicet ea re effecta, obtinetur m^{ta} aequatio per solas Quadraturas,

$$x_{2m} + \text{Const.} = \int \{X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2m-1}\,dx_{2m-1}\}.$$

Eo casu evanescunt omnes quantitates $a_{i,2m}$ ideoque ipsum quoque dt, unde aequationes differentiales (2.) in has abeunt,

$$14.\qquad \begin{cases} 0 = \quad * \quad + a_{1,2}\,dx_2 + a_{1,3}\,dx_3 \ldots + a_{1,2m-1}\,dx_{2m-1}, \\ 0 = a_{2,1}\,dx_1 \quad * \quad + a_{2,3}\,dx_3 \ldots + a_{2,2m-1}\,dx_{2m-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_{2m-1,1}\,dx_1 + a_{2m-1,2}\,dx_2 + a_{2m-1,3}\,dx_3 \ldots\ldots \quad * \end{cases}$$

Quarum una e reliquis fluit, sicuti sequitur summando aequationes respective per $\frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}, \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}, \ldots \frac{\partial R}{\partial a_{2m-1,2m}}$ multiplicatas. Evanescentibus $a_{i,2m}$ evanescunt et ipsum R et omnia ipsius R differentialia $\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}}$, in quibus neuter indicum i et k ipsi $2m$ aequatur. Unde e (9.) fit,

$$A_1 = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}, \quad A_2 = \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}, \quad \ldots \quad A_{2m-1} = \frac{\partial R}{\partial a_{2m-1,2m}},$$

$$A_{2m} = X_1 A_1 + X_2 A_2 \ldots + X_{2m-1} A_{2m-1}.$$

Cum A_{2m} a variabili x_{2m} vacua sit, formula (12.) abit in hanc,

$$15.\qquad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_{2m}} \ldots + \frac{\partial A_{2m-1}}{\partial x_{2m-1}} = 0.$$

Quae docet, *aequationum differentialium quae e* (14.) *proveniunt,*

$$16.\qquad dx_1 : dx_2 \ldots : dx_{2m-1} = A_1 : A_2 \ldots : A_{2m-1}$$

Multiplicatorem aequari unitati.

Principium ultimi Multiplicatoris applicemus exemplo simplicissimo quo $m=2$ sive quo aequationes differentiales proponuntur,

$$17.\quad dx_1 : dx_2 : dx_3 = \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} : \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} : \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

Inventa per primam integrationem variabilis x_3 expressione per x_1, x_2 et Constantem Arbitrariam α, secundum principium illud fit altera aequatio integralis,

$$18.\quad \int \frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\left\{\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) dx_2\right\} = \text{Const.}$$

Quantitatem sub integrationis signo differentiale completum esse, sic verificari potest. Substituta variabilis x_3 expressione per integrationem primam inventa in formula $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$, obtinetur

$$\left(X_1 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(X_2 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right) dx_2.$$

Eadem expressione substituta in aequationibus differentialibus, prodit aequatio,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right\} + \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\left\{\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right\},$$

quae est conditio ut formula differentialis antecedens sit differentiale aliquod completum dx_4. Si ipsius x_3 expressio implicat Constantem Arbitrariam α, fit

$$\begin{aligned} d.\frac{\partial x_4}{\partial \alpha} &= \frac{\partial\left\{X_1 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right\}}{\partial \alpha} dx_1 + \frac{\partial\left\{X_2 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right\}}{\partial \alpha} dx_2 \\ &= \frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\left\{\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}.\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}.\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right) dx_2\right\} \\ &\qquad + X_3\left\{\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial \alpha} dx_1 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2 \partial \alpha} dx_2\right\} \\ &= \frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\left\{\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) dx_2\right\} \\ &\qquad + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} dX_3 + X_3 d\frac{\partial x_3}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Unde sequitur, quod propositum erat, quantitatem sub integrationis signo aequari differentiali completo, videlicet differentiali

$$d.X_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} - d.\frac{\partial x_4}{\partial \alpha}.$$

Quod si igitur functio x_4 inventa est, aequationem integralem (18.) sic quoque repraesentare licet,

$$19.\quad X_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_4}{\partial \alpha} = \text{Const.}$$

Quae de formulis quoque generalibus deduci potuit, quas loco citato tradidi de

aequationum differentialium (2.) systemate per solutionem completam aequationis (1.) integrando. Qua de integratione hac occasione novas addam propositiones novasque demonstrationes sequentes.

§. 21.

Ac primum comprobabo propositionem, *si aequatio differentialis singularis*

$$20. \quad X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots . + X_p\,dx_p = 0$$

integretur per m aequationes quascunque, earum ope fieri, ut de quibusque m e numero p aequationum differentialium sequentium,

$$21. \quad \begin{cases} X_1\,dt = \quad * \quad + a_{1,2}\,dx_2 + a_{1,3}\,dx_3 \ldots . + a_{1,p}\,dx_p, \\ X_2\,dt = a_{2,1}\,dx_1 \quad * \quad + a_{2,3}\,dx_3 \ldots . + a_{2,p}\,dx_p, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ X_p\,dt = a_{p,1}\,dx_1 + a_{p,2}\,dx_2 + a_{p,3}\,dx_3 \ldots \ldots \ldots * \end{cases}$$

reliquae p—m sponte fluant, ipsis $a_{k,k'}$ designantibus quantitates $\frac{\partial X_k}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_k}$. Cuius propositionis demonstrationem sic adorno.

Designo

per h, h' etc. indices $1, 2, \ldots . m$,

per i, i' etc. indices $m+1, m+2, \ldots . p$,

per k, k' etc. indices $1, 2, 3, \ldots . p$.

Aequando $x_1, x_2, \ldots . x_m$ *quibuscunque* reliquarum variabilium $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots . x_p$ functionibus, abeunt aequationes (21.) in sequentes:

$$22. \quad 0 = u_k = X_k\,dt - \sum_i b_{k,i}\,dx_i,$$

siquidem statuitur,

$$23. \quad b_{k,i} = a_{k,1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + a_{k,2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots . + a_{k,m}\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + a_{k,i}$$
$$= a_{k,i} + \sum_h a_{k,h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}.$$

Ponamus porro

$$24. \quad v_i = X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots . + X_m\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,$$

erit substituendo (22.):

$$25. \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}u_2 \ldots . + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}u_m + u_{i'} = v_{i'}\,dt - \sum_i c_{i',i}\,dx_i,$$

posito

$$26. \quad c_{i',i} = \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}b_{1,i} + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}b_{2,i} \ldots . + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}b_{m,i} + b_{i',i}$$
$$= b_{i',i} + \sum_h \frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}}b_{h,i}.$$

Substituendo ipsorum $b_{k,i}$ valores (23.), induit $c_{i',i}$ valorem sequentem,

$$27. \quad c_{i',i} = a_{i',i} + \sum_h a_{i',h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i} + \sum_h a_{h,i}\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}} + \sum_{h,h'} a_{h',h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}},$$

sive reponendo quantitatum $a_{k,k'}$ valores,

$$28. \quad c_{i',i} = \frac{\partial X_{i'}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_{i'}} + \sum_h \left\{\frac{\partial X_{i'}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_{i'}}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_i} + \sum_h \left\{\frac{\partial X_h}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_h}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}}$$
$$+ \sum_{h,h'}\left\{\frac{\partial X_{h'}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_{h'}}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}}.$$

Includamus uncis differentialia partialia, in quibus solae x_i sive $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_p$ pro independentibus habentur atque quantitates x_h sive $x_1, x_2, \ldots x_m$ pro earum functionibus: erit

$$29. \quad \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + \sum_h \frac{\partial X_k}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial x_h}{\partial x_i},$$

unde

$$30. \quad c_{i',i} = \left(\frac{\partial X_{i'}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_{i'}}\right) + \sum_h \left\{\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial x_{i'}}\right)\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\right\}.$$

Id quod sequitur, indicibus h et h' in summa duplici $\sum_{h,h'} \frac{\partial X_{h'}}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}}$ inter se permutatis nec non in (29.) scripto h' ipsius h loco. Inventam autem ipsius $c_{i',i}$ expressionem (30.) ope formulae (24.) sic exhibere licet,

$$31. \quad c_{i',i} = \left(\frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}}\right),$$

reiectis qui se mutuo destruunt terminis,

$$X_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial x_{i'}\partial x_i} - X_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial x_i \partial x_{i'}}.$$

Quo ipsius $c_{i',i}$ valore substituto in (25.), eruimus formulam, quae valet *quaecunque sint quantitates x_h reliquarum x_i functiones*,

$$32. \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}u_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}u_m + u_{i'} = v_{i'}dt + \sum_i \left\{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}}\right) - \left(\frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i}\right)\right\}dx_i.$$

Quantitatibus x_h per variabiles x_i expressis cum fiat e (24.)

$$33. \quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_p dx_p = v_{m+1}dx_{m+1} + v_{m+2}dx_{m+2} \ldots + v_p dp,$$

si per m aequationes, quibus quantitates x_h per variabiles $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_p$ determinantur, aequatio differentialis (20.) integratur, singuli termini ad dextram formulae (33.) per se evanescere debent, sive fieri debet

$$34. \quad v_{m+1} = v_{m+2} \ldots = v_p = 0.$$

Unde etiam aequationis (32.) pars laeva evanescere debet sive, scribendo i ipsius i' loco, pro quolibet ipsius i valore fieri debet,

$$34^*. \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_i}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i}u_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_i}u_m + u_i = 0.$$

Quae formula docet, si per m aequationes integretur aequatio differentialis (20.), earum aequationum ope fieri, ut ex aequationibus

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots\dots \quad u_m = 0$$

reliquae

$$u_{m+1} = 0, \quad u_{m+2} = 0, \quad \dots\dots \quad u_p = 0$$

sponte fluant. Q. D. E.

Si $p > 2m$, inter coëfficientes X_1, X_2 etc. certae quaedam locum habere debent relationes, cum determinando m functiones $x_1, x_2, \dots\dots x_m$ satisfieri debeat pluribus conditionibus, videlicet $p-m$ aequationibus,

$$0 = v_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i.$$

Quae relationes obtineri possunt e formula (32.). Nam secundum eam formulam aequationibus differentialibus (21.) sive aequationibus

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots\dots \quad u_p = 0$$

satisfit per numerum $2m$ aequationum, videlicet per m aequationes, quibus $x_1, x_2, \dots\dots x_m$ per reliquas variabiles determinantur, atque m aequationes differentiales $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \dots\dots u_m = 0$. Unde inter quantitates X_1, X_2 etc. tales locum habere debent relationes, ut de p aequationum (21.) numero $2m$ reliquae $p-2m$ sponte fluant sive, ope $2m$ aequationum differentialium $u_1=0$, $u_2=0, \dots\dots u_{2m}=0$ eliminatis $2m$ differentialibus $dx_1, dx_2, \dots\dots dx_{2m}$, reliquae $p-2m$ aequationes differentiales, $u_{2m+1}=0$, $u_{2m+2}=0, \dots\dots u_p=0$, identicae evadant. Secundum observationem olim a me factam in Diar. *Crell.* Vol. II. pag. 357, hae $p-2m$ aequationes post eam eliminationem formam induunt eandem atque propositae (21.), videlicet formam huiusmodi,

$$\begin{array}{llllll}
F_1\,dt = & * & + f_{1,2}\,dx_{2m+2} & + f_{1,3}\,dx_{2m+3} \dots & + f_{1,p-2m}\,dx_p, \\
F_2\,dt = & f_{2,1}\,dx_{2m+1} & * & + f_{2,3}\,dx_{2m+3} \dots & + f_{2,p-2m}\,dx_p, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
F_{p-2m}\,dt = & f_{p-2m,1}\,dx_{2m+1} & + f_{p-2m,2}\,dx_{2m+2} & \dots\dots & *,
\end{array}$$

ubi $f_{i,k} = -f_{k,i}$. Quae aequationes ut identicae evadant, evanescere debent et $p-2m$ quantitates F_i et $\frac{(p-2m)(p-2m-1)}{2}$ quantitates $f_{i,k}$. Unde *locum habere debent* $\frac{(p-2m)(p-2m+1)}{1\,.\,2}$ *conditiones ut aequatio differentialis linearis primi ordinis inter p variabiles* (20.) *per* $m < \frac{1}{2}p$ *aequationes integrari possit, eaedemque sunt conditiones quibus efficitur, ut p aequationes lineares* (21.) *ex earum numero* $2m$ *fluant.* Si $p = 2m+1$, prodit una conditio iam a Cl. *Pfaff* olim exhibita, quae si $m = 1$ notam conditionem integrabilitatis suppeditat. Si $p = 2m+2$, locum habere debent tres conditiones, quas pro $m = 1$ accuratius examinemus.

Sit igitur propositum indagare conditiones, ut aequatio differentialis linearis inter *quatuor* variabiles,

$$35.\quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$

unica aequatione integrari possit. Qua aequatione si exprimitur una variabilium x_4 per x_1, x_2, x_3, proposita (35.) identica fieri debet, id quod aequationes poscit sequentes,

$$36.\quad \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = -\frac{X_1}{X_4},\quad \frac{\partial x_4}{\partial x_2} = -\frac{X_2}{X_4},\quad \frac{\partial x_4}{\partial x_3} = -\frac{X_3}{X_4}.$$

Secunda et tertia earum aequationum suppeditat,

$$X_4^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2\, \partial x_3} = X_2 \left\{\frac{\partial X_4}{\partial x_3} - \frac{X_3}{X_4}.\frac{\partial X_4}{\partial x_4}\right\} - X_4 \left\{\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{X_3}{X_4}.\frac{\partial X_2}{\partial x_4}\right\}$$
$$= X_3 \left\{\frac{\partial X_4}{\partial x_2} - \frac{X_2}{X_4}.\frac{\partial X_4}{\partial x_4}\right\} - X_4 \left\{\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{X_2}{X_4}.\frac{\partial X_3}{\partial x_4}\right\}.$$

Unde ponendo $a_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$ similesque aequationes de tertia et prima, de prima et secunda aequationum (36.) deducendo obtinentur tres primae aequationum sequentium, quibus duas alias addidi ex iis provenientes,

$$37.\quad \begin{cases} 0 = \quad * \quad + a_{3,4} X_2 + a_{4,2} X_3 + a_{2,3} X_4, \\ 0 = a_{4,3} X_1 \quad * \quad + a_{1,4} X_3 + a_{3,1} X_4, \\ 0 = a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 \quad * \quad + a_{1,2} X_4, \\ 0 = a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3 \quad * \quad, \\ 0 = a_{2,3} a_{1,4} + a_{3,1} a_{2,4} + a_{1,2} a_{3,4}. \end{cases}$$

Ad easdem autem relationes secundum propositionem generalem supra conditam pervenire debemus, si quaerimus conditiones ut quatuor aequationum linearium,

$$\begin{aligned} X_1 dt &= \quad * \quad + a_{1,2} dx_2 + a_{1,3} dx_3 + a_{1,4} dx_4, \\ X_2 dt &= a_{2,1} dx_1 \quad * \quad + a_{2,3} dx_3 + a_{2,4} dx_4, \\ X_3 dt &= a_{3,1} dx_1 + a_{3,2} dx_2 \quad * \quad + a_{3,4} dx_4, \\ X_4 dt &= a_{4,1} dx_1 + a_{4,2} dx_2 + a_{4,3} dx_3 \quad * \end{aligned}$$

binae e duabus reliquis fluant. Quod re vera fieri, facile comprobatur. Aequationum (37.) quatuor primae sunt notae conditiones integrabilitatis aequationis differentialis linearis primi ordinis inter tres variabiles, ex eadem aequatione (35.) provenientis si successive x_1, x_2, x_3, x_4 constantes ponuntur. Quatuor illarum aequationum ternae cum quartam secum ducant, sequitur, *si tres aequationes,*

$$\begin{aligned} X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 &= 0, \\ X_1 dx_1 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 &= 0, \\ X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_4 dx_4 &= 0, \end{aligned}$$

habitis respective x_1, x_2, x_3 pro Constantibus, conditioni integrabilitatis

satisfaciant, hanc quoque aequationem,

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0,$$

si in ea x_4 pro Constante habeatur, conditioni integrabilitatis satisfacturam esse, nec non aequationem, $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$, in qua omnes quatuor quantitates x_1, x_2, x_3, x_4 variabiles sunt, unica aequatione integrari posse. Ut ipsa absolvatur integratio, opus erit integratione completa trium aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles, id quod simili ratione demonstratur atque in tractatibus Calculi Integralis probatur, ad integrandam aequationem differentialem linearem primi ordinis inter tres variabiles, conditioni integrabilitatis satisfacientem, requiri integrationem completam duarum aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Quae res in tractatibus ita proponi solet, ut alteram ne condere quidem liceat aequationem differentialem, nisi iam antea altera complete integrata habeatur. At observo, si aequatio differentialis inter tres variabiles x_1, x_2, x_3, conditioni integrabilitatis satisfaciens, est $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0$, pro duabus aequationibus inter duas variabiles integrandis sumi posse has, quae *separatim* tractari possint,

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = 0, \qquad X_2^0 dx_2 + X_3^0 dx_3 = 0,$$

quae e proposita proveniunt, prima habendo x_3 pro Constante, secunda ponendo $x_1 = 0$. Scilicet post integrationem secundae in locum ipsius x_2 substituenda est ea quantitatum x_1, x_2, x_3 functio, quae per integrationem primae aequiparatur valori variabilis x_2 qui ipsi $x_1 = 0$ respondet. Similiter, si proponitur integrare aequationem inter quatuor variabiles,

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$

conditionibus (37.) locum habentibus, pro tribus aequationibus inter duas variabiles, quae integrandae sunt, sumi possunt sequentes separatim tractandae,

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = 0, \quad X_2^0 dx_2 + X_3^0 dx_3 = 0, \quad X_3^{00} dx_3 + X_4^{00} dx_4 = 0,$$

in quibus designant X_2^0 et X_3^0 valores in quos X_2 et X_3 abeunt pro $x_1 = 0$, porro X_3^{00} et X_4^{00} valores in quos X_3 et X_4 pro $x_1 = x_2 = 0$ abeunt; deinde in prima aequatione x_3 et x_4, in secunda x_4 pro Constantibus habendae sunt. Integrata tertia aequatione, ipsi x_3 ea substituenda est quantitatum x_2, x_3, x_4 functio, quae per integrationem secundae aequat variabilis x_3 valorem ipsi $x_2 = 0$ respondentem; ac deinde ipsi x_2 ea quantitatum x_1, x_2, x_3, x_4 functio substituenda est, quae per aequationis primae integrationem aequat variabilis x_2 valorem ipsi $x_1 = 0$ respondentem.

Propositis p aequationibus differentialibus vulgaribus inter $p+1$ variabiles quibuscunque, aequationes m inter ipsas variabiles sunt integrales propositarum,

si efficiunt, ut harum numerus m e reliquis $p-m$ fluat; porro tale constituunt aequationum integralum systema, e quo per differentiationem aequationumque differentialium substitutionem aliae novae non obtineantur, si earum adiumento non plures quam m aequationes differentiales e reliquis fluunt. Antecedentibus vidimus, per m aequationes, quibus integretur aequatio differentialis vulgaris linearis inter p variabiles (20.), fieri ut e p aequationum differentialium vulgarium (21.) numero m reliquae $p-m$ sponte fluant. Unde si $p-m=m$ sive $p=2m$, qui est casus problematis *Pfaffiani*, sequitur, *quascunque* m aequationes, quibus integretur aequatio differentialis linearis primi ordinis inter $2m$ variabiles,

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots\ldots + X_{2m}\,dx_{2m},$$

haberi posse pro integralibus systematis $2m$ aequationum differentialium vulgarium,

$$X_k\,dt = a_{k,1}\,dx_1 + a_{k,2}\,dx_2 \ldots\ldots + a_{k,2m}\,dx_{2m},$$

ex iisque per differentiationem novas deduci non posse aequationes integrales. Si $m < \frac{1}{2}p$ atque aequatio (20.) integrari potest m aequationibus, vidimus p aequationum (21.) tantum $2m$ a se independentes esse, reliquas $p-2m$ ex iis sponte fluere; unde ex arbitrio iis addere licet $p-2m$ aequationes differentiales, ut habeatur systema p aequationum differentialium inter $p+1$ variabiles. Eo casu aequationes m, quibus aequatio (20.) integrari supponitur, rursus haberi possunt pro aequationibus eius systematis integralibus, quaecunque sint $p-2m$ aequationes differentiales ipsis (21.) ex arbitrio adiectae, cum illae m aequationes efficiant, quod e (32.) sequebatur, ut m aequationes differentiales $u_{m+1}=0$, $u_{m+2}=0$, ... $u_{2m}=0$ ex aliis systematis aequationibus differentialibus, $u_1=0$, $u_2=0$, ... $u_m=0$ obtineantur.

Designantibus A_1, A_2 etc. quascunque variabilium x_1, x_2, ... x_p functiones, quoties aequationum differentialium,

$$dx_1 : dx_2 \ldots\ldots : dx_p = A_1 : A_2 \ldots\ldots A_p,$$

dantur aequationes integrales m, quarum differentiatione aliae novae non prodeunt, earumque ope exprimuntur x_1, x_2, ... x_m ut functiones variabilium x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_p, eas functiones satisfacere constat systemati aequationum differentialium partialium linearium primi ordinis sequenti,

$$38.\quad \begin{cases} A_1 = A_{m+1}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}} \ldots\ldots + A_p\dfrac{\partial x_1}{\partial x_p}, \\ A_2 = A_{m+1}\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}} \ldots\ldots + A_p\dfrac{\partial x_2}{\partial x_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m = A_{m+1}\dfrac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\dfrac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}} \ldots\ldots + A_p\dfrac{\partial x_m}{\partial x_p}. \end{cases}$$

Qua de re pluribus egi in alia Commentatione Diar. *Crell.* Vol. XXIII. inserta. Systema (38.) ita est comparatum ut in quaque aequatione eiusdem functionis reperiantur differentialia partialia secundum diversas variabiles independentes sumta, atque differentialia partialia diversarum functionum secundum eandem variabilem independentem in diversis aequationibus sumta eodem afficiantur Coëfficiente. Eiusmodi systematis hoc, a cuius solutione problema *Pfaffianum* pendet,

$$39.\qquad v_{m+1}=0,\quad v_{m+2}=0,\quad \dots\dots\quad v_{2m}=0,$$

quodammodo inversum est, sicuti e functionis v_i expressione (24.) patet; quippe in quaque huius systematis aequatione diversarum functionum differentialia reprehenduntur secundum eandem variabilem sumta, atque eiusdem functionis differentialia, secundum diversas variabiles independentes in diversis aequationibus sumta, eodem afficiuntur Coëfficiente. Secundum antecedentia e systemate (39.) sequitur aliud eius inversum formae systematis (38.). Nam ubi aequationes (2.) ad formam aequationum (9.) revocamus, sequitur ex antecedentibus, m aequationes quae systemati (39.) satisfaciant sive quibus (1.) integretur, ipsarum (9.) fieri aequationes integrales, quarum differentiatione aliae novae non prodeant, ideoque easdem systemati aequationum (38.) satisfacere. Unde haec obtinetur

Propositio.

„E systemate aequationum differentialium partialium linearium primi ordinis huiusmodi,

$$39^*.\quad \begin{cases} X_{m+1} = X_1\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}}+X_2\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}}\dots\dots+X_m\dfrac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}},\\ X_{m+2} = X_1\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}}+X_2\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}}\dots\dots+X_m\dfrac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ X_{2m} = X_1\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{2m}}+X_2\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{2m}}\dots\dots+X_m\dfrac{\partial x_m}{\partial x_{2m}}, \end{cases}$$

hoc sequitur alterum formae quodammodo inversae,

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{m+1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}}+A_{m+2}\frac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}}\dots\dots+A_{2m}\frac{\partial x_1}{\partial x_{2m}},\\ A_2 &= A_{m+1}\frac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}}+A_{m+2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}}\dots\dots+A_{2m}\frac{\partial x_2}{\partial x_{2m}},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_m &= A_{m+1}\frac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}}+A_{m+2}\frac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}}\dots\dots+A_{2m}\frac{\partial x_m}{\partial x_{2m}}, \end{aligned}$$

ubi, posito $a_{k,k'}=\dfrac{\partial X_k}{\partial x_{k'}}-\dfrac{\partial X_{k'}}{\partial x_k}$ *ac designante* R *aggregatum, e* 1.3.5...

... (2m—1) *terminis huiusmodi*

$$a_{1,2}\, a_{3,4} \dots . a_{2m-1,2m}$$

ratione supra descripta conflatum, fit

$$A_k = \frac{\partial R}{\partial a_{1,k}} X_1 + \frac{\partial R}{\partial a_{2,k}} X_2 \dots . + \frac{\partial R}{\partial a_{2m,k}} X_{2m},$$

omisso termino in X_k *ducto.*"

Huius memorabilis propositionis si demonstrationem cupis ab aequationum differentialium vulgarium consideratione independentem, rem sic adornare licet.

Sit rursus

$$v_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \dots . + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,$$

ac designantibus

$$y,\ y_1,\ \dots .\ y_{2m}$$

quantitates *indefinitas*, ponatur

$$U_k = X_k . y - a_{k,1} y_1 - a_{k,2} y_2 \dots . - a_{k,2m} y_{2m},$$

$$Y_h = y_h - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+1}} y_{m+1} - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+2}} y_{m+2} \dots . - \frac{\partial x_h}{\partial x_{2m}} y_{2m},$$

$$u_k = U_k + a_{k,1} Y_1 + a_{k,2} Y_2 \dots . + a_{k,m} Y_m.$$

Eodem modo atque (32.) probavimus, demonstratur, quaecunque sint x_1, x_2, ... x_m reliquarum variabilium x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_{2m} functiones, fieri

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_i} u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} u_2 \dots . + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} u_m + u_i = v_i y + \sum_{i'} \left\{ \left(\frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}}\right) \right\} y_{i'}.$$

Partes ad dextram signi aequalitatis evanescunt, ubi pro x_1, x_2, ... x_m sumuntur functiones satisfacientes m aequationibus $v_i = 0$, quae sunt ipsae functiones in theoremate tradito propositae, quas a se independentes esse subintelligo. Hinc si quantitatum u_k expressiones substituuntur atque statuitur

$$L_{i,h} = \frac{\partial x_1}{\partial x_i} a_{1,h} + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} a_{2,h} \dots . + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} a_{m,h} + a_{i,h},$$

sequitur per m aequationes $v_i = 0$ obtineri m sequentes,

$$40. \quad 0 = \frac{\partial x_1}{\partial x_i} U_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} U_2 \dots . + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} U_m + L_{i,1} Y_1 + L_{i,2} Y_2 \dots . + L_{i,m} Y_m.$$

Supponamus, quantitatum indefinitarum y, y_1 etc. functiones lineares U_1, U_2, ... U_{2m} a se independentes esse, sive quantitatem, supra per R designatam,

$$\Sigma\, a_{1,2}\, a_{3,4} \dots . a_{2m-1,2m}$$

neque per se neque substituendo functionum x_k valores evanescere. Quae se-

cundum supra tradita est conditio ut aequatio

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \dots + X_{2m} dx_{2m} = 0$$

non paucioribus quam m aequationibus integrari possit. Eo casu etiam m functiones ipsarum Y_1, Y_2, ... Y_m lineares, quas per H_i designabo,

$$L_{i,1} Y_1 + L_{i,2} Y_2 \dots + L_{i,m} Y_m = H_i,$$

a se independentes erunt, sive non dabuntur factores ab ipsis y_k independentes λ_1, λ_2 etc., qui efficiant

$$\lambda_1 H_{m+1} + \lambda_2 H_{m+2} \dots + \lambda_m H_{2m} = 0.$$

Nam si eiusmodi dantur factores, secundum (40.) aut $x_1, x_2, \dots x_i$ non a se independentes sunt aut datur aequatio inter functiones lineares $U_1, U_2, \dots U_m$, quod utrumque contra suppositionem est. Functiones autem a se independentes H_{m+1}, H_{m+2}, ... H_{2m} omnes simul evanescere non possunt nisi simul evanescunt omnes Y_1, Y_2, ... Y_m. Iam igitur cum pro ipsarum y, y_1 etc. valoribus

$$y = R, \quad y_1 = A_1, \quad y_2 = A_2, \quad \dots \quad y_{2m} = A_{2m}$$

omnes simul evanescant U_1, U_2, ... U_{2m}, siquidem quantitatum A_k, R valores sunt ipsi in Propositione tradita assignati, ideoque omnes secundum (40.) evanescant H_i, pro valoribus illis omnes quoque Y_1, Y_2, ... Y_m evanescere debent, sive pro ipsius h valoribus 1, 2, ... m fieri debet,

$$0 = A_h - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+1}} A_{m+1} - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+2}} A_{m+2} \dots - \frac{\partial x_h}{\partial x_{2m}} A_{2m},$$

quae est propositio demonstranda.

Propositionis antecedentis pro casu simplicissimo $m=2$ hoc addam exemplum: „Ubi semper ponitur $a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$, ex aequationibus

$$-X_3 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_3},$$

$$-X_4 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_4} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_4}$$

fiunt sequentes,

$$a_{3,4} X_2 + a_{4,2} X_3 + a_{2,3} X_4$$
$$= (a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 + a_{1,2} X_4) \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + (a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3) \frac{\partial x_1}{\partial x_4},$$

$$a_{4,3} X_1 + a_{1,4} X_3 + a_{3,1} X_4$$
$$= (a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 + a_{1,2} X_4) \frac{\partial x_2}{\partial x_3} + (a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3) \frac{\partial x_2}{\partial x_4}.\text{“}$$

Si $p > 2m$ atque variabilium independentium x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_p functiones x_1, x_2, ... x_m ita determinari possunt, ut $p-m$ aequationibus $v_i = 0$ satis-

faciant, habentur *complura systemata* aequationum differentialium partialium, ad instar aequationum (38.) formata. Videlicet e numero m aequationum

$$v_1 = 0,\quad v_2 = 0,\quad \dots\; v_p = 0$$

per Propositionem antecedentem deducere licet alterum m aequationum differentialium partialium systema (38.), eaque ratione aliud aliudque systema (38.) obtinebitur, prout aliae $p-2m$ e $p-m$ variabilibus independentibus Constantium loco habentur.

Ponamus iam esse $x_1, x_2, \dots x_m$ variabilium $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_p$ functiones *involventes Constantem Arbitrariam* α, sitque

$$41.\qquad w = X_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\dots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial\alpha},$$

porro

$$\begin{aligned}
v_i &= X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_i}\dots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,\\
u_k &= X_k dt - \{a_{k,1}dx_1 + a_{k,2}dx_2\dots + a_{k,p}dx_p\}\\
&= X_k dt - dX_k + \frac{\partial X_1}{\partial x_k}dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_k}dx_2\dots + \frac{\partial X_p}{\partial x_k}dx_p\\
&= X_k dt - dX_k + \sum_i\frac{\partial X_i}{\partial x_k}dx_i + \sum_{hi}\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_h}{\partial x_i}dx_i.
\end{aligned}$$

Quae ubi substituuntur in formula,

$$\begin{aligned}
&dw - \left\{\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial\alpha}dX_2\dots + \frac{\partial x_m}{\partial\alpha}dX_m\right\}\\
&= X_1 d\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + X_2 d\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\dots + X_m d\frac{\partial x_m}{\partial\alpha}\\
&= \sum_{hi} X_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial\alpha\,\partial x_i}dx_i,
\end{aligned}$$

obtinetur

$$\begin{aligned}
42.\qquad &dw - w\,dt + \frac{\partial x_1}{\partial\alpha}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial\alpha}u_2\dots + \frac{\partial x_m}{\partial\alpha}u_m\\
&= \sum_i\left\{\left(\frac{\partial X_i}{\partial\alpha}\right) + \sum_k\left[\left(\frac{\partial X_h}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial x_h}{\partial x_i} + X_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial\alpha\,\partial x_i}\right]\right\}dx_i\\
&= \sum_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial\alpha}\right)dx_i,
\end{aligned}$$

siquidem uncis differentialia partialia includendo innuitur, ante differentiationes substitutos esse functionum $x_1, x_2, \dots x_m$ valores. Si m aequationibus, quibus $x_1, x_2, \dots x_m$ determinantur, integratur aequatio,

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2\dots + X_p dp,$$

locum habere debent $p-m$ aequationes $v_i=0$, unde aequationis (42.) dextra pars evanescit sive fit

$$43.\qquad dw-w\,dt+\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}u_1+\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}u_2\ldots\ldots+\frac{\partial x_m}{\partial\alpha}u_m=0.$$

Si $p\geqq 2m$, vidimus supra, m aequationibus illis fieri ut de m aequationibus differentialibus $u_h=0$ fluant $p-m$ reliquae $u_i=0$, ita ut m aequationes illae sint aequationes integrales systematis aequationum differentialium $u_k=0$, quarum $p-2m$ e reliquis fluunt. Formula (43.) docet, si insuper inter variabiles t, x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_p statuatur aequatio $w=\beta e^t$ sive

$$44.\qquad X_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots+X_m\frac{\partial x_m}{\partial\alpha}=\beta e^t,$$

designante β Constantem Arbitrariam, ipsas m aequationes differentiales $u_h=0$ in earum $m-1$ redire, ideoque (44.) esse novam eiusdem systematis $u_k=0$ aequationem integralem. Si m aequationes, quibus aequatio

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2\ldots\ldots+X_p\,dx_p=0$$

integratur, plures involvunt Constantes Arbitrarias, per (44.) totidem obtinentur systematis $u_k=0$ aequationes integrales, quas diversae ingrediuntur Constantes Arbitrariae β, et e quarum binis per solam divisionem eliminatur t. Quae manent aequationes integrales, quaecunque $p-2m$ aequationes differentiales adiiciantur systemati $u_k=0$, quippe quod tantum $2m$ aequationum differentialium vices gerit. Ubi Constantes Arbitrariae sunt numero m, habetur problematis *Pfaffiani* solutio completa, simulque m aequationes (44.) iunctae m aequationibus, quibus aequatio (20.) integratur, suppeditant systematis aequationum differentialium (21.) integrationem completam.

Si $p=2m$, aequationes Constantem Arbitrariam α involventes, quibus aequatio

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2\ldots\ldots+X_{2m}\,dx_{2m}=0$$

integratur et quibus determinabantur functiones x_1, x_2, ... x_m, sunt aequationes integrales systematis aequationum differentialium (2.), sive resolutione earum provenientium (4.):

$$dx_1:dx_2\ldots\ldots:dx_{2m}=A_1:A_2\ldots\ldots:A_{2m}.$$

Quarum Multiplicatorem, docent formulae (13.) et (44.), per illas m aequationes integrales induere valorem,

$$M=\left\{X_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots+X_m\frac{\partial x_m}{\partial\alpha}\right\}^{-m}.$$

Si $X_{2m} = -1$ atque omnes $X_1, X_2, \ldots. X_{2m-1}$ variabili x_{2m} vacant, vidimus supra Multiplicatorem Constanti aequari. Ac reapse eo casu evanescente dt e (44.) eruitur,

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \ldots. + X_m \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} = \beta,$$

quae ipsarum (4.) aequatio integralis est. Quae pro $m = 2$ cum formula (19.) convenit, quam supra alia via erui.

Methodum ad solvendum problema *Pfaffianum* ab ipso autore adhibitam, data occasione observo, per plures et altiores procedere integrationes quam methodus vera et genuina poscat. Quam novam methodum pro exemplo simplice explicabo. Ad aequationem differentialem

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

per duas aequationes integrandam poscit *Pfaffiana* methodus integrationem completam systematis trium aequationum differentialium primi ordinis inter quatuor variabiles ac deinde unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. Illius igitur systematis Integrali uno invento, secundum illam methodum restat integratio completa duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles sive unius aequationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles ac deinde aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. At observo, si Integrali illo invento exprimatur x_4 per x_1, x_2, x_3, aequationem differentialem propositam abire in aliam linearem primi ordinis inter tres variabiles, conditioni integrabilitatis satisfacientem; cuius integrationem vidimus absolvi posse per integrationes separatas duarum aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Unde in locum aequationis differentialis secundi ordinis tantum integrandae sunt duae aequationes differentiales separatae primi ordinis, quae est reductio maxime insignis; integrationi autem aequationis differentialis primi ordinis postremo praestandae omnino supersedetur. Tractatio huius rei gravissimae completa ac generalis alii Commentationi reservanda est.

Novum Principium Generale Mechanicum quod e Principio Ultimi Multiplicatoris fluit.

§. 22.

Sint x_i, y_i, z_i Coordinatae orthogonales puncti massa m_i praediti; sint vires massam m_i secundum directiones Coordinatarum sollicitantes X_i, Y_i, Z_i. Ubi systema n punctorum materialium $m_1, m_2, \ldots. m_n$ prorsus liberum est, inter tempus t atque Coordinatas punctorum habentur $3n$ aequationes differentiales secundi ordinis,

$$1.\quad \begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} X_i, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} Y_i, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} Z_i. \end{cases}$$

Vires X_i, Y_i, Z_i suppositione maxime generali erunt functiones $3n$ Coordinatarum x_i, y_i, z_i, temporis t atque differentialium primorum Coordinatarum,

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad y'_i = \frac{dy_i}{dt}, \quad z'_i = \frac{dz_i}{dt},$$

quae sunt punctorum velocitates in Coordinatarum directiones proiectae. Secundum (5.) §. 14. systematis aequationum differentialium dynamicarum (1.) Multiplicator definitur formula,

$$2.\quad \frac{d \log M}{dt} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x'_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial y'_i} + \frac{\partial Z_i}{\partial z'_i}\right) = 0,$$

indice i valente ad omnia puncta materialia systematis.

Quoties vires sollicitantes a solis massarum positionibus in spatio pendent sive praeterea etiam a tempore t, quantitates X_i, Y_i, Z_i ipsa x'_i, y'_i, z'_i omnino non involvunt, ideoque evanescente expressione

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x'_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial y'_i} + \frac{\partial Z_i}{\partial z'_i}\right),$$

statuere licet

$$M = 1.$$

Hinc secundum principium ultimi Multiplicatoris sequitur, si systema punctorum materialium liberum sit atque vires mobilia propellentes ab eorum velocitatibus non pendeant, ultimam integrationem, vel si vires etiam a tempore non explicite pendeant, *duas ultimas integrationes* revocari posse ad Quadraturas. Videlicet posteriore casu constat tempus t prorsus separari posse et post alias omnes integrationes transactas per Quadraturam inveniri.

Idem iam demonstrabo pro casu generali quo systema n punctorum materialium non est liberum, sed certis obnoxium est conditionibus, quae exprimantur per aequationes inter Coordinatas x_i, y_i, z_i locum habentes,

$$3.\quad \Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0, \quad \text{etc.}$$

Aequationes differentiales dynamicas pro motu sic impedito praecepit ill. *Lagrange* haberi sequentes,

$$4.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i}\left\{X_i + \lambda\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x_i} \text{ etc.}\right\}, \\ \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i}\left\{Y_i + \lambda\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial y_i} \text{ etc.}\right\}, \\ \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i}\left\{Z_i + \lambda\dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial z_i} \text{ etc.}\right\}, \end{cases}$$

factoribus λ, λ_1 etc. determinatis per aequationes lineares, quae obtinentur substituendo aequationes differentiales (4.) in aequationibus conditionalibus bis differentiatis,

$$\frac{d^2 \Pi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \Pi_1}{dt^2} = 0, \quad \text{etc.}$$

Ad eas aequationes lineares formandas pono

$$5.\quad \begin{cases} U = \Sigma\left\{x_i' \dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i}}{dt} + y_i' \dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i}}{dt} + z_i' \dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i}}{dt}\right\}, \\ U_1 = \Sigma\left\{x_i' \dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}}{dt} + y_i' \dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial y_i}}{dt} + z_i' \dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial z_i}}{dt}\right\}, \\ \quad\text{etc.} \qquad \text{etc.}, \end{cases}$$

fit

$$0 = \frac{d^2 \Pi}{dt^2} = \Sigma\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}.\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}.\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}.\frac{d^2 z_i}{dt^2}\right\} + U,$$

$$0 = \frac{d^2 \Pi_1}{dt^2} = \Sigma\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}.\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_i}.\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z_i}.\frac{d^2 z_i}{dt^2}\right\} + U_1,$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Ubi in his aequationibus substituuntur formulae (4.) atque ponitur,

$$6.\quad \begin{cases} V = U + \Sigma\dfrac{1}{m_i}\left\{\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i} X_i + \dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i} Y_i + \dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i} Z_i\right\}, \\ V_1 = U_1 + \Sigma\dfrac{1}{m_i}\left\{\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x_i} X_i + \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial y_i} Y_i + \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial z_i} Z_i\right\}, \\ \quad\text{etc.} \qquad \text{etc.}, \end{cases}$$

porro

$$7.\quad (\alpha,\beta) = (\beta,\alpha) = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i}\right\},$$

aequationes, quibus λ, λ_1 determinantur, evadunt sequentes,

$$8.\quad \begin{cases} 0 = V + (0,0)\lambda + (0,1)\lambda_1 \text{ etc.}, \\ 0 = V_1 + (1,0)\lambda + (1,1)\lambda_1 \text{ etc.}, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

His de factorum λ, λ_1 etc. valoribus praemissis, aequationum *Lagrangianarum* (4.) investigabo Multiplicatorem.

Ac primum observo, secundum ea quae de viribus sollicitantibus statuta sunt, in dextris partibus aequationum (4.) solos factores λ, λ_1 etc. implicare differentialia prima x'_i, y'_i, z'_i. Unde e (5.) §. 14. Multiplicator M definietur formula,

$$-\frac{d\log M}{dt} = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z'_i}\right\}$$
$$+\Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial z'_i}\right\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.},$$

quam posito

$$9.\quad A_{\alpha,\beta} = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\lambda_\beta}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\lambda_\beta}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\lambda_\beta}{\partial z'_i}\right\},$$

sic exhibere licet

$$10.\quad d\log M = -\{A_{0,0} + A_{1,1} + \text{etc.}\}\,dt.$$

Ad quantitates $A_{0,0}$, $A_{1,1}$ etc. determinandas, aequationes (5.),

$$0 = V_\beta + (\beta,0)\lambda + (\beta,1)\lambda_1 \text{ etc.},$$

quarum Coëfficientes $(\beta,0)$, $(\beta,1)$ etc. solarum x_i, y_i, z_i functiones sunt, secundum omnes quantitates x'_i, y'_i, z'_i differentientur, aequationesque differentiationibus provenientes respective per quantitates

$$\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}, \quad \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}, \quad \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}$$

multiplicatae consummentur: prodit

$$11.\quad 0 = u_{\alpha,\beta} + (\beta,0)A_{\alpha,0} + (\beta,1)A_{\alpha,1} \text{ etc.},$$

siquidem statuitur

$$u_{\alpha,\beta} = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial z'_i}\right\}.$$

Cum secundum (6.) habeatur

$$\frac{\partial V_\beta}{\partial x'_i} = \frac{\partial U_\beta}{\partial x'_i}, \quad \frac{\partial V_\beta}{\partial y'_i} = \frac{\partial U_\beta}{\partial y'_i}, \quad \frac{\partial V_\beta}{\partial z'_i} = \frac{\partial U_\beta}{\partial z'_i},$$

quantitates $u_{\alpha,\beta}$ sic repraesentare licet,

$$u_{\alpha,\beta} = \Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial U_\beta}{\partial x_i'} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial U_\beta}{\partial y_i'} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial U_\beta}{\partial y_i'}\right\}.$$

At e (5.) obtinetur, evolutione differentialium $d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}$ etc. facta,

$$12. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_\beta}{\partial x_i'} = 2\dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}}{dt}, \\[2ex] \dfrac{\partial U_\beta}{\partial y_i'} = 2\dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i}}{dt}, \\[2ex] \dfrac{\partial U_\beta}{\partial z_i'} = 2\dfrac{d.\dfrac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i}}{dt}, \end{cases}$$

quibus valoribus substitutis fit

$$13. \quad u_{\alpha,\beta} = 2\Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}}{dt} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i}}{dt} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i}}{dt}\right\}$$

Cuius aequationis beneficio obtinentur quantitatum (α, β) per formulam (7.) definitarum differentialia,

$$14. \quad \frac{d.(\alpha,\beta)}{dt} = \frac{d.(\beta,\alpha)}{dt} = \tfrac{1}{2}\{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\}.$$

In aequatione (11.) indici β valores 0, 1, 2 etc. tribuendo obtinentur aequationes lineares quibus quantitas $A_{\alpha,\alpha}$ determinatur. At quantitatum omnium sic inventarum $A_{\alpha,\alpha}$ aggregatum docui per formulam symbolicam concinnam exhiberi posse, quaecunque sint quantitates $u_{\alpha,\beta}$. Vocetur enim R earum aequationum linearium Determinans sive sit

$$\Sigma \pm (00)(11)(22) \ldots = R,$$

atque statuatur

$$\tfrac{1}{2}\{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\}\, dt = \delta(\alpha,\beta) = \delta(\beta,\alpha):$$

sequitur per ratiocinia similia atque §. 16. adhibui,

$$-\{A_{0,0} + A_{1,1} + \text{etc.}\}\, dt = \delta \log R.$$

Undé cum secundum (14.) sit

$$\delta(\alpha,\beta) = d(\alpha,\beta) \quad \text{ideoque} \quad \delta \log R = d \log R,$$

eruitur e (10.),

$$-\{A_{0,0} + A_{1,1} + \text{etc.}\}\, dt = d \log M = d \log R,$$

id quod suppeditat

$$15. \quad M = R = \Sigma \pm (00)(11)(22) \ldots,$$

qui est Multiplicatoris quaesiti valor.

Operae pretium est adnotare, aequationem inventam $M=R$ non tantum ad casum valere quo functiones X_i, Y_i, Z_i, viribus sollicitantibus aequales, tempus t explicite continent, sed ad hunc quoque casum *quo tempus t ipsas explicite afficit aequationes conditionales $\Pi=0$, $\Pi_1=0$ etc.* Eo casu aequationes dynamicae *Lagrangianae* (4.) eandem servant formam, sed factoribus λ, λ_1 etc. alii competunt valores; quippe quantitatibus U, U_1 etc. ideoque etiam quantitatibus V, V_1 etc. quae aequationum linearium (8.), quibus factores λ, λ_1 etc. determinantur, terminos constantes constituunt, respective addendi sunt termini,

$$2\frac{d.\frac{\partial \Pi}{\partial t}}{dt},\qquad 2\frac{d.\frac{\partial \Pi_1}{\partial t}}{dt},\quad \text{etc.}$$

At patet, inde non mutari aequationes (12.); unde aequationes quoque (13.) et (14.) immutatae manebunt ideoque formula pro aggregato $\varDelta_{0,0}+\varDelta_{1,1}$ etc. inventa ideoque etiam ipsius Multiplicatoris valor R.

Si vires sollicitantes X_i, Y_i, Z_i solarum functiones sunt Coordinatarum x_i, y_i, z_i, atque inter has solas dantur aequationes conditionales $\Pi=0$, $\Pi_1=0$ etc., valor $M=R$ inventus secundum principium ultimi Multiplicatoris hoc suppeditat theorema:

Novum Principium Generale Mechanicum.

„*Proponatur motus systematis n punctorum materialium, quae in datis superficiebus vel curvis aut dato quocunque modo inter se connexa manere debent, ita ut inter Coordinatas eorum locum habeant k aequationes conditionales; porro vires sollicitantes et magnitudine et directione solis punctorum positionibus datae sint: semper duas ultimas integrationes absolvere licet Quadraturis. Sint enim*

punctorum massae $m_1, m_2, \dots m_n$;

massae m_i *Coordinatae orthogonales* x_i, y_i, z_i, *earumque differentialia prima* $x_i'=\frac{dx_i}{dt}$, $y_i'=\frac{dy_i}{dt}$, $z_i'=\frac{dz_i}{dt}$;

sint aequationes conditionales $\Pi=0$, $\Pi_1=0$, $\dots$ $\Pi_{k-1}=0$ *et differentiatione prima ex iis provenientes* $\Pi'=0$, $\Pi_1'=0$, $\dots$ $\Pi_{k-1}'=0$, *ubi*

$$\Pi_\alpha'=\Sigma\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}z_i'\right\};$$

inter $6n$ *quantitates* x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' *praeter* $2k$ *aequationes* $\Pi_\alpha=0$,

$\Pi'_\alpha = 0$, inventa sint $6n - k - 2 = \mu$ Integralia $F_1 = \alpha_1$, $F_2 = \alpha_2$, ... $F_\mu = \alpha_\mu$, designantibus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ Constantes Arbitrarias; restabit integratio unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas quantitates u et v,

$$v' du - u' dv = 0,$$

ubi u et v esse possunt ipsarum $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ functiones quaecunque atque u' et v' designant valores differentialium $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, adiumento aequationum datarum et integratione inventarum nec non ipsarum aequationum differentialium dynamicarum per ipsas u et v expressos. His praemissis, ponatur

$$(\alpha, \beta) = \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i} \right\},$$

atque kk quantitatum (α, β) formetur Determinans R; porro si vocatur Δ Determinans functionale $6n$ functionum

$$\Pi, \Pi_1, \ldots \Pi_{k-1}, \Pi', \Pi'_1, \ldots \Pi'_{k-1},$$
$$F_1, F_2, \ldots F_{6n-k-2}, u, v,$$

$6n$ quantitatum $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ respectu formatum, exprimantur R et Δ et ipsa per solas u et v; erit aequationis $v'du - u'dv = 0$ Multiplicator $\frac{R}{\Delta}$, unde nova habetur aequatio integralis,

$$\int \frac{R}{\Delta} (v' du - u' dv) = \text{Const.},$$

ubi expressio sub integrationis signo est differentiale completum; denique si nova illa aequatione integrali exprimitur v per u, unde evadit etiam u' solius u functio, invenitur simplice Quadratura,

$$t + \text{Const.} = \int \frac{du}{w}."$$

Sub forma antecedente principium novum mechanicum ante hos tres annos cum illustri Academia *Petropolitana* communicavi. Alias eiusdem formas infra tradam. Ultimam integrationem, qua t per Coordinatas exprimatur, Quadraturis absolvi, res erat nota et sponte patens. At inventum novum, penultimam quoque integrationem Quadraturis perfici posse, constituere mihi videbatur principium mechanicum.

Si tempus t vires sollicitantes sive etiam aequationes conditionales afficit, non amplius ipsum t a reliquis variabilibus separare licet, unde eo casu principium nostrum tantum omnium ultimam integrationem per Quadraturas absolvere docet. Supponendo, inventa esse $6n - 2k - 1$ Integralia,

$$F_1 = \alpha_1, \quad F_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad F_{6n-2k-1} = \alpha_{6n-2k-1},$$

atque u et v esse ipsius t et $6n$ quantitatum x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i functiones, Determinans Δ formandum est $6n$ functionum,

F_1, F_2, ... $F_{2n-2k-1}$, Π, Π_1, ... Π_{k-1}, Π', Π'_1, ... Π'_{k-1}, u, v, $6n+1$ quantitatum t, x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i respectu; eadem manente ipsius R significatione, rursus exprimenda erunt R, Δ, $u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$ per u et v, eritque aequatio integralis ultima,

$$\int \frac{R}{\Delta}(v'\,du - u'\,dv) = \text{Const.},$$

ubi expressio sub integrationis signo est differentiale completum.

Habemus hic exemplum, quo ad reductionem aequationum differentialium propositarum adhibentur Integralia *particularia;* nam ex aequationibus differentialibus (4.) sequuntur Integralia completa, $\Pi'_\alpha = C_\alpha$, $\Pi_\alpha = C_\alpha t + C'_\alpha$, designantibus C_α, C'_α Constantes Arbitrarias. Neque tamen sunt $\Pi'_\alpha = 0$, $\Pi_\alpha = 0$ aequationes integrales particulares *quaecunque*, sed tales pro quibus secundum §. 12. fit ut Multiplicator quo aequationes differentiales earum beneficio reductae gaudent e Multiplicatore propositarum (4.) deduci possit. Scilicet aequatio quidem integralis particularis est $\Pi'_\alpha = 0$, at functio Π'_α ita comparata est ut Constanti Arbitrariae aequiparata suppeditet Integrale completum; porro si reductioni adhibetur aequatio integralis particularis $\Pi'_\alpha = 0$ ex eaque nova deducitur aequatio integralis $\Pi_\alpha = 0$, rursus innotescit functio Π_α, quae Constanti Arbitrariae aequiparata non quidem aequationum differentialium propositarum (4.), sed reductarum tamen Integrale completum suppeditat. Quod secundum §. 12. poscitur et sufficit.

Designentur $3n$ quantitates $x_i\sqrt{m_i}$, $y_i\sqrt{m_i}$, $z_i\sqrt{m_i}$ per

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \dots\ \xi_{3n},$$

fit e (7.),

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_2}\dots + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_{3n}}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_{3n}}.$$

Unde secundum propositionem notam, in Commentatione *de formatione atque proprietatibus Determinantium* §. 13. probatam, quantitatum (α, β) Determinans exhibere licet ut aggregatum quadratorum Determinantium functionum Π, Π_1, ... Π_{k-1}, formatorum respectu quarumque k e numero quantitatum ξ_1, ξ_2, ... ξ_{3n} sumtarum, sive ponere licet

$$16. \quad R = M = S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}}\dots\frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}\right\}^2,$$

siquidem m', m'', ... $m^{(k)}$ designant quoscunque k diversos ex indicibus 1, 2, ... $3n$. Ex. gr. pro uno puncto, massa $= 1$ praedito, cuius Coordi-

natae orthogonales sunt x, y, z, et quod moveri debet in superficie cuius aequatio $\Pi = 0$, fit

$$M = R = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2;$$

si punctum moveri debet in curva, cuius aequationes sunt $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$, fit

$$\begin{aligned} M = R = & \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Pi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial y}\right\}^2 \\ & + \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right\}^2 \\ & + \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Pi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\right\}^2. \end{aligned}$$

Erat R Determinans aequationum linearium, quibus factores *Lagrangiani* λ, λ_1 etc. determinantur, qui igitur factores indeterminati aut infiniti evadere nequeunt nisi evanescat R. At docet formula (16.), non evanescere posse R nisi singula evanescant Determinantia functionalia

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}}\cdots\frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}.$$

Id quod ubi *identice* fit, ipsarum Π, Π_1, ... Π_{k-1} una reliquarum functio est, quo casu aequationes conditionales aut sibi contradicunt aut una quae e reliquis sequitur est superflua. Singula Determinantia illa si non quidem identice evanescunt sed ipsarum aequationum $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$, ... $\Pi_{k-1} = 0$ adiumento, id indicio est, earum aequationum unam reliquarum ope formam *Quadrati* induere. Eo casu per certas eliminationes et radicis extractionem transformari debent aequationes $\Pi = 0$ etc.; quam praeparationem semper factam esse supponi debet, ut aequationum dynamicarum *Lagrangianarum* usus esse possit.

Si ex antecedentibus semper supponere licet Determinans R non indefinite evanescere, fieri tamen potest ut R evanescat pro punctorum materialium positionibus particularibus determinatis. Quemadmodum si inter tres puncti Coordinatas una vel duae habentur aequationes conditionales repraesentantes superficiem aut curvam apice praeditam, evanescit R si punctum in eo apice collocatur. Ubi agitur de aequilibrio systematis punctorum materialium in eiusmodi positionibus particularibus collocatorum, pro quibus Determinans R evanescit, praecepta statica generalia aut deficiunt aut accuratioribus explicationibus indigent. Nec non si in certo temporis momento systema in motu suo ad tales positiones particulares pervenit, velocitatum intensitates et directiones mutationem finitam in temporis intervallo infinite parvo subeunt. Si, ut in rerum natura fieri solet.

conditiones quibus systema subiicitur non exprimuntur per aequationes, sed per inaequalitates $\Pi > 0$, $\Pi_1 > 0$ etc., inde ab eo temporis momento ipsae plerumque aequationes differentiales (4.) cum aliis commutari debent.

De Multiplicatore aequationum differentialium dynamicarum forma *Lagrangiana* secunda exhibitarum.

§. 23.

III. *Lagrange* aequationes differentiales dynamicas generales alia quoque forma memorabili exhibuit, Coordinatarum $3n$ loco, k aequationibus conditionalibus satisfacientium, introducendo $3n-k$ quantitates a se independentes

$$q_1, \; q_2, \; \ldots\ldots \; q_{3n-k}.$$

Quarum ipsae Coordinatae x_i, y_i, z_i tales esse debent functiones, quae substitutae in aequationibus conditionalibus $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$ etc. sponte iis satisfaciant. Unde etiam aequationem $\Pi_\alpha = 0$ cuiuslibet variabilis q_m respectu differentiando habetur

$$1. \qquad \sum_i \left\{ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = 0.$$

Statuatur

$$2. \qquad \sum_i \left\{ X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = Q_m;$$

consummando $3n$ aequationes (4.) §. pr. respective per $m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m}$, $m_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m}$, $m_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m}$ multiplicatas, evanescunt secundum (1.) aggregata in factores λ, λ_1 etc. ducta, unde prodit

$$3. \qquad \sum_i m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = Q_m.$$

Ponendo $q'_m = \frac{dq_m}{dt}$ et considerando quantitates x'_i ut quantitatum q_m, q'_m functiones, quae dantur formula,

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 \ldots\ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n-k}} q'_{3n-k},$$

sequitur

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_m} = \frac{\partial x_i}{\partial q_m}.$$

Porro

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_2} q'_2 \ldots\ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_{3n-k}} q'_{3n-k} = \frac{d \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}.$$

Eodem modo pro omnibus tribus Coordinatis fit

$$4.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'_i}{\partial q'_m} = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}, & \dfrac{\partial y'_i}{\partial q'_m} = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}, & \dfrac{\partial z'_i}{\partial q'_m} = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}, \\[2ex] \dfrac{\partial x'_i}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}, & \dfrac{\partial y'_i}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt}, & \dfrac{\partial z'_i}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt}. \end{cases}$$

Unde aequatio (3.) sic exhiberi potest,

$$Q_m = \sum_i m_i \left\{ \frac{dx'_i}{dt} \cdot \frac{\partial x'_i}{\partial q'_m} + \frac{dy'_i}{dt} \cdot \frac{\partial y'_i}{\partial q'_m} + \frac{dz'_i}{dt} \cdot \frac{\partial z'_i}{\partial q'_m} \right\}$$

$$= \frac{d.\sum_i m_i \left\{ x'_i \dfrac{\partial x'_i}{\partial q'_m} + y'_i \dfrac{\partial y'_i}{\partial q'_m} + z'_i \dfrac{\partial z'_i}{\partial q'_m} \right\}}{dt} - \sum_i m_i \left\{ x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q_m} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q_m} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q_m} \right\},$$

sive ponendo

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m_i \{ x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i \},$$

fit

$$Q_m = \frac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_m}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_m}.$$

Qua in formula ubi T et quantitates Q_m per $6n-2k$ quantitates $q_1, q_2, \ldots q_{3n-k}, q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n-k}$ exprimuntur atque indici m tribuuntur valores $1, 2, \ldots 3n-k$, obtinentur $3n-k$ aequationes differentiales secundi ordinis inter tempus t atque $3n-k$ variabiles a se independentes q_m,

$$5.\quad \begin{cases} \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_{3n-k}}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_{3n-k}} - Q_{3n-k} = 0, \end{cases}$$

quae altera est forma *Lagrangiana* aequationum differentialium dynamicarum. Aequationum (5.) iam investigabo Multiplicatorem.

Sint aequationes dynamicae,

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots \quad \varphi_{3n-k} = 0,$$

ubi φ_1, φ_2 etc. designent laevas partes aequationum (5.). Statuamus

$$6.\quad T = \tfrac{1}{2}\Sigma a_{i,i'} q'_i q'_{i'},$$

utroque i et i' ad omnes indices $1, 2, \ldots. 3n-k$ valente et designantibus quantitatibus $a_{i,i'} = a_{i',i}$ solarum $q_1, q_2, \ldots. q_{3n-k}$ functiones. Hinc fit e (5.),

$$\varphi_m = \frac{d\sum_i a_{i,m} q'_i}{dt} - \tfrac{1}{2}\sum_{i,i'} \frac{\partial a_{i,i'}}{\partial q_m} q'_i q'_{i'} - Q_m,$$

unde ponendo $q''_i = \frac{d^2 q_i}{dt^2}$ eruitur,

$$7.\quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial q''_k} = a_{k,m} \quad \text{ideoque} \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial q''_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q''_m}.$$

Porro si vires sollicitantes X_i, Y_i, Z_i a quantitatibus x'_i, y'_i, z'_i non pendent ideoque etiam quantitates Q_m ipsa q'_1, q'_2 etc. non implicant, fit

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial q'_k} = \frac{d a_{k,m}}{dt} + \sum_i \frac{\partial a_{i,m}}{\partial q_k} q'_i - \sum_i \frac{\partial a_{i,k}}{\partial q_m} q'_i,$$

unde reiectis terminis se mutuo destruentibus fit

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_m}{\partial q'_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial q'_m}\right\} = \frac{d a_{k,m}}{dt},$$

sive

$$8.\quad \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_m}{\partial q'_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial q'_m}\right\} = \frac{d.\frac{\partial \varphi_m}{\partial q''_k}}{dt} = \frac{d.\frac{\partial \varphi_k}{\partial q''_m}}{dt}.$$

At e propositione generali, quam sub finem §[i] 16. tradidi, ponendo $\lambda = 1$ sequitur, ubi formulae (8.) locum habeant, aequationum differentialium (5.) fieri Multiplicatorem

$$9.\quad M_1 = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial q''_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial q''_2} \cdots \frac{\partial \varphi_{3n-k}}{\partial q''_{3n-k}} = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots. a_{3n-k,3n-k}.$$

Si rursus $3n$ quantitatum $x_i\sqrt{m_i}$, $y_i\sqrt{m_i}$, $z_i\sqrt{m_i}$ loco ponimus $\xi_1, \xi_2, \ldots. \xi_{3n}$, fit

$$10.\quad T = \tfrac{1}{2}\{\xi'_1\xi'_1 + \xi'_2\xi'_2 \ldots. \xi'_{3n}\xi'_{3n}\},$$

qua expressione in formula (6.) substituta obtinetur

$$11.\quad a_{i,i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} \ldots. + \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{i'}}.$$

Harum quantitatum Determinans, secundum eandem propositionem quam §. pr. allegavi (*De Determ. form. et propr.* §. 13.), aequatur aggregato quadratorum Determinantium functionalium quarumque $3n-k$ e numero functionum ξ_1, $\xi_2, \ldots. \xi_{3n}$, quantitatum $q_1, q_2, \ldots. q_{3n-k}$ respectu formatorum, sive fit

$$12.\quad M_1 = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots . a_{3n-k,\,3n-k}$$
$$= S\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \xi_{m'}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \xi_{m''}}{\partial q_2} \ldots . \frac{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}}{\partial q_{3n-k}}\right\}^2,$$

designantibus m', m'' etc. quoscunque $3n-k$ ex indicibus $1, 2, \ldots . 3n$.

In deducendis aequationibus differentialibus (5.) supposui, aequationes conditionales tempus t non explicite continere. Quod ubi fit, statuendum erit, functiones, quibus $3n$ quantitates x_i, y_i, z_i aequantur, praeter $3n-k$ quantitates q_m etiam ipsum t continere. At hinc non mutabuntur formulae (1.), (3.), (4.), ideoque ipsae aequationes (5.) immutatae manebunt. Unde altera quoque forma *Lagrangiana* aequationum differentialium dynamicarum ad hunc valet casum quo aequationes conditionales tempus explicite continent. Neque eo casu mutationem subeunt formulae (7.) et (8.), unde etiam valor Multiplicatoris inventus immutatus manet. Quod breviter adnotare sufficiat.

De Multiplicatore aequationum differentialium dynamicarum forma tertia exhibitarum. Multiplicatores trium formarum aequationum differentialium dynamicarum inter se comparantur. Principium ultimi multiplicatoris ad tertiam formam relatum.

§. 24.

Quantitatum q'_1, q'_2, ... q'_{3n-k} respectu functio T homogenea erat secundi gradus, unde fit

$$2T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} \ldots . + q'_{3n-k} \frac{\partial T}{\partial q'_{3n-k}},$$

sive

$$T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} \ldots . + q'_{3n-k} \frac{\partial T}{\partial q'_{3n-k}} - T.$$

Si variamus quantitates omnes, quarum T functio est, ponimusque

$$1.\quad \frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

sequitur e valore ipsius T praecedente,

$$2.\quad \delta T = q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 \ldots . + q'_{3n-k}\,\delta p_{3n-k}$$
$$- \left\{\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 \ldots . + \frac{\partial T}{\partial q_{3n-k}}\delta q_{3n-k}\right\},$$

ubi in dextra parte bini termini se mutuo destruentes, $\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i - \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i$, omissi sunt. Formula (2.) docet, si per $3n-k$ aequationes, e (6.) §. pr. fluentes,

$$3.\quad p_i = a_{i,1} q'_1 + a_{i,2} q'_2 \ldots . + a_{i,3n-k} q'_{3n-k},$$

quantitates q'_i per quantitates p_i et q_i exprimantur earumque valores in functione T substituantur, fore ipsius T differentialia partialia quantitatum q_i et p_i respectu sumta, quae uncis includendo distinguamus ab ipsius T differentialibus partialibus quantitatum q_i et q'_i respectu sumtis,

$$4.\quad \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i},\quad \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q'_i.$$

Harum formularum ope aequationes differentiales (5.) §. pr. exhibere licet ut systema $6n-2k$ aequationum differentialium primi ordinis inter t et quantitates $q_1, q_2, \dots q_{3n-k}, p_1, p_2, \dots p_{3n-k}$,

$$5.\quad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right),\quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + Q_i.$$

Hae formulae *tertiam* formam aequationum differentialium dynamicarum constituunt. Quas, pro casu quo $3n$ quantitates X_i, Y_i, Z_i sunt differentialia partialia eiusdem functionis U respective secundum x_i, y_i, z_i sumta, primus condidit celeb. ***Hamilton***, Astronomus Regius Hibernensis. Eo casu fit e (2.) §. pr. $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$, unde statuendo $T - U = H$, si vires non a velocitatibus pendent ideoque U ab ipsis p_i vacua est, aequationes differentiales dynamicae evadunt,

$$6.\quad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right),\quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$

Iam olim quidem ill. ***Poisson*** in celeberrimo opere de Constantium Arbitrariarum variatione id egerat, ut quantitatum q'_i loco in aequationibus differentialibus dynamicis ***Lagrangianis*** secundis introduceret quantitates p_i; quae aequationes si ea substitutione abeunt in

$$7.\quad \frac{dq_i}{dt} = A_i,\quad \frac{dp_i}{dt} = B_i,$$

bene idem cognoverat fore

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k}\right) = -\left(\frac{\partial B_k}{\partial p_i}\right),\quad \left(\frac{\partial A_i}{\partial p_k}\right) = \left(\frac{\partial A_k}{\partial p_i}\right),\quad \left(\frac{\partial B_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_i}\right),$$

unde sequebatur, omnes $6n-2k$ quantitates A_i et $-B_i$ esse differentialia partialia eiusdem functionis, ipsarum p_i et q_i respectu sumta. At meritum, eam functionem $H = T - U$ ipsam assignavisse eaque re aequationibus differentialibus dynamicis formam perfectissimam conciliavisse, celeb. ***Hamilton*** debetur.

Casu quo mobilium Coordinatae functionibus aequantur quae praeter quantitates q_i ipsum tempus t implicant, forma simplex aequationum (5.) perit,

qua de re hoc quidem loco transformationem *Hamiltonianam* ad eum casum non applicabo.

Facile invenitur aequationum (5.) Multiplicator M_2. Etenim si aequationes (5.) per formulas (7.) designamus, fit

$$\frac{d \log M_2}{dt} + \Sigma\left\{\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial B_i}{\partial p_i}\right)\right\} = 0.$$

At ponendo

$$A_i = \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right), \qquad B_i = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + Q_i,$$

sequitur, si vires sollicitantes a velocitatibus non pendent ideoque functiones Q_i quantitates p_1, p_2 etc. non implicant,

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial B_i}{\partial p_i}\right) = 0,$$

ideoque

$$8. \qquad M_2 = 1.$$

Si functiones Q_i quoque implicant quantitates p_i, definitur M_2 per formulam,

$$9. \qquad \frac{d \log M_2}{dt} + \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \dots + \frac{\partial Q_{3n-k}}{\partial p_{3n-k}} = 0.$$

Iam tres Multiplicatores M, M_1, M_2, pro tribus aequationum differentialium dynamicarum formis inventos, inter se comparemus.

Forma secunda aequationum differentialium dynamicarum proveniebat e prima reducta per $2k$ aequationes integrales,

$$10. \quad \begin{cases} \Pi = 0, & \Pi_1 = 0, & \dots & \Pi_{k-1} = 0, \\ \Pi' = 0, & \Pi_1' = 0, & \dots & \Pi_{k-1}' = 0. \end{cases}$$

Quae aequationes integrales, licet non completae, ita tamen sunt comparatae ut aequationum differentialium reductarum Multiplicator e Multiplicatore propositarum per eandem formulam obtineatur ac si reductio per aequationes integrales completa facta esset (cf. §§. 10. et 12.). Cum per aequationes (10.) revocentur $6n$ variabiles x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' ad $6n-2k$ variabiles q_i et q_i', secundum ea quae l. c. tradidi duorum Multiplicatorum Quotiens $\frac{M}{M_1}$ aequatur Determinanti $6n$ functionum

$$\begin{matrix} \Pi, & \Pi_1, & \dots & \Pi_{k-1}, & q_1, & q_2, & \dots & q_{3n-k}, \\ \Pi', & \Pi_1', & \dots & \Pi_{k-1}', & q_1', & q_2', & \dots & q_{3n-k}', \end{matrix}$$

formato respectu $6n$ quantitatum x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'. Expressiones novarum variabilium q_1, q_2 etc. per x_i, y_i, z_i per aequationes (10.) diversas

34 *

subire possunt mutationes, quibus tamen illius Determinantis valor non mutatur (cf. §. 3. (12.)). Ponamus rursus, ut supra, $3n$ quantitates ξ_i loco quantitatum $\sqrt{m_i}\,x_i$, $\sqrt{m_i}\,y_i$, $\sqrt{m_i}\,z_i$, atque $3n$ quantitates ξ'_i loco quantitatum $\sqrt{m_i}\,x'_i$, $\sqrt{m_i}\,y'_i$, $\sqrt{m_i}\,z'_i$, valor ipsius $\frac{M}{M_1}$ etiam aequari poterit Determinanti earundem $6n$ functionum, formato quantitatum ξ_i et ξ'_i respectu, quippe quod ab illo Determinante functionali tantum discrepat factore constante (cubo producti massarum). Cum $3n$ quantitates ξ'_i non reprehendantur in $3n$ functionibus Π_m et q_m, Determinans Quotienti $\frac{M}{M_1}$ aequale induit formam producti,

$$\Sigma\pm\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi_2}\cdots\cdots\frac{\partial\Pi_{k-1}}{\partial\xi_k}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial\xi_{k+1}}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial\xi_{k+2}}\cdots\cdots\frac{\partial q_{3n-k}}{\partial\xi_{3n}}$$
$$\times\Sigma\pm\frac{\partial\Pi'}{\partial\xi'_1}\cdot\frac{\partial\Pi'_1}{\partial\xi'_2}\cdots\cdots\frac{\partial\Pi'_{k-1}}{\partial\xi'_k}\cdot\frac{\partial q'_1}{\partial\xi'_{k+1}}\cdot\frac{\partial q'_2}{\partial\xi'_{k+2}}\cdots\cdots\frac{\partial q'_{3n-k}}{\partial\xi'_{3n}}.$$

Cum vero insuper sit

$$\frac{\partial\Pi'_m}{\partial\xi'_i}=\frac{\partial\Pi_m}{\partial\xi_i},\qquad\frac{\partial q'_m}{\partial\xi'_i}=\frac{\partial q_m}{\partial\xi_i},$$

utrumque in se ductum Determinans aequale evadit, unde eruitur

$$11.\qquad\frac{M}{M_1}=\left\{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi_2}\cdots\cdots\frac{\partial\Pi_{k-1}}{\partial\xi_k}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial\xi_{k+1}}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial\xi_{k+2}}\cdots\cdots\frac{\partial q_{3n-k}}{\partial\xi_{3n}}\right\}^2.$$

Sint

$$m',\ m'',\ \ldots.\ m^{(3n-k)}$$

indices diversi ex ipsorum $1, 2, \ldots. 3n$ numero, supponere licet, ipsas $q_1, q_2, \ldots. q_{3n-k}$ expressas esse per solas $3n-k$ quantitates

$$\xi_{m'},\ \xi_{m''},\ \ldots.\ \xi_{m^{(3n-k)}};$$

tum autem Quotientis $\frac{M}{M_1}$ valor formam simpliciorem induit,

$$12.\qquad\frac{M}{M_1}=\left\{\Sigma\pm\frac{\partial q_1}{\partial\xi_{m'}}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial\xi_{m''}}\cdots\cdots\frac{\partial q_{3n-k}}{\partial\xi_{m^{(3n-k)}}}\right\}^2$$
$$\times\left\{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_{m^{(3n-k+1)}}}\cdot\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi_{m^{(3n-k+2)}}}\cdots\cdots\frac{\partial\Pi_{k-1}}{\partial\xi_{m^{(3n)}}}\right\}^2,$$

siquidem $m^{(3n-k+1)}$, $m^{(3n-k+2)}$, ... $m^{(3n)}$ designant k reliquos indicum $1, 2, \ldots. 3n$. Unde tandem per formulam notam (*Determ. Funct.* §. 3. (12.)) sequitur,

$$13.\qquad M\left\{\Sigma\pm\frac{\partial\xi_{m'}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\xi_{m''}}{\partial q_2}\cdots\cdots\frac{\partial\xi_{m^{(3n-k)}}}{\partial q_{3n-k}}\right\}^2$$
$$=M_1\left\{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi}{\partial\xi_{m^{(3n-k+1)}}}\cdot\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi_{m^{(3n-k+2)}}}\cdots\cdots\frac{\partial\Pi_{k-1}}{\partial\xi_{m^{(3n)}}}\right\}^2.$$

Quod antecedentibus suppositum est, novas variabiles $q_1, q_2, \ldots q_{3n-k}$ per totidem quantitates $\xi_{m'}, \xi_{m''}$ etc. expressas esse, id fieri non potest, quoties ex aequationibus conditionalibus $\Pi = 0$ etc. aequatio inter easdem $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}$ etc. sequitur; nam cum $3n-k$ quantitates q_1, q_2 etc. a se independentes sint, etiam $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}$ etc., per quas exprimantur, a se independentes esse debent. Nihilo tamen minus pro eo quoque casu formula (13.) valet. Quoties enim ex aequationibus $\Pi = 0$ etc. fluit aequatio inter solas $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}, \xi_{m''}, \ldots, \xi_{m^{(3n-k)}}$, hae aequabuntur $3n-k$ functionibus quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_{3n-k}$ non a se independentibus, quarum functionum Determinans evanescere constat. (*Determ. Funct.* §. 6.) Porro si e k aequationibus $\Pi = 0$ etc. obtineri potest aequatio inter solas $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}, \xi_{m''}, \ldots \xi_{m^{(3n-k)}}$, fieri debet, ut ex iisdem reliquae k quantitates $\xi_{m^{(3n-k+1)}}$ etc. eliminari possint. At *si de k aequationibus $\Pi = 0$ etc. totidem quantitates eliminari possunt, functionum Π etc. Determinans earum quantitatum respectu formatum per ipsas aequationes evanescit* *). Unde casu de quo agitur, utroque Determinante ad dextram et laevam signi aequalitatis posito evanescente, aequatio (13.) iusta manet.

Si, quod secundum antecedentia licet, in aequatione (13.) pro systemate indicum $m', m'', \ldots m^{(3n-k)}$ sumuntur quique $3n-k$ diversi indicum $1, 2, \ldots 3n$, omnesque $\frac{3n . 3n-1 \ldots 3n-k+1}{1 \;.\; 3 \;\ldots\; k}$ aequationes provenientes consummantur, prodit aequatio

$$M\,S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \xi_{m'}}{\partial q_1} . \frac{\partial \xi_{m''}}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}}{\partial q_{3n-k}}\right\}^2$$
$$= M_1\,S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}} . \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}} \cdots \frac{\partial \Pi_{n-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}\right\}^2,$$

ubi in altera summa loco indicum $m^{(3n-k+1)}, m^{(3n-k+2)}, \ldots m^{(3n)}$, quippe qui aliam non habent significationem quam quorumque k diversorum ex indicibus

---

*) Ponamus enim, ex aequatione $\Pi = 0$ eliminari posse k quantitates ope reliquarum aequationum $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \ldots \Pi_{k-1} = 0$, per easdem induere debet Π formam producti μF, designante F functionem a k quantitatibus vacuam, ut ex aequationibus conditionalibus sequatur inter reliquas quantitates aequatio $F = 0$. Secundum §. 3. (12.) in Determinante functionum $\Pi, \Pi_1, \ldots \Pi_{k-1}$ ipsum μF substituere licet functioni Π. Quoties autem $F = 0$, differentialia prima ipsius μF ita formare licet ac si factor μ constans esset, unde etiam in formando Determinante functionum $\mu F, \Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_{k-1}$ habere licet μ pro Constante. Quod igitur Determinans aequivalebit factori μ ducto in Determinans functionum $F, \Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_{k-1}$, ideoque evanescet, cum F ab ipsis quantitatibus vacua sit, quarum respectu Determinans functionale formatur.

1, 2, ... $3n$, scripsi m', m'', ... $m^{(\lambda)}$. Aequatio antecedens perfecte congruit cum supra inventis. Nam secundum formulam (16.) §. 22. aequatur M summae ad dextram, secundum formulam (12.) §. 23. aequatur M_1 summae ad laevam signi aequalitatis positae.

Aequationum dynamicarum forma secunda in tertiam mutabatur introducendo variabilium q'_1, q'_2, ... q'_{3n-k} loco totidem alias p_1, p_2, ... p_{3n-k}. Unde secundum §. 9. tertiae formae Multiplicator M_2 e secundae Multiplicatore M_1 obtinetur formula,

$$\frac{M_1}{M_2} = \Sigma \pm \frac{\partial p_1}{\partial q'_1} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q'_2} \cdots \frac{\partial p_{3n-k}}{\partial q'_{3n-k}}.$$

Dantur autem novae quantitates p_i aequationibus linearibus,

$$p_i = a_{i,1} q'_1 + a_{i,2} q'_2 \cdots + a_{i,3n-k} q'_{3n-k}$$

posito secundum (11.) §. 23.

$$a_{i,i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} \cdots + \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{i'}},$$

unde fit

$$\frac{M_1}{M_2} = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{3n-k,\,3n-k}.$$

Quod rursus cum supra inventis congruit, cum secundum (9.) §. pr. aequetur M_1 Determinanti ad dextram, secundum (8.) autem M_2 *unitati*. Per considerationes antecedentes videmus, e valore $M_2 = 1$, qui sponte patet, inveniri potuisse M_2 et M, supra via diversissima inventos. Qua methodorum diversitate cum Multiplicatoris tum Determinantium functionalium theoria haud parum illustratur.

Principium ultimi multiplicatoris ad formam aequationum differentialium dynamicarum tertiam relatum sic enunciari potest.

„Punctorum materialium systema subiectum sit conditionibus et sollicitetur viribus quibuscunque, a sola positione systematis in spatio pendentibus; qua positione determinata per μ quantitates independentes q_i, semisumma virium vivarum T exprimatur per quantitates q_i et $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$; ad motum systematis definiendum, eliminato tempore, integrandae erunt $2\mu - 1$ aequationes differentiales primi ordinis, quarum inventa sint $2\mu - 2$ Integralia, totidem Constantes Arbitrarias involventia, ita ut integranda restet unica aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles u et v,

$$v'du - u'dv = 0,$$

designantibus in hac aequatione u' et v' ipsarum u et v functiones quibus quotientes differentiales $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ ope Integralium inventorum aequantur; erit huius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles ultimo loco integrandae Multiplicator aequalis Determinanti functionali 2μ quantitatum q_i et $\frac{\partial T}{\partial q_i'}$, ipsarum u, v atque $2\mu-2$ Constantium Arbitrariarum respectu formato.

Iam novum principium generale mechanicum exemplis applicabo.

De motu puncti versus centrum fixum attracti.

§. 25.

Pro motu libero puncti in plano ex ultimi multiplicatoris principio generali fluit haec

Propositio.

Proponantur pro motu puncti in plano aequationes differentiales,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

designantibus X et Y Coordinatarum puncti orthogonalium x et y functiones quascunque; si habentur aequationum differentialium propositarum duo Integralia

$$f(x, y, x', y') = \alpha, \qquad \varphi(x, y, x', y') = \beta,$$

ubi α et β sunt Constantes Arbitrariae, dabitur orbita puncti formula

$$\int\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \beta} - \frac{\partial x'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)(y'\,dx - x'\,dy) = \gamma$$

sive etiam formula

$$\int\frac{y'\,dx - x'\,dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}} = \gamma,$$

ubi duorum Integralium inventorum ope exhibitis x' et y' per x, y, α, β quantitates sub integrationis signo differentialia completa fiunt atque γ tertiam Constantem Arbitrariam designat.

Aliam propositionem, qua puncti liberi in plano moti orbita Quadraturis definiri potest, si puncti velocitatis intensitas et directio per duo Integralia inventa determinatae sunt, iam ante multos annos cum illustri *Academia Parisiensi* com-

municavi, sed ea propositio tantum respiciebat casum quo vires Coordinatis parallelae X et Y eiusdem quantitatum x et y functionis aequantur differentialibus ipsarum x et y respectu sumtis, dum in propositione antecedente X et Y quantitatum x et y functiones quaecunque esse possunt.

Pro motu puncti in dato plano versus centrum fixum attracti duo constant Integralia principiis conservationis vis vivae et conservationis areae, quibus si principium ultimi multiplicatoris addis, per tria illa principia generalia a priori constat, eius motus determinationem solis Quadraturis absolvi. Quod facto calculo sic comprobatur.

Pro motu proposito habentur aequationes differentiales

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{xF(r)}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{yF(r)}{r},$$

ubi x et y Coordinatae orthogonales sunt, quarum initium in centro attractionis est; porro $r = \sqrt{(xx+yy)}$ atque $F(r)$ intensitas vis attractivae pro distantia r. Posito

$$R = \int F(r)\,dr,$$

e principiis generalibus mechanicis conservationis vis vivae et areae statim habentur duo Integralia,

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y')+R = \alpha, \\ \varphi &= \quad xy'-yx' \quad = \beta, \end{aligned}$$

designantibus α et β Constantes Arbitrarias. Unde fit,

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = xx'+yy'.$$

E duobus Integralibus appositis sequitur

$$xx'+yy' = \sqrt{\varrho},$$

posito

$$\varrho = 2r^2(\alpha - R) - \beta\beta.$$

Unde secundum principium ultimi Multiplicatoris dabitur puncti orbita per aequationem,

$$\int \frac{y'dx - x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}} = \int \frac{y'dx - x'dy}{\sqrt{\varrho}} = \gamma,$$

designante γ novam Constantem Arbitrariam. Ex aequationibus,

$$xy'-yx' = \beta, \qquad xx'+yy' = \sqrt{\varrho},$$

sequitur

$$x' = \frac{x\sqrt{\varrho}-\beta y}{rr}, \qquad y' = \frac{y\sqrt{\varrho}+\beta x}{rr};$$

unde substituendo $x\,dx+y\,dy = r\,dr$ fit

$$\frac{y'dx-x'dy}{\sqrt{\varrho}} = \frac{y\,dx-x\,dy}{rr}+\frac{\beta\,dr}{r\sqrt{\varrho}}.$$

Posito igitur $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, unde $y\,dx-x\,dy = -rr\,d\vartheta$, dabitur orbita per formulam,

$$\vartheta+\gamma = \beta\int\frac{dr}{r\sqrt{(2r^2(\alpha-R)-\beta\beta)}}.$$

Si lex attractionis est *Neutoniana*, ponendum est $F(r) = \frac{k^2}{rr}$, $R = -\frac{k^2}{r}$; designante k^2 vim attractivam pro unitate distantiae, institutaque integratione prodit aequatio sectionis conicae inter Coordinatas polares r, $\vartheta+\gamma$.

Aequationum differentialium antecedentium dextrae parti addamus *Coordinatarum x et y functiones homogeneas* $(-3)^{tae}$ *dimensionis*, X et Y, aequationum differentialium provenientium,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\frac{F(r)}{r}+X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y\frac{F(r)}{r}+Y,$$

semper aliquod obtineri poterit Integrale. Nam ex his aequationibus eruitur,

$$\tfrac{1}{2}d.\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2 = (x\,dy-y\,dx)(xY-yX) = x^2(xY-yX)d.\frac{y}{x}.$$

At est $x^2(xY-yX)$ functio variabilium x et y homogenea *nullae* dimensionis ideoque functio ipsius $\frac{y}{x}$, unde aequationis antecedentis pars utraque est differentiale completum, factaque integratione prodit

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(xy'-yx')^2-V = \tfrac{1}{2}\beta^2,$$

siquidem β Constans Arbitraria est atque

$$V = \int x^2(xY-yX)\,d\frac{y}{x}.$$

Si X et Y sunt differentialia partialia functionis homogeneae $(-2)^{tae}$ dimensionis U, ipsarum x et y respectu sumta, principium conservationis vis vivae alterum suppeditat Integrale

$$f = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y')+R-U = \alpha,$$

siquidem α est altera Constans Arbitraria atque rursus

$$R = \int F(r)\,dr.$$

Functiones f et φ inventas substituendo fit

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = (xx'+yy')(xy'-yx').$$

At ex Integralibus inventis eruitur

$$(xx'+yy')(xy'-yx') = \sqrt{\{2r^2(\alpha-R+U)-(2V+\beta^2)\}}.\sqrt{(2V+\beta^2)},$$

quippe ponendo

$$2r^2(\alpha-R+U)-(2V+\beta^2) = \varrho,$$

fit

$$xy'-yx' = \sqrt{(2V+\beta^2)}, \qquad xx'+yy' = \sqrt{\varrho}.$$

Hinc sequitur

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \sqrt{\varrho}.\sqrt{(2V+\beta^2)};$$

$$x' = \frac{x\sqrt{\varrho}-\sqrt{(2V+\beta^2)}.y}{rr},$$

$$y' = \frac{y\sqrt{\varrho}+\sqrt{(2V+\beta^2)}.x}{rr}.$$

Quibus formulis substitutis in tertio Integrali, quod principio ultimi multiplicatoris suppeditatur,

$$\int\frac{y'dx-x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}} = \gamma,$$

obtinetur formula quae puncti orbitam determinat,

$$\int\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{rr\sqrt{(2V+\beta^2)}}+\frac{dr}{r\sqrt{\varrho}}\right) = \gamma,$$

sive ponendo rursus $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$,

$$\int\left(\frac{dr}{r\sqrt{\varrho}}-\frac{d\vartheta}{\sqrt{(2V+\beta^2)}}\right) = \gamma,$$

semper designante γ tertiam Constantem Arbitrariam. Cum sit U functio homogenea $(-2)^{ti}$ ordinis, erit

$$2U = -\left\{x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}\right\} = -\{xX+yY\},$$

unde

$$\begin{aligned} d.r^2U &= -\{xX+yY\}(x\,dx+y\,dy)+\{xx+yy\}(X\,dx+Y\,dy)\\ &= \quad (xY-yX)(x\,dy-y\,dx). \end{aligned}$$

Eadem quantitas aequabatur ipsi dV, unde in formulis antecedentibus statuere licet

$$V = rrU,$$
$$\varrho = 2r^2(\alpha-R)-\beta^2.$$

Secundum suppositionem factam fit $r^2 U = V$ ipsius $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\vartheta$ functio, unde in aequatione orbitae,

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{(2r^2(\alpha - R) - \beta^2)}} = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{(2V + \beta^2)}} + \gamma,$$

alterum integrale solius r, alterum solius ϑ functio est. Temporis expressio habetur per formulam

$$t + \tau = \int \frac{r\,dr}{xx' + yy'} = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\varrho}} = \int \frac{r^2\,d\vartheta}{\sqrt{(2V + \beta^2)}},$$

in qua τ est nova Constans Arbitraria.

In motu antecedentibus considerato vis $F(r)$, qua punctum versus centrum fixum attrahitur, aucta est alia vi, quae secundum axes orthogonales disposita differentialibus partialibus $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ aequatur. Eadem vis secundum radii vectoris directionem eique perpendiculariter disposita evadit

$$P = \frac{1}{r}\left\{x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right\}, \qquad Q = \frac{1}{r}\left\{y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y}\right\}.$$

Secundum suppositionem de functionis U indole factam statui potest

$$r^2 U = V = \Psi(\vartheta),$$

designante $\Psi(\vartheta)$ functionem anguli ϑ quem radius vector cum axe fixo format. Qua expressione substituta positoque $\frac{d\Psi(\vartheta)}{d\vartheta} = \Psi'(\vartheta)$, eruitur

$$P = -\frac{2}{r^3}\Psi(\vartheta), \qquad Q = -\frac{1}{r^3}\Psi'(\vartheta).$$

Si iam ponitur

$$\beta\int\frac{dr}{r\sqrt{\varrho}} = \beta\int\frac{dt}{r^2} = \beta\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{(2\Psi(\vartheta) + \beta^2)}} = \Theta,$$

docent formulae antecedentibus inventae, illis viribus P et Q ad vim attractivam $F(r)$ accedentibus orbitae aequationem polarem eam mutationem subire ut angulus ϑ in angulum Θ mutetur. At simul videmus, *illa virium P et Q accessione relationem inter radium vectorem et tempus omnino immutatam manere.* Quae curiosa propositio valet etiam si non quod antecedentibus supposui motus in plano fit. Sit enim U ipsarum x, y, z functio homogenea $(-2)^{\text{tae}}$ dimensionis, ac proponantur aequationes differentiales,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}F(r)+\frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}F(r)+\frac{\partial U}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{r}F(r)+\frac{\partial U}{\partial z};$$

rursus $\int F(r)\,dr = R$ ponendo sequitur,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2(-R+U+\alpha),$$
$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2} = -rF(r)-2U.$$

Quibus additis fit

$$d\left\{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right\} = d.r\frac{dr}{dt} = \{2(\alpha-R)-rF(r)\}dt,$$

unde multiplicando per $2r\frac{dr}{dt}$ et integrando prodit,

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2r^2(\alpha-R)+\varepsilon,$$

ideoque

$$t+\tau = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{\{2r^2(\alpha-R)+\varepsilon\}}},$$

qua in formula τ et ε Constantes Arbitrariae sunt. Patet autem quod demonstrandum erat, in hac formula nullum functionis U vestigium remansisse. Addo, si U gaudeat forma particulari,

$$U = \frac{1}{r^2}\left\{f\left(\frac{x}{r}\right)+\varphi\left(\frac{y}{r}\right)\right\},$$

designantibus f et φ functiones quascunque, eum ipsum motum, qui in plano non continetur, totum Quadraturis determinari posse.

Motus puncti in spatio pendet a *quinque* aequationibus differentialibus primi ordinis inter *sex* quantitates x, y, z, x', y', z'; unde *quatuor* Integralibus egemus ut problema ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles revocetur, quae ope principii ultimi multiplicatoris per solas Quadraturas integrabitur. At quoties vires sollicitantes diriguntur versus axem fixum viriumque intensitates non pendent ab angulo quem planum per axem et mobile ductum cum plano fixo per eundem axem transeunte facit, problema ad motum puncti in plano revocari potest, et nonnisi *duobus* Integralibus opus erit ut totum absolvatur Quadraturis. Designantibus enim x, v, ζ puncti Coor-

dinatas orthogonales positoque

$$vv+\zeta\zeta = yy,$$

sint aequationes differentiales, quibus motus puncti definitur,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = Y\frac{v}{y}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Y\frac{\zeta}{y},$$

ubi secundum suppositionem factam et X et Y solarum x et y functiones esse debent: erit

$$v\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2v}{dt^2} = 0,$$

unde sequitur,

$$v\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{dv}{dt} = \alpha,$$

designante α Constantem Arbitrariam. Fit autem,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\sqrt{(vv+\zeta\zeta)}}{dt^2} = \frac{(v\,d\zeta-\zeta\,dv)^2}{\sqrt{(vv+\zeta\zeta)^3}.dt^2} + \frac{v\,d^2v+\zeta\,d^2\zeta}{\sqrt{(vv+\zeta\zeta)}.dt^2},$$

ideoque

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\alpha\alpha}{y^3} + Y.$$

Unde aequationes differentiales propositae evadunt sequentes,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\alpha\alpha}{y^3} + Y.$$

Cf. *Diar. Crell. Vol. XXIV. pag. 16 sqq.* Ponendo,

$$v = y\cos f, \qquad \zeta = y\sin f,$$

fit

$$v\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{dv}{dt} = yy\frac{df}{dt} = \alpha,$$

unde Constans α aequabitur plani per punctum mobile et axem fixum ducti velocitati rotatoriae initiali, multiplicatae per quadratum distantiae initialis puncti ab axe. Duobus Integralibus inter x, y, x', y' inventis, tertium integrale principio ultimi Multiplicatoris suppeditatur. Quorum Integralium ope si $y' = \frac{dy}{dt}$ per y exprimitur, cum rotationis angulus f tum tempus t Quadraturis determinantur ope formularum,

$$f = \alpha\int\frac{dt}{y^2} = \alpha\int\frac{dy}{y^2y'}, \qquad t = \int\frac{dy}{y'}.$$

Unde in casu proposito cognitis *duobus* Integralibus tria reliqua a solis Quadraturis pendent. Consideretur ex. gr. motus puncti versus centrum fixum

attracti; posito $r = \sqrt{(xx+yy)}$, secundum antecedentia erit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}F(r); \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}F(r) + \frac{\alpha\alpha}{y^3}.$$

Quae aequationes in eas redeunt, quas supra integravi, ponendo

$$Y = \frac{\alpha\alpha}{y^3}, \qquad U = -\frac{\alpha\alpha}{2yy} = -\frac{\alpha\alpha}{2rr\sin\vartheta^2},$$

unde

$$V = \Psi(\vartheta) = -\frac{\alpha\alpha}{2\sin\vartheta^2},$$

$$\Theta = \int\frac{\beta . d\vartheta}{\sqrt{(2\Psi(\vartheta)+\beta^2)}} = \int\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(\beta^2\sin\vartheta^2-\alpha^2)}},$$

ideoque,

$$\cos\Theta = \frac{\beta}{\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}}\cos\vartheta.$$

Si r et ϑ sunt puncti attracti Coordinatae polares in plano fixo in quo illud revera movetur, in aequatione orbitae, quam in hoc plano describit, angulus Θ loco ipsius ϑ substitui debet ut eruatur orbita descripta in plano mobili per axem ipsarum x ducto. Relationem inter r et t pro motu in utroque plano eandem manere, ex ipsa natura rei patet. Plani angulus rotatorius f datur per formulam,

$$df = \frac{\alpha\, dt}{yy} = \frac{\alpha\, dt}{rr\sin^2\vartheta} = \frac{d\Theta}{\sin^2\vartheta} = \frac{\alpha\beta . d\Theta}{\alpha^2\cos\Theta^2+\beta^2\sin\Theta^2},$$

unde, designante ε Constantem Arbitrariam,

$$\operatorname{tang}(f+\varepsilon) = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tang}\Theta.$$

Si per centrum attractionis ex arbitrio axis fixus ducitur, in formulis antecedentibus axem Coordinatarum x pro axe fixo sumendo motus puncti attracti componitur e motu puncti in plano per ipsum et axem fixum ducto eiusque plani rotatione circa axem fixum. Statuatur $\alpha = \beta\sin\delta$, erit

$$\cos\vartheta = \cos\delta\cos\Theta, \quad \operatorname{tang}\Theta = \sin\delta\operatorname{tang}(f+\varepsilon), \quad \sin\vartheta\sin(f+\varepsilon) = \sin\Theta.$$

E centro attractionis describatur superficies sphaerica, cuius intersectio cum axe fixo, cum radio vectore et cum plano orbitae puncti attracti sit A, P et circulus maximus PQ; porro in sphaera e A ad circulum maximum PQ demittatur perpendicularis AO: in triangulo rectangulo sphaerico AOP erit

$$AO = \delta, \quad AP = \vartheta, \quad PO = \Theta, \quad OAP = f+\varepsilon.$$

Cuius constructionis ope formulae antecedentes geometrice comprobari possunt.

Si punctum versus centra fixa quotcunque in eadem recta disposita secundum *Neutonianam* sive aliam quamcunque legem attrahitur, quibus attractionis viribus accedere potest vis constans rectae parallela, e duobus Integralibus, quae antecedentibus poscebantur ut reliquae integrationes omnes Quadraturis absolverentur, alterum conservationis vis vivae principio suppeditatur. Si abest vis constans atque duo tantum sunt centra attrahentia lexque attractionis est *Neutoniana*, alterum Integrale *Eulerus* invenit. Eo igitur casu motus ille principio conservationis areae certi cuiusdam axis respectu valentis, principio conservationis vis vivae, Integrali *Euleriano*, tandem principio ultimi multiplicatoris ad Quadraturas revocatur. Quod iam accuratius exponam.

(Cont. fasc. seq.)

12.

Beweis dafs für jede Primzahl p die Gleichung $1+x+x^2+\dots+x^{p-1}=0$ irreductibel ist.

(Von Herrn *L. Kronecker*, Stud. phil. zu Berlin.)

Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes dürfte es nicht ohne Interesse sein, dem von *Gaufs* in den Disq. arithm. gegebenen Beweise einen zweiten sehr einfachen hinzuzufügen. Ich schicke dabei, um den Gang nachher nicht zu stören, folgenden Satz voraus:

„Wenn p eine Primzahl, α eine von 1 verschiedne $p$te Wurzel der Einheit und $a, a_1, \dots$ ganze Zahlen bedeuten, und man $a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\dots+a_{p-1}\alpha^{p-1}=f(\alpha)$ setzt, so findet die Congruenz $f(\alpha)f(\alpha^2)\dots f(\alpha^{p-1})\equiv f(1)^{p-1}$ mod. p Statt, wobei sogleich bemerkt werden kann, dafs jenes Product als ganze symmetrische Function aller Wurzeln eine ganze reelle Zahl sein mufs."

Beweis. Man setze $a+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{p-1}x^{p-1}=f(x)$ und denke sich die Entwicklung des Products $f(x)f(x^2)\dots f(x^{p-1})$ nach Potenzen von x, so dafs das allgemeine Glied darin $A_n x^n$ wird. Setzt man nun in der so entstandenen identischen Gleichung für x nach einander die Werthe $1, \alpha, \alpha^2, \dots \alpha^{p-1}$ und summirt alle diese p Gleichungen, so erhält man auf der einen Seite: $f(1)^{p-1}+(p-1)f(\alpha)f(\alpha^2)\dots f(\alpha^{p-1})$. Denn für jedes r aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \dots (p-1)$ fallen die Gröfsen $\alpha^r, \alpha^{2r}, \dots \alpha^{(p-1)r}$ mit den ursprünglichen $\alpha, \alpha^2, \dots \alpha^{p-1}$ nur in andrer Ordnung zusammen, woraus folgt, dafs $f(\alpha^r)f(\alpha^{2r})\dots f(\alpha^{(p-1)r})=f(\alpha)f(\alpha^2)\dots f(\alpha^{p-1})$ ist. Auf der andern Seite erhält man für das allgemeine Glied $A_n(1+\alpha^n+\alpha^{2n}+\dots+\alpha^{(p-1)n})$, welche Summe für jedes durch p theilbare n den Werth p erhält, für jedes andere n aber verschwindet. Man hat also die Gleichung

$$f(1)^{p-1}+(p-1)f(\alpha)f(\alpha^2)\dots f(\alpha^{p-1}) = p(A_0+A_p+A_{2p}+\dots)$$

oder

$$f(\alpha)f(\alpha^2)\dots f(\alpha^{p-1}) \equiv f(1)^{p-1} \text{ mod. } p, \text{ w. z. b. w.}$$

Es sei nun $1+x+x^2+\dots+x^{p-1}=X$ das Product zweier ganzen rationalen Functionen von x mit ganzen Coëfficienten, also $X=f(x).\varphi(x)$, so wird aus dieser Gleichung für $x=1$ offenbar $p=f(1).\varphi(1)$, wo $f(1)$ und $\varphi(1)$ ganze Zahlen sind, was also nur möglich ist, wenn die eine $=1$, die andere $=p$ ist. Es sei $f(1)=1$. Nun mufs aber andrerseits $f(x)$ für so viele von 1 verschiedne $p$te Wurzeln der Einheit, als der Grad dieser Function andeutet, also doch wenigstens für eine verschwinden. Es wird daher jedenfalls

$$f(\alpha)f(\alpha^2)\dots f(\alpha^{p-1}) = 0.$$

Andrerseits hat man nach obigem Satze

$$f(\alpha)f(\alpha^2)\dots f(\alpha^{p-1}) \equiv f(1)^{p-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } p,$$

welches den Widerspruch giebt.

Anm. Ich will noch bemerken, dafs ich in Bezug auf den obigen Hülfssatz nicht auf *Kummer's* „Disputatio de numeris complexis etc. §. 2." verwiesen habe, weil bei dem Beweise desselben dort schon die Irreductibilität der Gleichung $X=0$ vorausgesetzt wird.

Crelle Journal d. Math Bd. XXIX Heft 3.

Fac-simile einer Handschrift von Christ. Bar. v. Wolff.

Vir Amplissime,

Duplici nomine Tibi gratias ago, cum quod mihi socias operas praestes in veritate propaganda, tum quod Elementa Philosophiae a Te edita, munus mihi longe acceptissimum, mecum communicare dignatus fueris. Optandum omnino foret, ut alii exemplum Tuum secuti juventutem scholasticam ad scientiam sibi in academiis acquirendam praepararent, animis eorum notiones rerum distinctas et palmarias veritates insinuando et amorem cognitionis solidae instillando. Indies enim experimur, qui in Academiis scientias profitemur, quam pauci sint, qui ad solidam doctrinam adspirant. Quoniam vero amicitia Tua nihil mihi antiquius est, nihil quoque mihi magis in votis est, quam ut valeas et me ames,

Vir Amplissime,

H. d. 13 Aug.
1746.

totum tuum
Christianum L. B. de
Wolff.

13.

Nova Theoremata de functionum Abelianarum cuiusque ordinis valoribus quibus pro complementis argumentorum atque indicum dimidiis induuntur.

(Auct. *F. Richelot*, prof. math. ordin. in univ. Regiom.)

Postquam ad instar functionum ellipticarum, ab illustrissimis *Jacobi* et *Abel* inventarum, ille vir celeberrimus inversis integralium *Abelianorum* functionibus, quae plures variabiles involvunt, introductis analyseos fines amplius protulit, quae in theoria ellipticarum soluta vident, eorum similia problemata de his functionibus naturae multo sublimioris ac fere inauditae Geometris tractanda se offerunt. Quae disquisitiones de functionibus *Abelianis* sive ultraellipticis novis quodammodo analyseos fundamentis superstruenda videntur. Qui enim per Theorema *Abelianum*, quippe quod pro unico aditu aperto ad huius theoriae fundamenta habent, calculo integrali adhibito penetrare velint in haec mysteria recondita, ii maximi calculi impedimenta sibi obvenire videbunt. Quae quomodocunque se habeant, in hac dissertatione unum e numero illorum problematum per calculum algebraicum haud inelegantem, calculo integrali advocato, tractavimus. Nimirum hic agitur de hoc problemate: Si $e_i = \pm 1$ et brevitatis gratia ponitur:

$$\Delta z = -(z-m_1)(z-m_2)\dots(z-m_{2n+2}),$$

ubi differentiae:

$$m_2-m_1,\quad m_3-m_2,\quad \dots\dots \quad m_{2n+2}-m_{2n+1},$$

positivis valoribus gaudent, argumenta

$$u,\ u',\ u'',\ \dots\dots\ u^{(n-1)},$$

definiantur per aequationes has:

$$\int_{m_1}^{y_1}\frac{e_1\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{y_2}\frac{e_2\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\dots+\int_{m_{2n-1}}^{y_n}\frac{e_n\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}} = 2u,$$

$$\int_{m_1}^{y_1}\frac{e_1\,y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{y_2}\frac{e_2\,y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\dots+\int_{m_{2n-1}}^{y_n}\frac{e_n\,y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}} = 2u',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int_{m_1}^{y_1}\frac{e_1\,y^{n-1}dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{y_2}\frac{e_2\,y^{n-1}dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\dots+\int_{m_{2n-1}}^{y_n}\frac{e_n\,y^{n-1}dy}{\sqrt{(\Delta y)}} = 2u^{(n-1)},$$

atque introducantur functiones $\lambda_1(u, u', u'', \dots u^{(n-1)})$, $\lambda_2(u, u', u'', \dots u^{(n-1)})$ etc. .... atque $G(u, u', u'', \dots u^{(n-1)})$ his aequationibus determinatae:

$$\lambda_1(u, u', u'', \dots u^{(n-1)}) = (m_1-y_1)(m_1-y_2) \dots (m_1-y_n),$$
$$\lambda_2(u, u', u'', \dots u^{(n-1)}) = (m_2-y_1)(m_2-y_2) \dots (m_2-y_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_{2n+2}(u, u', u'', \dots u^{(n-1)}) = (m_{2n+2}-y_1)(m_{2n+2}-y_2)\dots(m_{2n+2}-y_n),$$
$$G(u, u', u'', \dots u^{(n-1)})$$
$$= \int_{m_1}^{y_1} e_1 \frac{\Phi y\, dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}} + \int_{m_3}^{y_2} e_2 \frac{\Phi y\, dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}} + \dots + \int_{m_{2n-1}}^{y_n} e_n \frac{\Phi y\, dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}},$$

ubi Φz denotat functionem rationalem ipsius z integram, et α quantitatem constantem. Iam, si valores argumentorum $u, u', u'', \dots u^{(n-1)}$ pro

$$y_1 = m_2,\quad y_2 = m_4,\quad y_3 = m_6,\quad \dots\quad y_n = m_{2n},$$

respective transeunt in $M, M', M'', \dots M^{(n-1)}$, quaeruntur et functionum:

$$\lambda_1(M-u, M'-u', M''-u'', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}),$$
$$\lambda_2(M-u, M'-u', M''-u'', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_{2n+2}(M-u, M'-u', M''-u'', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}),$$
$$G(M-u, M'-u', M''-u'', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}),$$

per ipsas quantitates $y_1, y_2, \dots y_n$ expressiones, nec non valores ipsorum:

$$\lambda_1(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}),$$
$$\lambda_2(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_{2n+2}(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}),$$
$$G(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}).$$

In his disquisitionibus versante me, illustrissimus *Jacobi*, ingenio augustissimo ductus, quas ipsas functiones *Abelianas* plures variabiles involventes olim in Analysin introduxerat, e novis unius tantum variabilis functionibus theorematis *Abeliani* ope algebraice adnotavit componi (id quod in diariô ab illustrissimo *Liouville* edito dec. 1843 pag. 505 invenis), ita ut in has simpliciores functiones, quippe in quas ceterae reducantur, ante omnes inquirendum esse videatur; tamen quin hanc elaborationem Geometris communicarem, haud dubitavi, et per se eorum attentione haud prorsus indignam, et ut singularem theorematis *Abeliani* applicationem.

1.

Initium, ut problematis natura melius perspiciatur, a casu simplicissimo facere velimus $n = 1$, ubi functio λu congruit cum ipso $\sin^2 \mathrm{am}(u, \varkappa)$, atque expressiones ipsorum:

$$\sin \mathrm{am}(K - u), \qquad \sin \mathrm{am} \tfrac{1}{2} K,$$

determinandae sunt. Quem ad valorem notissimum eruendum, solvere placet hoc generalius problema algebraicum:

Si differentiae: $m_2 - m_1$, $m_3 - m_2$, $m_4 - m_3$, positivis valoribus gaudent, in expressione secundi ordinis:

$$1. \quad c(z - m_3)(z - m_4) + (z - m_1)(z - m_2)$$

quantitas c ita est determinanda, ut ipsa fiat quadratum formae:

$$2. \quad (1 + c)(z - x_1)^2 = c(z - m_3)(z - m_4) + (z - m_1)(z - m_2)$$

ipsaque quantitas x_1 quaerenda est.

Quem ad finem in aequatione (2.) ipsiusque differentiali secundum ipsum z sumto, si substituitur: $z = x_1$ prodeunt formulae:

$$c(x_1 - m_3)(x_1 - m_4) + (x_1 - m_1)(x_1 - m_2) = 0,$$
$$c[(x_1 - m_3) + (x_1 - m_4)] + (x_1 - m_1) + (x_1 - m_2) = 0,$$

et inde, ipso c eliminato, aequatio ad ipsum x_1 determinandum

$$3. \quad \frac{1}{x_1 - m_4} + \frac{1}{x_1 - m_3} = \frac{1}{x_1 - m_2} + \frac{1}{x_1 - m_1},$$

quae docet alterum ipsius x_1 valorem

$$4. \quad x_1' = \frac{m_3 \sqrt{[(m_4 - m_1)(m_4 - m_2)]} - m_4 \sqrt{[(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)]}}{\sqrt{[(m_4 - m_1)(m_4 - m_2)]} - \sqrt{[(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)]}}$$

in intervallo $m_1 \ldots . m_2$, et alterum:

$$5. \quad x_1'' = \frac{m_3 \sqrt{[(m_4 - m_1)(m_4 - m_2)]} + m_4 \sqrt{[(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)]}}{\sqrt{[(m_4 - m_1)(m_4 - m_2)]} + \sqrt{[(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)]}}$$

in intervallo $m_3 \ldots . m_4$ contineri. Quantitas $\sqrt{c}$ in priori casu valore:

$$6. \quad \sqrt{c'} = \frac{\sqrt{[(m_3 - m_1)(m_4 - m_2)]} - \sqrt{[(m_3 - m_2)(m_4 - m_1)]}}{m_4 - m_3},$$

in posteriorique valore:

$$7. \quad \sqrt{c''} = \frac{\sqrt{[(m_3 - m_1)(m_4 - m_2)]} + \sqrt{[(m_3 - m_2)(m_4 - m_1)]}}{m_4 - m_3}$$

induitur.

Iam vero aequationis quadraticae:

$$C(z - m_4)(z - m_3) + (z - m_2)(z - m_1) = 0,$$

radices sint y_1 et Y_1, ita ut habeantur aequationes:

$$C(y_1-m_4)(y_1-m_3) = -(y_1-m_2)(y_1-m_1),$$
$$C(Y_1-m_4)(Y_1-m_3) = -(Y_1-m_2)(Y_1-m_1),$$

quibus logarithmice differentiatis, prodeunt formulae differentiales:

$$\frac{1}{C}\cdot\frac{dC}{dy_1} = \frac{1}{(y_1-m_1)}+\frac{1}{(y_1-m_2)}-\frac{1}{y_1-m_3}-\frac{1}{y_1-m_4},$$
$$\frac{1}{C}\cdot\frac{dC}{dY_1} = \frac{1}{Y_1-m_1}+\frac{1}{Y_1-m_2}-\frac{1}{Y_1-m_3}-\frac{1}{Y_1-m_4}.$$

Inde docemur quantitatem C, radicibus y_1 et Y_1 respective ab m_1 usque ad x_1' et ab m_2 usque ad x_1' continuo progredientibus, ipsam a nihilo usque ad c' continuo crescere, nec non brevitatis gratia posito:

$$\Delta z = -(z-m_1)(z-m_2)(z-m_3)(z-m_4)$$

simul haberi:

$$8.\quad \sqrt{C} = \frac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(y_1-m_3)(y_1-m_4)} = \frac{\sqrt{(\Delta Y_1)}}{(Y_1-m_3)(Y_1-m_4)};$$

aeque ac, dum radices y_1 et Y_1 respective ab m_3 et m_4 usque ad x_1'' continuo pergant, ipsam C ab infinito usque ad c'' continuo decrescere, simulque fore:

$$9.\quad \sqrt{C} = -\frac{\sqrt{(\Delta y_1)}}{(y_1-m_3)(y_1-m_4)} = -\frac{\sqrt{(\Delta Y_1)}}{(Y_1-m_3)(Y_1-m_4)}.$$

Aequatio vero identica:

$$10.\quad C(z-m_4)(z-m_3)+(z-m_2)(z-m_1) = (C+1)(z-y_1)(z-Y_1),$$

has suppeditat:

$$11.\quad \begin{cases} (m_4-m_2)(m_4-m_1) = (C+1)(y_1-m_4)(Y_1-m_4), \\ (m_3-m_2)(m_3-m_1) = (C+1)(y_1-m_3)(Y_1-m_3), \\ C(m_4-m_2)(m_3-m_2) = (C+1)(y_1-m_2)(Y_1-m_2), \\ C(m_4-m_1)(m_3-m_1) = (C+1)(y_1-m_1)(Y_1-m_1), \end{cases}$$

unde prodeunt formulae:

$$12.\quad \frac{(m_3-m_2)(m_3-m_1)}{(m_4-m_2)(m_4-m_1)} = \frac{(m_3-y_1)(m_3-Y_1)}{(m_4-y_1)(m_4-Y_1)},$$

$$13.\quad \sqrt{C} = \sqrt{\left(\frac{(m_4-m_2)(m_4-m_1)}{(m_4-m_1)(m_3-m_1)}\right)}\sqrt{\left(\frac{(y_1-m_1)(Y_1-m_1)}{(m_4-y_1)(m_4-Y_1)}\right)}.$$

Aequatione (10.) et aequatione utraque priori (11.) logarithmice differentiatis, emanant hae formulae:

$$\frac{dC(z-m_4)(z-m_3)}{C(z-m_4)(z-m_3)+(z-m_2)(z-m_1)} - \frac{dC}{1+C} = -\frac{dy_1}{z-y_1}-\frac{dY_1}{z-Y_1},$$
$$\frac{dC}{1+C} = \frac{dy_1}{m_4-y_1}+\frac{dY_1}{m_4-Y_1},$$
$$\frac{dC}{1+C} = \frac{dy_1}{m_3-y_1}+\frac{dY_1}{m_3-Y_1};$$

quarum prima et secunda per $\frac{1}{(z-m_4)(m_4-m_3)\sqrt{C}}$ multiplicatis,

prima et tertia per $\frac{1}{(z-m_3)(m_3-m_4)\sqrt{C}}$ multiplicatis,

additioneque facta, prodit haec denique aequatio:

$$-\frac{dC}{\sqrt{C}\{C(z-m_4)(z-m_3)+(z-m_2)(z-m_1)\}}$$
$$=\frac{dy_1}{(z-y_1)(m_4-y_1)(m_3-y_1)\sqrt{C}}+\frac{dY_1}{(z-Y_1)(m_4-Y_1)(m_3-Y_1)\sqrt{C}}.$$

In altera huius aequationis parte loco ipsius $\sqrt{C}$ introducantur valores e formulis (8.) et (9.), atque in utraque integratio instituatur, quo facto habentur formulae:

$$14.\ \int_{m_1}^{y_1}\frac{dy_1}{(z-y_1)\sqrt{(\varDelta y_1)}}+\int_{m_2}^{Y_1}\frac{dY_1}{(z-Y_1)\sqrt{(\varDelta Y_1)}}=-\frac{2}{\sqrt{(-\varDelta z)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}(z-m_3)(z-m_4)}{\sqrt{(-\varDelta z)}},$$

$$15.\ \int_{m_3}^{y_1}\frac{dy_1}{(z-y_1)\sqrt{(\varDelta y_1)}}+\int_{m_4}^{Y_1}\frac{dY_1}{(z-Y_1)\sqrt{(\varDelta Y_1)}}=\frac{2}{\sqrt{(-\varDelta z)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}(z-m_3)(z-m_4)}{\sqrt{(-\varDelta z)}},$$

illa pro prioribus, haec pro posterioribus limitibus antea propositis valens. Inter limites utriusque aequationis y_1, Y_1 constat aequatio algebraica (12.), nec non $\sqrt{C}$ determinatur ope formulae (13.).

Aequationis (14.) utroque termino secundum descendentes ipsius z potestates evoluto prodeunt hae:

$$\int_{m_1}^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{(\varDelta y)}}+\int_{m_2}^{Y_1}\frac{dy}{\sqrt{(\varDelta y)}}=0,\quad \int_{m_1}^{y_1}\frac{y\,dy}{\sqrt{(\varDelta y)}}+\int_{m_2}^{Y_1}\frac{y\,dy}{\sqrt{(\varDelta y)}}=-2\operatorname{arc\,tang}\sqrt{C},$$

$$\int_{m_1}^{y_1}\frac{y^x dy}{\sqrt{(\varDelta y)}}+\int_{m_2}^{Y_1}\frac{y^x dy}{\sqrt{(\varDelta y)}}=-2\left[\frac{z^x}{\sqrt{(-\varDelta z)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}(z-m_3)(z-m_4)}{\sqrt{(-\varDelta z)}}\right]_{z^{-1}},$$

nec non generalior:

$$\int_{m_1}^{y_1}\frac{\varPhi y\,dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\varDelta y)}}+\int_{m_2}^{Y_1}\frac{\varPhi y\,dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\varDelta y)}}$$
$$=+2\left[\frac{\varPhi z}{(z-\alpha)\sqrt{(-\varDelta z)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}(z-m_3)(z-m_4)}{\sqrt{(-\varDelta z)}}\right]_{z^{-1}}$$
$$-2\frac{\varPhi\alpha}{\sqrt{(-\varDelta\alpha)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}(\alpha-m_3)(\alpha-m_4)}{\sqrt{(-\varDelta\alpha)}},$$

ubi $\varPhi z$ functionem ipsius z rationalem integram, α quantitatem constantem quamlibet denotat, nec non denotatio usitata pro coëfficiente evolutionis adhibita est.

Exempli gratia posito:

$$m_4 = \infty, \quad m_3 = \frac{1}{x^2}, \quad m_2 = 1, \quad m_1 = 0,$$

$$\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{[y(1-y)(1-x^2 y)]}} = 2u, \quad \int_0^{Y_1} \frac{dy}{\sqrt{[y(1-y)(1-x^2 y)]}} = 2U,$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{[y(1-y)(1-x^2 y)]}} = 2K, \quad y_1 = \sin^2 \operatorname{am} u, \quad Y_1 = \sin^2 \operatorname{am} U,$$

$$\int_0^{y_1} \frac{\sqrt{(1-x^2 y)}\,dy}{\sqrt{[y(1-y)]}} = 2E(u), \quad \int_0^{Y_1} \frac{x^2 (\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a)\, y\, dy}{(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am} a . y)\sqrt{[y(1-y)(1-x^2 y)]}} = 2\Pi(u,a),$$

ex antecedentibus sequuntur formulae notissimae:

$$\sin \operatorname{am}(K-u) = \frac{\cos \operatorname{am} u}{\sqrt{(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am} u)}},$$

$$\sin \operatorname{am} \tfrac{1}{2} K = \frac{1}{\sqrt{(1+x_1)}},$$

$$E(u) + E(K-u) - E(K) = x^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(K-u),$$

$$\Pi(u,a) + \Pi(K-u,a) - \Pi(K,a) = \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1 - x^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(K-u) \sin \operatorname{am} a \sin \operatorname{am}(K-a)}{1 + x^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(K-u) \sin \operatorname{am} a \sin \operatorname{am}(K-a)} \right),$$

$$2E(\tfrac{1}{2}K) - E(K) = 1 - x_1,$$

$$2\Pi(\tfrac{1}{2}K, a) - \Pi(K,a) = \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1-(1-x_1) \sin \operatorname{am} a \sin \operatorname{am}(K-a)}{1+(1-x_1) \sin \operatorname{am} a \sin \operatorname{am}(K-a)} \right),$$

$$\sin \operatorname{am}(\tfrac{1}{2}K + iK_1) = \frac{1}{\sqrt{(1-x_1)}}.$$

ubi ponitur:

$$\sqrt{(1-x^2)} = x_1, \quad \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{[y(1-y)(1-x_1^2 y)]}} = 2K_1.$$

2.

Easdem disquisitiones de *Abelianis* integralibus instituentibus nobis, primum problema simile algebraicum speciale solvere, atque deinde ad analyticum generalius aggredi placet. Iam vero methodus illud solvendi, in articulo antecedenti adhibita, quae hic ad aequationem quadraticam ducit, in simili problemate ad integralia ultraelliptica pertinente, aequationem sublimioris gradus provocat, quam ad systemata aequationum minoris gradus reducere convenit. Quam ob causam extemplo alia via ad systemata haec ipsa pervenire malim eamque in casu iam exposito simplicissimo persequi.

Posito:

17. $\frac{m_3-z}{m_4-z}=v^2,\quad \frac{m_3-m_1}{m_4-m_1}=\eta_1^2,\quad \frac{m_3-m_2}{m_4-m_2}=\eta_2^2,$

18. $\sqrt{(c+1)}\{v^2(m_4-x_1)-(m_3-x_1)\}=U,\quad \sqrt{c}.(m_4-m_3)v=V,$

aequatio identica:

$$c(z-m_4)(z-m_3)+(z-m_2)(z-m_1)=(1+c)(z-x_1)^2,$$

in hanc abit:

19. $(m_4-m_1)(m_4-m_2)(v^2-\eta_1^2)(v^2-\eta_2^2)=U^2-V^2.$

Inde coniicis, quia U est functio par, et V functio impar ipsius v, illa secundi, haec primi gradus, fore:

20. $U+V=c_1(v+\eta_1)(v+\eta_2),\quad U-V=c_1(v-\eta_1)(v-\eta_2),$

igiturque formulis (18.) advocatis:

$$U=\tfrac{1}{2}c_1\{(v+\eta_1)(v+\eta_2)+(v-\eta_1)(v-\eta_2)\}=\sqrt{(1+c)}\{v^2(m_4-x_1)-(m_3-x_1)\},$$
$$V=\tfrac{1}{2}c_1\{(v+\eta_1)(v+\eta_2)-(v-\eta_1)(v-\eta_2)\}=\sqrt{c}\{m_4-m_3\}v.$$

Ibi posito $v^2=\infty$, $v^2=1$, prodeunt formulae:

21. $\frac{\sqrt{c}(m_4-m_3)}{\eta_1+\eta_2}=c_1,\qquad$ 22. $\frac{\sqrt{(1+c)}(m_4-m_3)}{1+\eta_1\eta_2}=c_1,$

nec non posito: $v^2=\eta_1^2$, $v^2=\eta_2^2$ post faciles reductiones:

23. $\begin{cases} m_4-x_1=\frac{m_4-m_3}{1+\eta_1\eta_2}, & m_3-x_1=-\frac{m_4-m_3}{1+\eta_1\eta_2}\eta_1\eta_2, \\ m_2-x_1=\frac{m_4-m_3}{1+\eta_1\eta_2}.\frac{\eta_2(\eta_1+\eta_2)}{\eta_2^2-1}, & m_1-x_1=\frac{m_4-m_3}{1+\eta_1\eta_2}.\frac{\eta_1(\eta_1+\eta_2)}{\eta_1^2-1}. \end{cases}$

E formulis (18.), (19.) et (20.), posito $v=1$, sequitur, valorem ipsius U^2-V^2 pro $v=1$ fore:

$$=(m_4-m_3)^2=(m_4-m_1)(m_4-m_2)(1-\eta_1^2)(1-\eta_2^2)=c_1^2(1-\eta_1^2)(1-\eta_2^2)$$

unde valor ipsius c_1, quem, quia quantitates η_1^2 et η_2^2 unitate minores sint, positivum esse formula (22.) docet, deducitur:

$$c_1=\frac{m_4-m_3}{\sqrt{[(1-\eta_1^2)(1-\eta_2^2)]}}=\sqrt{[(m_4-m_1)(m_4-m_2)]},$$

quo in formulis (21.) et (22.) substituto, habentur formulae:

24. $\sqrt{c}=\frac{\eta_1+\eta_2}{\sqrt{[(1-\eta_1^2)(1-\eta_2^2)]}},\qquad$ 25. $\sqrt{(1+c)}=\frac{1+\eta_1\eta_2}{\sqrt{[(1-\eta_1^2)(1-\eta_2^2)]}}.$

Quia igitur summa $\eta_1+\eta_2$, nec non differentia:

$$\eta_1^2-\eta_2^2=\frac{(m_4-m_3)(m_2-m_1)}{(m_4-m_1)(m_4-m_2)},$$

positivis valoribus gaudent, etiam differentia $\eta_1-\eta_2$, simul cum ipso η_1 positiva

sit necesse est. Itaque ponere licet:

$$\eta_1 = \sqrt{\left(\frac{m_3-m_1}{m_4-m_1}\right)}, \qquad \eta_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{m_3-m_2}{m_4-m_2}\right)}.$$

Formulae (23.) vero docent, valorem x_1 pro superiori signo ipsius η_2 in intervallo $m_3 - m_4$ contineri, pro inferiori in intervallo $m_1 - m_2$, nec non fore:

$$x_1 = \frac{m_3 + m_4\,\eta_1\eta_2}{1+\eta_1\eta_2},$$

quae formulae cum formulis (4.), (5.), (6.), (7.) optime congruunt.

Si expressionem:

$$c(z-m_4)(z-m_3)+(z-m_2)(z-m_1)$$

brevitatis gratia per (4,3), similiterque per (3,2), (2,1), (1,4), (4,2), (3,1) designas expressiones similes, quarum prior terminus respective est:

$$c(z-m_3)(z-m_2),\quad c(z-m_2)(z-m_1),\quad c(z-m_1)(z-m_4),\quad c(z-m_4)(z-m_2),$$
$$c(z-m_3)(z-m_1),$$

similem calculum in his quinque ceteris formis instituere superfluum esset.

Substitutionis enim linearis ope huius:

$$Z = p\,\frac{z-n}{z-m},$$

ubi quantitas m his respective satisfacit conditionibus:

$$\begin{array}{ll} m_4 > m \geqq m_3, & \\ m_3 > m \geqq m_2, & \qquad p(n-m) > 0, \\ m_2 > m \geqq m_1, & \end{array}$$

formae respective (3,2), (2,1), (1,4) ad formam fundamentalem (4,3) revocantur. Nimirum hac substitutione habetur, si h quilibet numerorum 1, 2, 3, 4, est, et ponitur:

$$M_h = p.\frac{n-m_h}{m-m_h},$$

$$m_h - z = (m_h - m)\frac{Z-M_h}{Z-p},$$

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{p(n-m)}{(z-m)^2} = \frac{(Z-p)^2}{p(n-m)}.$$

Inde concluditur argumento z ab m usque ad $-\infty$, et ab ∞ usque ad m continuo pergente, argumentum Z ab ∞ usque ad p, et ab p usque ad $-\infty$ continuo decrescere. Hinc patet, si fuerit:

$$m_4 > m \geqq m_3,$$

fore:

$$M_3 > M_2 > M_1 > M_4,$$

si fuerit:

$$m_3 > m \geqq m_2,$$

fore:

$$M_2 > M_1 > M_4 > M_3,$$

atque si fuerit:

$$m_2 > m \geqq m_1,$$

fore:

$$M_1 > M_4 > M_3 > M_2.$$

Unde sequitur formas (3,2), (2,1), (1,4), in novis signis forma (4,3) indui. —

Formae denique (4,2) et (3,1) realem problematis solutionem non admittunt, quippe quae, si quantitas c realis est, duplici factore gaudere nequeunt. Aequatio enim formae:

$$(4,2) = 0$$

exempli gratia unam singulam habet radicem aut in intervallo $m_3 - m_4$ aut in intervallo $m_2 - m_3$, prout quantitas c positivo vel negativo valore gaudet.

3.

Problema algebraicum simile, ad integralia *Abeliana* primi ordinis pertinens ita pronuntiatur.

Si differentiae quantitatum realium $m_1, m_2, \ldots m_6$

$$m_6 - m_5, \quad m_5 - m_4, \quad \ldots . \quad m_2 - m_1$$

positivae sunt, quantitates c, a, x_1, x_2 ita sunt determinandae, ut expressio biquadratica:

26. $$c(z-a)^2(z-m_6)(z-m_5) + (z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1),$$

formam:

$$= (c+1)(z-x_1)^2(z-x_2)^2,$$

induat.

Expressione (26.) cum ipsius differentiali pro $z = x_1$, et $z = x_2$ evanescente, habentur formulae:

27. $$\begin{cases} \dfrac{2}{x_1-a} = \dfrac{1}{x_1-m_1} + \dfrac{1}{x_1-m_2} + \dfrac{1}{x_1-m_3} + \dfrac{1}{x_1-m_4} - \dfrac{1}{x_1-m_5} - \dfrac{1}{x_1-m_6}, \\ \dfrac{2}{x_2-a} = \dfrac{1}{x_2-m_1} + \dfrac{1}{x_2-m_2} + \dfrac{1}{x_2-m_3} + \dfrac{1}{x_2-m_4} - \dfrac{1}{x_2-m_5} - \dfrac{1}{x_2-m_6}. \end{cases}$$

Posteriori a priori subtracta, divisioneque per $(x_2 - x_1)$ facta, haec prodit, signo summatorio adhibito, formula:

$$\frac{2}{(x_1-a)(x_2-a)} = \sum_1^4 {}^h \left(\frac{1}{(x_1-m_h)(x_2-m_h)}\right) - \frac{1}{(x_1-m_5)(m_2-m_5)} - \frac{1}{(x_1-m_6)(x_2-m_6)},$$

quae, quantitate a ope formularum (27.) eliminata, hanc suppeditat aequationem:

28. $$\left\{\sum_1^4 {}^h\left(\frac{1}{x_1-m_h}\right)-\frac{1}{x_1-m_5}-\frac{1}{x_1-m_6}\right\}\left\{\sum_1^4 {}^h\left(\frac{1}{x_2-m_h}\right)-\frac{1}{x_2-m_5}-\frac{1}{x_2-m_6}\right\}$$
$$=2\sum_1^4 {}^h\left(\frac{1}{(x_1-m_h)(x_2-m_h)}\right)-\frac{2}{(x_1-m_5)(x_2-m_5)}-\frac{2}{(x_1-m_6)(x_2-m_6)}.$$

Iam vero ex aequatione proposita:

29. $$c(z-a)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1)$$
$$=(c+1)(z-x_1)^2(z-x_2)^2,$$

emanat formula:

$$\frac{(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)}{(m_5-m_1)(m_5-m_2)(m_5-m_3)(m_5-m_4)}=\frac{(m_6-x_1)^2(m_6-x_2)^2}{(m_5-x_1)^2(m_5-x_2)^2},$$

cuius ope ipso x_2 ex aequatione (28.) eliminato, aequatio sedecimi gradus ad ipsum x_1 determinandum oritur. Haec in octo aequationes quadraticas discerpitur hoc modo. Ponatur:

$$\frac{m_5-z}{m_6-z}=v^2,\qquad \frac{m_5-m_h}{m_6-m_h}=\eta_h^2,$$

ubi h est quilibet quatuor numerorum 1, 2, 3, 4. Inde prodeunt formulae pro qualibet quantitate y valentes:

31. $$z-y=\frac{v^2(m_6-y)-(m_5-y)}{v^2-1},\qquad m_h-y=\frac{\eta_h^2(m_6-y)-(m_5-y)}{\eta_h^2-1};$$

nec non aequatio (29.) in hanc abit:

$$(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)(v^2-\eta_1^2)(v^2-\eta_2^2)(v^2-\eta_3^2)(v^2-\eta_4^2)=U^2-V^2,$$

ubi ponitur:

$$\sqrt{(1+c)}\{v^2(m_6-x_1)-(m_5-x_1)\}\{v^2(m_6-x_2)-(m_5-x_2)\}=U,$$
$$\sqrt{c}\,\{v^2(m_6-a)-(m_5-a)\}(m_6-m_5)v=V.$$

Inde eodem modo ac antea coniicitur, fore:

$$U+V=c_1(v+\eta_1)(v+\eta_2)(v+\eta_3)(v+\eta_4),$$
$$U-V=c_1(v-\eta_1)(v-\eta_2)(v-\eta_3)(v-\eta_4),$$

nec non brevitatis gratia posito:

$$\psi(z)=(z+\eta_1)(z+\eta_2)(z+\eta_3)(z+\eta_4),$$

32. $$\begin{cases}U=\frac{1}{2}c_1(\psi(v)+\psi(-v))=\sqrt{(c+1)}\{v^2(m_6-x_1)-(m_5-x_1)\}\{v^2(m_6-x_2)-(m_5-x_2)\},\\ V=\frac{1}{2}c_1(\psi(v)-\psi(-v))=\quad\sqrt{c}\,(m_6-m_5)v.\{v^2(m_6-a)-(m_5-a)\}.\end{cases}$$

Inde, posito $v^2=1$, $v^2=\infty$, $v^2=0$, prodeunt formulae:

33. $$\sqrt{c}=\frac{1}{2}c_1.\frac{\psi(1)-\psi(-1)}{(m_6-m_5)^2},\qquad 34.\quad \sqrt{(1+c)}=\frac{1}{2}c_1.\frac{\psi(1)+\psi(-1)}{(m_6-m_5)^2},$$

porro

$$35.\quad (m_6-a) = \frac{c_1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4}{m_6-m_5} = \frac{2(m_6-m_5)(\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4)}{\psi(1)-\psi(-1)},$$

$$36.\quad (m_6-x_1)(m_6-x_2) = \frac{c_1}{\sqrt{(1+c)}} = \frac{2(m_6-m_5)^2}{\psi(1)+\psi(-1)},$$

$$37.\quad m_5-a = -\frac{c_1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4}{m_6-m_5}\left\{\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\eta_2}+\frac{1}{\eta_3}+\frac{1}{\eta_4}\right\}$$
$$= -\frac{2(m_6-m_5)\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4}{\psi(1)-\psi(-1)}\left\{\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\eta_2}+\frac{1}{\eta_3}+\frac{1}{\eta_4}\right\},$$

$$38.\quad (m_5-x_1)(m_5-x_2) = \frac{c_1}{\sqrt{(1+c)}}\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 = \frac{2(m_6-m_5)^2\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4}{\psi(1)+\psi(-1)},$$

posito vero $v^2 = \eta_h^2$, hae formulae:

$$39.\quad \begin{cases} m_h-a = -\dfrac{\psi(\eta_h)}{\eta_h}\cdot\dfrac{m_6-m_h}{\psi(1)-\psi(-1)}, \\ (m_h-x_1)(m_h-x_2) = \psi\eta_h\cdot\dfrac{(m_6-m_h)^2}{\psi(1)+\psi(-1)}. \end{cases}$$

Ex aequationibus (33.) et (34.) sequitur fore:

$$\frac{(m_6-m_5)^4}{(1-\eta_1^2)(1-\eta_2^2)(1-\eta_3^2)(1-\eta_4^2))} = c_1^2,$$

sive ope formularum (30.) posterioris:

$$c_1^2 = (m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4).$$

Iam vero formula (34.), quia quantitates η_h^2 unitate minores sunt, docet quantitatem c_1 semper positivam esse, quae cum ita sint, erit:

$$40.\quad c_1 = \sqrt{[(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)]},$$

quo valore in formulis (33.) et (34.) substituto, habentur formulae:

$$41.\quad \begin{cases} \sqrt{(1+c)} = \dfrac{\sqrt{[(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)]}}{2(m_6-m_5)^2}\{\psi(1)+\psi(-1)\}, \\ \sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{[(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)]}}{2(m_6-m_5)^2}\{\psi(1)-\psi(-1)\}, \end{cases}$$

in quibus simul cum formulis (35.), ... (39.) problematis propositi solutio continetur. Inde praeter determinationem quantitatum a, x_1, x_2, functiones $z-a$, $(z-x_1)(z-x_2)$ multis in formis exprimere licet, quarum principales hic proponantur. Priori enim per $P(z)$, posteriori per $\varphi(z)$ denotata, e formulis (31.) et (32.) prodeunt hae:

$$P(z) = \frac{c_1}{2\sqrt{c}(m_6-m_5)}\cdot\frac{\psi(v)-\psi(-v)}{v(v^2-1)} = \frac{-2}{\psi(1)-\psi(-1)}\{(z-m_5)C_1+(z-m_6)C_3\},$$

$$\varphi(z) = \frac{c_1}{2\sqrt{(1+c)}}\cdot\frac{\psi(v)+\psi(-v)}{(v^2-1)^2} = \frac{2}{\psi(1)+\psi(-1)}\{(z-m_5)^2+(z-m_5)(z-m_6)C_2+(z-m_6)^2C_4\},$$

ubi per C_1, C_2, C_3, C_4 designantur respective summae unionum, binionum, ternionum, quaternionumque quantitatum η_1, η_2, η_3, η_4 sine repetitione. Deinde, si per b_1 et b_2 duas quaslibet quatuor quantitatum m_1, m_2, m_3, m_4, hiscum cohaerentes ipsarum η_1^2, η_2^2, η_3^2, η_4^2 duas per β_1^2 et β_2^2 nec non productum:

$$(z-b_1)(z-b_2) = Fz,$$

denotamus, ex identicis aequationibus:

$$42. \quad \begin{cases} \dfrac{Pz}{Fz} = \dfrac{Pb_1}{(b_1-b_2)(z-b_1)} + \dfrac{Pb_2}{(b_2-b_1)(z-b_2)}, \\[2ex] \dfrac{\varphi z}{Fz} = 1 + \dfrac{\varphi b_1}{(b_1-b_2)(z-b_1)} + \dfrac{\varphi b_2}{(b_2-b_1)(z-b_2)}, \end{cases}$$

aequationibus (39.) advocatis has nanciscimur functionum Pz et φz formas:

$$Pz = -\frac{(z-b_1)(z-b_2)}{\psi(1)-\psi(-1)} \left\{ \frac{m_6-b_1}{b_1-b_2} \cdot \frac{\psi\beta_1}{\beta_1} \cdot \frac{1}{z-b_1} + \frac{m_6-b_2}{b_2-b_1} \cdot \frac{\psi\beta_2}{\beta_2} \cdot \frac{1}{z-b_2} \right\},$$

$$\varphi z = (z-b_1)(z-b_2) + \frac{1}{\psi(1)+\psi(-1)} \left\{ \frac{(m_6-b_1)^2}{b_1-b_2} \psi\beta_1 . (z-b_2) + \frac{(m_6-b_2)^2}{b_2-b_1} \psi\beta_2 . (z-b_1) \right\}.$$

Iam igitur quantitas a determinatur ut radix aequationis:

$$43. \quad (z-m_5)C_1 + (z-m_6)C_3 = 0,$$

sive huius:

$$44. \quad \frac{(m_6-b_1)}{z-b_1} \cdot \frac{\psi\beta_1}{\beta_1} - \frac{m_6-m_2}{z-b_2} \cdot \frac{\psi\beta_2}{\beta_2} = 0,$$

atque x_1, x_2 ut radices aequationis quadraticae:

$$45. \quad (z-m_5)^2 + (z-m_5)(z-m_6)C_2 + (z-m_6)^2 C_4 = 0,$$

vel huius:

$$46. \quad \psi(1)+\psi(-1) + \frac{(m_6-b_1)^2}{b_1-b_2} \cdot \frac{\psi\beta_1}{z-b_1} + \frac{(m_6-b_2)^2}{b_2-b_1} \cdot \frac{\psi\beta_2}{z-b_2} = 0.$$

Adnotare adhuc placet, valores φb_1, φb_2 etiam ut valores quantitatum incognitarum systematis singularis duarum aequationum linearium dari. Si enim per c_1 et c_2 denotantur ceterae duae quantitatum quatuor m_1, m_2, m_3, m_4, exceptis b_1 et b_2, atque per γ_1^2, γ_2^2 iiscum cohaerentes quatuor quantitatum η_1^2, η_2^2, η_3^2, η_4^2, ope formulae ex aequationibus (39.) prodeuntis:

$$Pm_h = -\frac{\psi(1)+\psi(-1)}{\psi(1)-\psi(-1)} \cdot \frac{\varphi m_h}{\eta_h(m_6-m_h)},$$

e formulis identicis (42.) emanant hae aequationes:

$$\frac{\varphi c_1}{Fc_1} = \frac{m_6-c_1}{(m_6-b_1)(c_1-b_1)} \cdot \frac{\varphi b_1}{F'b_1} \cdot \frac{\gamma_1}{\beta_1} + \frac{m_6-c_1}{(m_6-b_2)(c_1-b_2)} \cdot \frac{\varphi b_2}{F'b_2} \cdot \frac{\gamma_1}{\beta_2},$$

$$\frac{\varphi c_2}{Fc_2} = \frac{m_6-c_2}{(m_6-b_1)(c_2-b_1)} \cdot \frac{\varphi b_1}{F'b_1} \cdot \frac{\gamma_2}{\beta_1} + \frac{m_6-c_2}{(m_6-b_2)(c_2-b_2)} \cdot \frac{\varphi b_2}{F'b_2} \cdot \frac{\gamma_2}{\beta_2},$$

$$\frac{\varphi c_1}{Fc_1} = 1+\frac{1}{c_1-b_1}\cdot\frac{\varphi b_1}{F'b_1}+\frac{1}{c_1-b_2}\cdot\frac{\varphi b_2}{F'b_2},$$
$$\frac{\varphi c_2}{Fc_2} = 1+\frac{1}{c_2-b_1}\cdot\frac{\varphi b_1}{F'b_1}+\frac{1}{c_2-b_2}\cdot\frac{\varphi b_2}{F'b_2},$$

quibus apte collatis, ob formulam identicam:

$$m_6-m_h = \frac{m_6-m_5}{1-\eta_h^2},$$

prodit systema harum aequationum:

$$1+\frac{\varphi b_1}{(m_6-b_1)F'b_1}\cdot\frac{\gamma_1+\frac{1}{\beta_1}}{\gamma_1+\beta_1}+\frac{\varphi b_2}{(m_6-b_2)F'b_2}\cdot\frac{\gamma_1+\frac{1}{\beta_2}}{\gamma_1+\beta_2} = 0,$$
$$1+\frac{\varphi b_1}{(m_6-b_1)F'b_1}\cdot\frac{\gamma_2+\frac{1}{\beta_1}}{\gamma_2+\beta_1}+\frac{\varphi b_2}{(m_6-b_2)F'b_2}\cdot\frac{\gamma_2+\frac{1}{\beta_2}}{\gamma_2+\beta_2} = 0.$$

Inde formularum (39.) secunda adhibita, sequitur si habeantur aequationes:

$$47.\quad \begin{cases} 1+z_1.\dfrac{\gamma_1+\frac{1}{\beta_1}}{\gamma_1+\beta_1}+z_2.\dfrac{\gamma_1+\frac{1}{\beta_2}}{\gamma_1+\beta_2} = 0, \\ 1+z_1.\dfrac{\gamma_2+\frac{1}{\beta_1}}{\gamma_2+\beta_1}+z_2.\dfrac{\gamma_2+\frac{1}{\beta_2}}{\gamma_2+\beta_2} = 0, \end{cases}$$

fore:

$$48.\quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{1-\beta_2^2}{\beta_2^2-\beta_1^2}\cdot\dfrac{\psi(\beta_1)}{\psi(1)+\psi(-1)} = \dfrac{\varphi b_1}{(b_1-b_2)(m_6-b_1)}, \\ z_2 = \dfrac{1-\beta_1^2}{\beta_1^2-\beta_2^2}\cdot\dfrac{\psi(\beta_2)}{\psi(1)+\psi(-1)} = \dfrac{\varphi b_2}{(b_2-b_1)(m_6-b_2)}, \end{cases}$$

ubi ponitur:

$$\psi z = (z+\beta_1)(z+\beta_2)(z+\gamma_1)(z+\gamma_2).$$

Id quod facilis calculus comprobat.

4.

Iam in naturam quantitatum c, a, x_1, x_2 pro diversis quantitatum η_1, η_2, η_3, η_4 valoribus inquirere placet. Formularum (39.) prior docet, quantitatem a realem, atque formulae (41.), ipsum c adeo positivum esse. Inde iam coniicis, radices duplices x_1, x_2 aequationis:

$$47.\quad c(z-a)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1) = 0$$

imaginariis valoribus nisi coniugatis gaudere non posse. Si enim haberetur $x_1 = m+ni$, quia aequatio realibus coëfficientibus gaudet, $x_2 = m-ni$ po-

natur, necesse esset. Deinde patet valores ipsorum x_1 et x_2 in ullo intervallorum horum:

$$-\infty \dots m_1, \quad m_2 \dots m_3, \quad m_4 \dots m_5, \quad m_6 \dots \infty,$$

contineri non posse, quippe pro eiusmodi valore ipsius z prior aequationis (29.) terminus, semper positivum valorem induens, evanescere nequit. Quantitatis denique a valor in nullo intervallorum horum:

$$m_1 \dots m_2, \quad m_3 \dots m_4,$$

contineri potest. Si enim exempli gratia prior casus locum haberet, ita ut differentiae:

$$a - m_1, \quad m_2 - a$$

positivae essent, prior terminus aequationis (29.) pro $z = a$ negativo, posterior vero positivo valore indueretur, id quod fieri nequit.

Quae considerationes ceteris articuli praecedentis formulis optime comprobantur in diversis, quas facere licet de quantitatibus η_h suppositionibus. Quas ut inveniamus, adnotetur, differentias

$$\eta_1^2 - \eta_2^2, \quad \eta_2^2 - \eta_3^2, \quad \eta_3^2 - \eta_4^2$$

ob ipsorum m_1, m_2, m_3, m_4 naturam positivas esse, formulis (30.) comprobari. Deinde e formularum (41.) secunda conditio inter quantitates η_h necessaria,

$$(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\eta_3)(1+\eta_4) - (1-\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3)(1-\eta_4) > 0,$$

emanat, quae quum, simul η_1 cum $-\eta_1$, η_2 cum $-\eta_2$, η_3 cum $-\eta_3$, η_4 cum $-\eta_4$ commutatis, constare nequeat, harum quantitatum quod attinet ad signa, nonnisi octo suppositiones constitui posse patet. Octo expressiones diversae functionis φz inde orientes tales erunt, ut, ipsarum producto posito $= 0$, aequatio sedecimi gradus emergat, quam, in articulo 3. memoratam, hoc modo in octo aequationes quadraticas resolutam videas.

Animadvertendum est, et ut in naturam octo classium penetrare liceat, et quia in problemate analytico postea adhibetur, expressiones:

$$m_6 - a, \quad m_5 - a, \quad m_4 - a, \quad m_3 - a, \quad m_2 - a, \quad m_1 - a,$$

respective simul cum expressionibus:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4, \quad -\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} + \frac{1}{\eta_4}\right), \quad -\eta_1\eta_2\eta_3, \quad -\eta_1\eta_2\eta_3, \quad -\eta_1, \quad -\eta_1$$

nec non expressiones:

$$\varphi m_6, \quad \varphi m_5, \quad \varphi m_4, \quad \varphi m_3, \quad \varphi m_2, \quad \varphi m_1,$$

respective simul cum expressionibus:

$$1, \quad \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4, \quad \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4, \quad \eta_1\eta_2, \quad \eta_1\eta_2, \quad 1$$

positivas vel negativas esse. Id quod hoc modo demonstratur, ut in expres-

sionibus (39.) quantitatis $\psi\eta_h$ factor quilibet

$$\eta_h+\eta_\varkappa$$

transformetur, prout $h \lesseqgtr \varkappa$ est, in formas:

$$\eta_h\left(1+\frac{\eta_\varkappa}{\eta_h}\right) \quad \text{vel} \quad \eta_\varkappa\left(1+\frac{\eta_h}{\eta_\varkappa}\right),$$

quae, cum respective $\left(\frac{\eta_\varkappa}{\eta_h}\right)^2$ vel $\left(\frac{\eta_h}{\eta_\varkappa}\right)^2$ unitate minores sint, respective simul cum η_h vel $\eta_\varkappa$ positivis negativisve valoribus gaudent. Quibus propositionibus adiutus, in quibusnam intervallis pro octo diversis de quantitatibus η_h suppositionibus, valores quantitatum a, x_1, x_2, contineantur concludis. Id quod ex hac tabula desumere licet.

Casus primus:

$$\eta_1=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)},\ \eta_2=-\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)},\ \eta_3=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)},\ \eta_4=-\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)},$$

a continetur in intervallo $m_2 - m_3$,
x_1 - - - - - - $m_1 - m_2$,
x_2 - - - - - - $m_3 - m_4$.

Casus secundus:

$$\eta_1=\pm\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)},\ \eta_2=\mp\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)},\ \eta_3=\mp\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)},\ \eta_4=\pm\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)},$$

ubi superiora vel inferiora signa simul eligenda sunt, ita ut differentia $(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\eta_3)(1+\eta_4)-(1-\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3)(1-\eta_4)$ posito valore induatur;

a continetur in intervallo $m_4 \dots \infty$ pro superioribus signis,
a - - - - - - $-\infty \dots m_1$ pro inferioribus signis,
x_1 - - - - - - $m_1 \dots m_2$,
x_2 - - - - - - $m_3 \dots m_4$.

Casus tertius:

$$\eta_1=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)},\ \eta_2=-\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)},\ \eta_3=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)},\ \eta_4=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)},$$

a continetur in intervallo $m_2 \dots m_3$,
x_1 - - - - - - $m_1 \dots m_2$,
x_2 - - - - - - $m_5 \dots m_6$.

Casus quartus:

$$\eta_1=\pm\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)},\ \eta_2=\mp\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)},\ \eta_3=\mp\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)},\ \eta_4=\mp\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)},$$

ubi superiora vel inferiora signa simul ponenda, ita ut differentia:

$$(1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\eta_3)(1+\eta_4)-(1-\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3)(1-\eta_4)$$

positiva sit;

a continetur in intervallo $m_5 \dots \infty$ pro superioribus signis,
a - - - - - - $-\infty \dots m_1$ pro inferioribus signis,
x_1 - - - - - $m_1 \dots m_2$,
x_2 - - - - - $m_5 \dots m_6$.

Casus quintus:

$$\eta_1=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)},\quad \eta_2=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)},\quad \eta_3=-\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)},\quad \eta_4=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)},$$

a continetur in intervallo $m_2 \dots m_3$,
x_1 - - - - - $m_3 \dots m_4$,
x_2 - - - - - $m_5 \dots m_6$.

Casus sextus:

$$\eta_1=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)},\quad \eta_2=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)},\quad \eta_3=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)},\quad \eta_4=-\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)},$$

a continetur in intervallo $m_4 \dots m_6$,
x_1 - - - - - $m_3 \dots m_4$,
x_2 - - - - - $m_5 \dots m_6$.

Casus septimus:

$$\eta_1=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)},\quad \eta_2=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)},\quad \eta_3=-\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)},\quad \eta_4=-\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right),$$

a continetur in intervallo $m_2 \dots m_3$,

x_1 et x_2 continentur utrumque in uno trium intervallorum $m_1 \dots m_2$, $m_3 \dots m_4$, $m_5 - m_6$, aut gaudent valoribus imaginariis coniugatis.

Casus octavus:

$$\eta_1=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)},\quad \eta_2=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)},\quad \eta_3=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)},\quad \eta_4=\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)},$$

a continetur in intervallo $m_5 \dots m_6$,
x_1 - - - - - $m_5 \dots a$,
x_2 - - - - - $a \dots m_6$.

Sufficiat casum ultimum accuratius exponere, ubi a ut radix aequationis (43.), cuius prior terminus pro $z=m_5$ negativo, et pro $z=m_6$ positivo valore induitur, in intervallo $m_5 \dots m_6$ contineatur necesse est; nec non x_1 et x_2 ut radices aequationis (45.), cuius prior terminus pro $z=m_5$ et $z=m_6$ positivis

valoribus gaudet, nec non pro $z=a$ valore hoc induitur negativo:

$$\frac{(a-m_5)^2}{C_3^2}\{C_3^2-C_1C_2C_3+C_1^2C_4\},$$

respective in intervallis $m_5 \ldots . a$ et $a \ldots . m_6$ iacent.

In antecedentibus completa continetur solutio problematis, expressionem formae:

$$c(z-a)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1),$$

quam hic rursus per [6, 5] denotare placet, in formam:

$$(c+1)(z-x_1)^2(z-x_2)^2$$

redigendi. Quinque expressionis fundamentalis formas, quae, simili denotatione adhibita, erunt:

[5, 4], [4, 3], [3, 2], [2, 1], [1, 6],

singulas similiter tractare licet, quippe quae similem redactionem admittunt. Eandem vero ope substitutionis:

$$Z = p\left(\frac{n-z}{m-z}\right),$$

ubi quantitas m respective relationibus:

$$m_6 > m \geqq m_5, \quad m_5 > m \geqq m_4, \quad m_4 > m \geqq m_3, \quad m_3 > m \geqq m_2, \quad m_2 > m \geqq m_1$$

satisfacit, nec non habetur: $p(n-m)>0$, effici posse patet, quae illas respective formas ad formam [6, 5] pro argumento Z revocat.

Contra formas [6, 4] cum quinque ipsi cognatis:

[5, 3], [4, 2], [3, 1], [2, 6], [1, 5]

atque [6, 3] cum duabus [5, 2], [4, 1], quippe in quibus problemata similia reali solutione carent, omittere placet. Si enim quantitates c et a reales sunt, aequatio:

$$[6, 4] = 0 \text{ in intervallis } m_3 - m_4, \text{ vel } m_4 - m_5,$$
$$\text{et aequatio } [6, 3] = 0 \text{ in intervallis } m_3 - m_4, \text{ vel } m_2 - m_3,$$

prout valor ipsius c positivus est vel negativus, impari numero radicum realium gaudent. Id quod cum forma $(c+1)(z-x_1)^2(z-x_2)^2$ congruere nequit. Idem de formis his cognatis mutatis mutandis observatur.

5.

Iam ad partem analyticam harum de integralibus functionibusque *Abelianis* primi ordinis disquisitionum transeuntes, ponamus aequationem eiusdem formae generalem:

1. $C(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1)=0$

radices quatuor y_1, y_2, Y_1, Y_2, habere, ita ut aequatio valeat identica:

$$2.\quad C(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1) = (C+1)(z-y_1)(z-y_2)(z-Y_1)(z-Y_2).$$

Sint quantitates e_1, e_2, E_1, E_2, tales unitates positivae vel negativae, ut habeantur formulae ex aequatione (1.) ortae:

$$3.\quad \begin{cases} \sqrt{C}(y_1-A)=\dfrac{e_1\sqrt{(\Delta y_1)}}{(y_1-m_5)(y_1-m_6)}, & \sqrt{C}(y_2-A)=\dfrac{e_2\sqrt{(\Delta y_2)}}{(y_2-m_5)(y_2-m_6)}, \\ \sqrt{C}(Y_1-A)=\dfrac{E_1\sqrt{(\Delta Y_1)}}{(Y_1-m_5)(Y_1-m_6)}, & \sqrt{C}(Y_2-A)=\dfrac{E_2\sqrt{(\Delta Y_2)}}{(Y_2-m_5)(Y_2-m_6)}, \end{cases}$$

ubi brevitatis gratia ponitur:

$$-(z-m_1)(z-m_2)(z-m_3)(z-m_4)(z-m_5)(z-m_6) = \Delta z.$$

Iam secundum theorema *Abelianum* inter quatuor quantitates y_1, y_2, Y_1, Y_2, quas duabus aequationibus algebraicis inter se coniungi patet, plures constant aequationes transcendentes. Eas hoc loco sequenti methodo evolvere placet. Aequatio (2.) has suppeditat formulas:

$$4.\quad (A-m_1)(A-m_2)(A-m_3)(A-m_4)=(C+1)(A-y_1)(A-y_2)(A-Y_1)(A-Y_2),$$

$$5.\quad (m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)=(C+1)(m_6-y_1)(m_6-y_2)(m_6-Y_1)(m_6-Y_2),$$

$$6.\quad (m_5-m_1)(m_5-m_2)(m_5-m_3)(m_5-m_4)=(C+1)(m_5-y_1)(m_5-y_2)(m_5-Y_1)(m_5-Y_2),$$

$$7.\quad C(m_x-A)^2(m_x-m_6)(m_x-m_5) =(C+1)(m_x-y_1)(m_x-y_2)(m_x-Y_1)(m_x-Y_2),$$

designante x indices 1, 2, 3, 4. Eadem aequatione (2.) identica secundum z differentiata, et deinde $z=A$ posito, formula (4.) advocata, prodit haec:

$$8.\quad \frac{1}{A-m_1}+\frac{1}{A-m_2}+\frac{1}{A-m_3}+\frac{1}{A-m_4}=\frac{1}{A-y_1}+\frac{1}{A-y_2}+\frac{1}{A-Y_1}+\frac{1}{A-Y_2}.$$

Iam vero e logarithmica differentiatione aequationum (4.), (5.), (6.), (2.) quantitatibus C, A, y_1, y_2, Y_1, Y_2, ut variabilibus assumtis, formulae (8.) ope, prodeunt hae formulae differentiales:

$$9.\quad \frac{dC}{1+C}=\frac{dy_1}{A-y_1}+\frac{dY_1}{A-Y_1}+\frac{dy_2}{A-y_2}+\frac{dY_2}{A-Y_2},$$

$$10.\quad \frac{dC}{1+C}=\frac{dy_1}{m_6-y_1}+\frac{dY_1}{m_6-Y_1}+\frac{dy_2}{m_6-y_2}+\frac{dY_2}{m_6-Y_2},$$

$$11.\quad \frac{dC}{1+C}=\frac{dy_1}{m_5-y_1}+\frac{dY_1}{m_5-Y_1}+\frac{dy_2}{m_5-y_2}+\frac{dY_2}{m_5-Y_2},$$

$$12.\quad \frac{(z-A)(z-m_6)(z-m_5)\{(z-A)dC-2C\,dA\}}{C(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1)}-\frac{dC}{1+C} = -\frac{dy_1}{z-y_1}-\frac{dY_1}{z-Y_1}-\frac{dy_2}{z-y_2}-\frac{dY_2}{z-Y_2}.$$

quarum postrema brevitatis gratia posito:

$$U = \frac{\sqrt{C}(z-A)(z-m_6)(z-m_5)}{\sqrt{(-\Delta z)}}$$

in hanc abit

$$13.\quad 2\,U\,d.(\text{arc tang}\,U) - \frac{dC}{1+C} = -\frac{dy_1}{z-y_1} - \frac{dY_1}{z-Y_1} - \frac{dy_2}{z-y_2} - \frac{dY_2}{z-Y_2}.$$

Summa aequationum (9.) et (13.) per $\frac{1}{(z-A)(A-m_6)(A-m_5)\sqrt{C}}$,

- - - - - - (10.) et (13.) per $\frac{1}{(z-m_6)(m_6-m_5)(m_6-A)\sqrt{C}}$,

- - - - - - (11.) et (13.) per $\frac{1}{(z-m_5)(m_5-A)(m_5-m_6)\sqrt{C}}$

multiplicata, triumque horum productorum additione facta ob aequationem identicam:

$$\frac{1}{(z-A)(A-m_6)(A-m_5)} + \frac{1}{(z-m_6)(m_6-m_5)(m_6-A)} + \frac{1}{(z-m_5)(m_5-A)(m_5-m_6)} = \frac{1}{(z-A)(z-m_6)(z-m_5)},$$

emanat haec denique formula:

$$-\frac{2d.\text{arc tang}\,U}{\sqrt{(-\Delta z)}}$$

$$= \frac{dy_1}{\sqrt{C(z-y_1)(y_1-A)(y_1-m_6)(y_1-m_5)}} + \frac{dY_1}{\sqrt{C(z-Y_1)(Y_1-A)(Y_1-m_6)(Y_1-m_5)}}$$

$$+ \frac{dy_2}{\sqrt{C(z-y_2)(y_2-A)(y_2-m_6)(y_2-m_5)}} + \frac{dY_2}{\sqrt{C(z-Y_2)(Y_2-A)(Y_2-m_6)(Y_2-m_5)}},$$

quae, quatuor formulis (3.) adhibitis, integrationeque instituta inde a valoribus respective:

$$U^0,\quad y_1^0,\quad Y_1^0,\quad y_2^0,\quad Y_2^0,$$

qui simul cum C^0, A^0, cohaerentes quantitatum

$$U,\quad y_1,\quad Y_1,\quad y_2,\quad Y_2,\quad C,\quad A,$$

valores, aequationi (2.) satisfacientes sunt, suppeditat hanc relationem, pro quolibet ipsius z valore comprobatam:

$$14.\quad \int_{y_1^0}^{y_1} \frac{e_1\,dy}{(z-y)\sqrt{(\Delta y)}} + \int_{Y_1^0}^{Y_1} \frac{E_1\,dy}{(z-y)\sqrt{(\Delta y)}} + \int_{y_2^0}^{y_2} \frac{e_2\,dy}{(z-y)\sqrt{(\Delta y)}} + \int_{Y_2^0}^{Y_2} \frac{E_2\,dy}{(z-y)\sqrt{(\Delta y)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(-\Delta z)}}\left\{\text{arc tang}\frac{\sqrt{C^0}(z-A^0)(z-m_6)(z-m_5)}{\sqrt{(-\Delta z)}} - \text{arc tang}\frac{\sqrt{C}(z-A)(z-m_6)(z-m_5)}{\sqrt{(-\Delta z)}}\right\}.$$

Utroque termino per z^x multiplicato, in evolutione secundum descendentes ipsius z potestates facta, coëfficientem potestatis z^{-1} sumere, eamque, ut fieri

solet, denotare placet; quo facto habetur altera relatio:

$$15.\quad \int_{y_1^0}^{y_1}\frac{e_1 y^x\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{Y_1^0}^{Y_1}\frac{E_1 y^x\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{y_2^0}^{y_2}\frac{e_2 y^x\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{Y_2^0}^{Y_2}\frac{E_2 y^x\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}$$
$$=\left[\frac{2z^x}{\sqrt{(-\Delta z)}}(\text{arc tang}\, U^0-\text{arc tang}\, U)\right]_{z^{-1}}.$$

Inde deducis has aequationes:

$$16.\quad \Sigma\int_{y^0}^{y}\frac{e\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=0,$$

$$17.\quad \Sigma\int_{y^0}^{y}\frac{ey\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=0,$$

$$18.\quad \Sigma\int_{y^0}^{y}\frac{ey^2\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=2(\text{arc tang}\sqrt{C^0}-\text{arc tang}\sqrt{C}),$$

$$19.\quad \Sigma\int_{y^0}^{y}\frac{ey^3\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6)(\text{arc tang}\sqrt{C^0}-\text{arc tang}\sqrt{C})$$
$$+(m_1+m_2+m_3+m_4-m_5-m_6)\left(\frac{\sqrt{C^0}}{1+C^0}-\frac{\sqrt{C}}{1+C}\right)$$
$$-2\left\{\frac{A^0\sqrt{C^0}}{1+C^0}-\frac{A\sqrt{C}}{1+C}\right\},$$

$$20.\quad \Sigma\int_{y^0}^{y}\frac{e\,\Phi y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=\left[\frac{2\Phi z}{\sqrt{(-\Delta z)}}(\text{arc tang}\, U^0-\text{arc tang}\, U)\right]_{z^{-1}},$$

$$21.\quad \Sigma\int_{y^0}^{y}\frac{e\,\Phi y\,dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}}=\left[\frac{2\Phi z}{(\alpha-z)\sqrt{(-\Delta z)}}(\text{arc tang}\, U^0-\text{arc tang}\, U)\right]_{z^{-1}}$$
$$+\frac{2\Phi\alpha}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}(\text{arc tang}\, U_\alpha^0-\text{arc tang}\, U_\alpha)$$

ubi Φy functionem rationalem integram ipsius y denotat, atque brevitatis gratia formula summatoria:

$$22.\quad \Sigma efy = e_1 f y_1 + E_1 f Y_1 + e_2 f y_2 + E_2 f Y_2$$

et denotationes:

$$U_\alpha=\frac{\sqrt{C}(\alpha-A)(\alpha-m_6)(\alpha-m_5)}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}},\qquad U_\alpha^0=\frac{\sqrt{C^0}(\alpha-A^0)(\alpha-m_6)(\alpha-m_5)}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}$$

adhibentur.

Iam restat relationes algebraicas inter quantitates y_1, Y_1, y_2, Y_2, determinare. Si quantitates y_1 et y_2 una cum signis e_1 et e_2 ut datas, atque ceteras Y_1 et Y_2 una cum E_1, E_2, C et A ut determinandas consideras, e

formulis (2.) et (3.) producis hanc, pro quolibet ipsius v valore,

$$23.\quad (y_1-y_2)\sqrt{C}(v-A) = \frac{e_1\sqrt{(\Delta y_1)}(v-y_2)}{(y_1-m_6)(y_1-m_5)} - \frac{e_2\sqrt{(\Delta y_2)}(v-y_1)}{(y_2-m_6)(y_2-m_5)};$$

unde has derivas:

$$24.\quad \sqrt{C} = \frac{1}{y_1-y_2}\left(\frac{e_1\sqrt{(\Delta y_1)}}{(y_1-m_6)(y_1-m_5)} - \frac{e_2\sqrt{(\Delta y_2)}}{(y_2-m_6)(y_2-m_5)}\right),$$

$$25.\quad A = \frac{e_1 y_2\sqrt{(\Delta y_1)}(y_2-m_6)(y_2-m_5) - e_2 y_1\sqrt{(\Delta y_2)}(y_1-m_6)(y_1-m_5)}{e_1\sqrt{(\Delta y_1)}(y_2-m_6)(y_2-m_5) - e_2\sqrt{(\Delta y_2)}(y_1-m_6)(y_1-m_5)},$$

quibus adhibitis, e formulis (5.), (6.), (7.) formulae hae prodeunt:

$$26.\quad \begin{cases} (m_6-Y_1)(m_6-Y_2) \\ :(m_5-Y_1)(m_5-Y_2) \\ :(m_x-Y_1)(m_x-Y_2) \\ :1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)}{(m_6-y_1)(m_6-y_2)} \\ :\dfrac{(m_5-m_1)(m_5-m_2)(m_5-m_3)(m_5-m_4)}{(m_5-y_1)(m_5-y_2)} \\ :\left\{\dfrac{e_1\sqrt{\left[\Delta y_1.\left(\frac{m_x-y_2}{m_x-y_1}\right)\right]}}{(m_5-y_1)(m_6-y_1)} - \dfrac{e_2\sqrt{\left[\Delta y_2.\left(\frac{m_x-y_1}{m_x-y_2}\right)\right]}}{(m_5-y_2)(m_6-y_2)}\right\}^2 \dfrac{(m_5-m_x)(m_6-m_x)}{(y_1-y_2)^2} \\ :1+\dfrac{1}{(y_1-y_2)^2}\left\{\dfrac{e_1\sqrt{(\Delta y_1)}}{(m_5-y_1)(m_6-y_1)} - \dfrac{e_2\sqrt{(\Delta y_2)}}{(m_5-y_2)(m_6-y_2)}\right\}^2, \end{cases}$$

in quibus loco quantitatum y_1, y_2, Y_1, Y_2 etiam valores initiales y_1^0, y_2^0, Y_1^0, Y_2^0 substituere licet. Ad computationem signorum E_1 et E_2 adhibeantur formulae ex (3.) et (23.) sponte prodeuntes:

$$E_1 = \frac{(Y_1-m_6)(Y_1-m_5)}{y_1-y_2}\left\{\frac{e_1\sqrt{(\Delta y_1)}(Y_1-y_2)}{(y_1-m_6)(y_1-m_5)} - \frac{e_2\sqrt{(\Delta y_2)}(Y_1-y_1)}{(y_2-m_6)(y_2-m_5)}\right\},$$

$$E_2 = \frac{(Y_2-m_6)(Y_2-m_5)}{y_1-y_2}\left\{\frac{e_1\sqrt{(\Delta y_1)}(Y_2-y_2)}{(y_1-m_6)(y_1-m_5)} - \frac{e_2\sqrt{(\Delta y_2)}(Y_2-y_1)}{(y_2-m_6)(y_2-m_5)}\right\}.$$

Adiiciatur vero adhuc alia expressio functionis $\sqrt{C}(v-A)$ e formulis (5.) et (7.) deducta, omnesque quatuor quantitates y_1, y_2, Y_1, Y_2 continens. Inde enim, si x et λ quilibet numerorum 1, 2, 3, 4 sunt, per $e^{(x)}$ et $e^{(\lambda)}$ positiva vel negativa denotatur unitas, atque brevitatis gratia ponitur:

$$fz = (z-m_1)(z-m_2)(z-m_3)(z-m_4),$$
$$\Pi z = (z-y_1)(z-Y_1)(z-y_2)(z-Y_2),$$

prodeunt formulae:

$$27.\quad \begin{cases} \sqrt{C}(m_x-A) = e^{(x)}\sqrt{\left(\dfrac{fm_6}{\Pi m_6}\right)}\sqrt{\left(\dfrac{\Pi m_x}{(m_6-m_x)(m_5-m_x)}\right)}, \\ \sqrt{C}(m_\lambda-A) = e^{(\lambda)}\sqrt{\left(\dfrac{fm_6}{\Pi m_6}\right)}\sqrt{\left(\dfrac{\Pi m_\lambda}{(m_6-m_\lambda)(m_5-m_\lambda)}\right)}, \end{cases}$$

nec non inde haec:

$$28. \quad \sqrt{C(v-A)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{fm_6}{\Pi m_6}\right)}\left\{\frac{e^{(\varkappa)}\sqrt{(\Pi m_\varkappa)}}{\sqrt{(m_6-m_\varkappa)(m_5-m_\varkappa)}}\cdot\frac{v-m_\lambda}{m_\varkappa-m_\lambda}+\frac{e^{(\lambda)}\sqrt{(\Pi m_\lambda)}}{\sqrt{(m_6-m_\lambda)(m_5-m_\lambda)}}\cdot\frac{v-m_\varkappa}{m_\lambda-m_\varkappa}\right\}.$$

Pro casu fundamentali hic eum assumere placet, ubi quantitates y_1 et y_2 respective in intervallis $m_1 \dots m_2$ et $m_3 \dots m_4$ continentur. Quo posito aequatio (2.) docet ipsum C positivo valore gaudere, quippe quod si esset negativum, prior eiusdem aequationis terminus pro $z=y_1$, evanescere non posset. Hinc sequitur quantitatem Y_1 in intervallo $m_1 \dots m_2$, et quantitatem Y_2 in intervallo $m_3 \dots m_4$ contineri. Deinde patet, si quantitas A in intervallo $m_1 \dots m_2$ iacet, sive si habetur aequatio: $e^{(1)}e^{(2)}=-1$, fore: $e_1=-E_1$, $e_2=E_2$, eodem modo, si habetur: $e^{(3)}e^{(4)}=-1$, fore: $e_1=E_1$, $e_2=-E_2$. Contra si quantitas A nec in intervallo $m_1 \dots m_2$, nec in intervallo $m_3 \dots m_4$ continetur, sive si habetur $e^{(1)}e^{(2)}=1$, $e^{(3)}e^{(4)}=1$ erit: $e_1=E_1$, $e_2=E_2$. Inverse e signis e_1, e_2, E_1, E_2, signa $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$, $e^{(4)}$, determinari possunt.

Deinde denotatis minori quantitatum y_1 et Y_1 per v_0,
maiori - - - - - - - per v_1,
minori quantitatum y_2 et Y_2 per v_2,
maiori - - - - - - - per v_3,

nec non signis e_1, E_1, e_2, E_2 iis correspondentibus per:

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3,$$

habetur hoc lemma:

„Si quatuor radices v_0, v_1, v_2, v_3 aequationis:

$$29. \quad C(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_1)(z-m_2)(z-m_3)(z-m_4)=0,$$

ex ordine scriptae tales sunt, ut differentiae:

$$v_0-m_1, \quad m_2-v_1, \quad v_2-m_3, \quad m_4-v_3,$$

positivis valoribus gaudeant, aequationis eiusdem formae:

$$30. \quad C^0(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1)=0$$

radices quatuor v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, si C^0 quantitas positiva ipso C minor est, tales erunt, ut differentiae:

$$v_0^0-m_1, \quad v_0-v_0^0, \quad v_1^0-v_1, \quad m_2-v_1^0,$$
$$v_2^0-m_3, \quad v_2-v_2^0, \quad v_3^0-v_3, \quad m_4-v_3^0,$$

et ipsae positivae sint."

Demonstratio. Aequationis prior terminus:

pro $z = m_1$ positivo valore,
- $z = v_0$ negativo valore,
- $z = v_1$ negativo valore,
- $z = m_2$ positivo valore,
- $z = m_3$ positivo valore,
- $z = v_2$ negativo valore,
- $z = v_3$ negativo valore,
- $z = m_4$ positivo valore

gaudet, unde sequitur q. e. d.

Adiicere placet, posito:

$$\Pi z = (z - v_0)(z - v_1)(z - v_2)(z - v_3),$$
$$\Pi_0 z = (z - v_0^0)(z - v_1^0)(z - v_2^0)(z - v_3^0),$$

pro quolibet ipsius C^0 valore positivo, ipsam C haud superante,

quantitates: $\Pi_0'(v_0^0)$ et $\Pi_0'(v_2^0)$ negativas et

quantitates: $\Pi_0'(v_1^0)$ et $\Pi_0'(v_3^0)$ positivas esse.

Inde deducitur hoc theorema:

„Quantitate C^0 a nihilo, usque ad valorem C talem, ut radices aequationis:

$$C(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1) = 0,$$

v_0, v_1, in intervallo $m_1 \dots m_2$, atque v_2 et v_3 in intervallo $m_3 \dots m_4$ iaceant, continuo crescente, simul radices aequationis:

$$C^0(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)+(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1) = 0,$$

ab m_1 usque ad v_0 crescendo,
ab m_2 - - v_1 decrescendo,
ab m_3 - - v_2 crescendo,
ab m_4 - - v_3 decrescendo,

continuo progrediuntur."

Demonstratio. Ipso C^0 ut variabili, et z loco radicis aequationis (30.) assumtis habetur per differentiationem:

$$-\frac{dC^0}{dz} = (1+C^0)\frac{\Pi_0' z}{(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)}.$$

Iam igitur, ex antecedentibus sequitur, valores ipsorum:

$$\frac{dC^0}{dv_0^0},\quad \frac{dC^0}{dv_2^0}$$

positivos finitos, nec non ipsorum:

$$\frac{dC^0}{dv_1^0},\quad \frac{dC^0}{dv_3^0}$$

negativos finitos manere, quoad quantitas positiva C a quantitate C^0 haud superetur. Unde sequitur q. e. d.

Quia expressiones quatuor:

$$\frac{dC^0}{dv_0^0},\quad \frac{dC^0}{dv_1^0},\quad \frac{dC^0}{dv_2^0},\quad \frac{dC^0}{dv_3^0},$$

dum quantitates C^0 a nihilo usque ad C pergit, signum non mutant, et hanc ob rem, nec evanescere possunt, nec in infinitum abire, valor C talis sit necesse est, ut ab omnibus expressionis:

$$-\frac{(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1)}{(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)}$$

maximis et minimis positivis superetur, si quantitas A constantem valorem obtinet. At adeo, nihil impedit, quo minus, eadem quantitate simul cum C^0 apte se variante, considerationes antecedentes de radicum quatuor continuitate valeant. Assumantur enim hunc ad finem quantitatis variabilis C^0 valores supremi, ipsi variabiles et ita decrescentes, ut superent nullum maximorum minimorumve positivorum, quae functio:

$$-\frac{(z-m_4)(z-m_3)(z-m_2)(z-m_1)}{(z-A)^2(z-m_6)(z-m_5)}$$

pro singulo quoque ipsius A valore, inter duos eiusdem limites iacente, assequitur. Adiiciendum est generaliter signa ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, quantitatibus continuo progredientibus v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, manere, nisi quantitas A per valorem ullum harum radicum permigrat. Id quod e formulis (3.) sponte prodit, nec nisi pro $C^0=0$ sive pro $v_0^0=m_1$, $v_1^0=m_2$, $v_2^0=m_3$, $v_3^0=m_4$, fieri potest. —

Quae cum ita sint, in aequationibus (16.), (17.), (18.), (19.), (20), (21.) inferiores integralium limites apte commutari possunt cum ipsis: m_1, m_2, m_3, m_4, unde emanent hae aequationes:

31. $$\int_{m_1}^{v_0}\frac{\varepsilon_0\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_2}^{v_1}\frac{\varepsilon_1\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{v_2}\frac{\varepsilon_2\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_4}^{v_3}\frac{\varepsilon_3\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=0,$$

32. $$\int_{m_1}^{v_0}\frac{\varepsilon_0\,y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_2}^{v_1}\frac{\varepsilon_1\,y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{v_2}\frac{\varepsilon_2\,y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_4}^{v_3}\frac{\varepsilon_3\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=0,$$

33. $$\int_{m_1}^{v_0}\frac{\varepsilon_0\,\Phi y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_2}^{v_1}\frac{\varepsilon_1\,\Phi y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{v_2}\frac{\varepsilon_2\,\Phi y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_4}^{v_3}\frac{\varepsilon_3\,\Phi y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}$$

$$=-2\left[\frac{\Phi z}{\sqrt{(-\Delta z)}}\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{C}(z-A)(z-m_6)(z-m_5)}{\sqrt{(-\Delta z)}}\right]_{z^{-1}},$$



$$34.\quad \int_{m_1}^{v_0}\frac{\varepsilon_0\,\Phi y\,dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_2}^{v_1}\frac{\varepsilon_1\,\Phi y\,dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{v_2}\frac{\varepsilon_2\,\Phi y\,dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_4}^{v_3}\frac{\varepsilon_3\,\Phi y\,dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}}$$

$$=-2\left[\frac{\Phi z}{(\alpha-z)\sqrt{(-\Delta z)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}(z-A)(z-m_6)(z-m_5)}{\sqrt{(-\Delta z)}}\right]_{z-1}$$

$$-2\,\frac{\varphi\alpha}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}(\alpha-A)(\alpha-m_6)(\alpha-m_5)}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}},$$

ubi secundum formulam (28.) expressio $\sqrt{C}(z-A)$ determinatur aequatione:

$$\sqrt{C}(z-A)=$$

$$\sqrt{\left(\frac{fm_6}{\Pi m_6}\right)}\left\{e^{(1)}\sqrt{\left(\frac{\Pi m_1}{(m_6-m_1)(m_5-m_1)}\right)}\frac{z-m_3}{m_1-m_3}+e^{(3)}\sqrt{\left(\frac{\Pi m_3}{(m_6-m_3)(m_5-m_3)}\right)}\frac{z-m_1}{m_3-m_1}\right\}.$$

Ad formulas in articulo praecedenti expositas in functiones, quas vocant *Abelianas* primi ordinis transferendas, eos casus pro principalibus habere placet, ubi est

$$\varepsilon_0=\mp\varepsilon_1,\qquad \varepsilon_2=\varepsilon_3,$$

in quos ob earundem functionum periodicitatem ceteros revocare licet. Quo posito habentur aequationes:

$$e'=e^{(2)}=\varepsilon_0=\mp\varepsilon_1,\qquad e^{(3)}=e^{(4)}=\mp\varepsilon_2=\mp\varepsilon_3.$$

Adiicere placet, duos priores casus articuli (4.) in his suppositionibus modo propositis ipsos contineri, ita ut in priori illorum casuum poni possit:

$$v_0=v_1=x_1,\qquad v_2=v_3=x_2,\qquad A=\alpha,\qquad C=c,$$

$$\varepsilon_0=\varepsilon_1=-1,\qquad \varepsilon_2=\varepsilon_3=+1,$$

atque in posteriori, prout superiora vel inferiora signa ibi valent:

$$\varepsilon_0=\varepsilon_1=\mp1,\qquad \varepsilon_2=\varepsilon_3=\mp1.$$

Signa enim

$$e^{(1)},\quad e^{(2)},\quad e^{(3)},\quad e^{(4)},$$

quibus signa:

$$\varepsilon_0,\quad \varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \varepsilon_3$$

aequalia sunt, congruunt respective cum signis ipsorum:

$$-\eta,\quad -\eta_1,\quad -\eta_1\eta_2\eta_3,\quad -\eta_1\eta_2\eta_3,$$

id quod in art. 4. demonstravimus. Quae cum ita sint, emanant haec duo theoremata.

Theorema I.

„Si, posito:

$$\int_{m_1}^{v_0}\frac{\varepsilon_0\,a\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{v_2}\frac{\varepsilon_2\,a\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=2u,$$

$$\int_{m_1}^{v_0}\frac{\varepsilon_0\,a'y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{v_2}\frac{\varepsilon_2\,a'y\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}=2u',$$

„ubi a et a' quantitates constantes quaelibet sunt, limites superiores v_0 et v_2 „considerantur ut functiones argumentorum u et u', et brevitatis gratia haec „denotatio adhibetur

$$(m_h-v_0)(m_h-v_2) = \lambda_h(u,u'),$$

„ipso h quemlibet numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6 denotante, nec non ponitur:

$$\int_{m_1}^{v_0}\frac{\varepsilon_0\, a'' y^2\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{v_2}\frac{\varepsilon_2\, a'' y^2\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}} = 2E_2(u,u'),$$

$$\int_{m_1}^{v_0}\frac{\varepsilon_0\, \Phi y\, dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{v_2}\frac{\varepsilon_2\, \Phi y\, dy}{(\alpha-y)\sqrt{(\Delta y)}} = 2G(u,u'),$$

„ubi a'' et α quantitates constantes quaelibet, et Φy functio rationalis ipsius y „integra est, si deinde argumenta u et u', pro $v_0=m_2$ et $v_2=m_4$ transeunt „in valores M et M', ita ut habeantur aequationes:

$$\int_{m_1}^{m_2}\frac{\varepsilon_0\, a\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{m_4}\frac{\varepsilon_2\, a\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}} = 2M,$$

$$\int_{m_1}^{m_2}\frac{\varepsilon_0\, a' y\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_3}^{m_4}\frac{\varepsilon_2\, a' y\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}} = 2M',$$

$$\lambda_2(M,M') = 0, \qquad \lambda_4(M,M') = 0,$$

„hae formulae memorabiles habentur, ex antecedentibus sponte prodeuntes:

$$\begin{array}{ll} \lambda_6(u,u').\lambda_6(M-u,M'-u') & (m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4) \\ :\lambda_5(u,u').\lambda_5(M-u,M'-u') & :(m_5-m_1)(m_5-m_2)(m_5-m_3)(m_5-m_4) \\ :\lambda_\varkappa(u,u').\lambda_\varkappa(M-u,M'-u') \;=\; & :\left\{\frac{\varepsilon_0\sqrt{(\Delta v_0)}(m_\varkappa-v_2)}{(m_5-v_0)(m_6-v_0)}-\frac{\varepsilon_2\sqrt{(\Delta v_2)}(m_\varkappa-v_0)}{(m_5-v_2)(m_6-v_2)}\right\}^2\frac{(m_5-m_\varkappa)(m_6-m_\varkappa)}{(v_0-v_2)^2} \\ :1 & :1+\left\{\frac{\varepsilon_0\sqrt{(\Delta v_0)}}{(m_5-v_0)(m_6-v_0)}-\frac{\varepsilon_2\sqrt{(\Delta v_2)}}{(m_5-v_2)(m_6-v_2)}\right\}^2\frac{1}{(v_0-v_2)^2}, \end{array}$$

$$E_2(u,u')+E_2(M-u,M'-u')-E_2(M,M') =$$

$$\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\left(\frac{(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)}{(m_5-m_1)^2\lambda_6(u,u')\lambda_6(M-u,M'-u')}\right)}\left\{\varepsilon_0\sqrt{\left(\frac{\lambda_1(u,u')\lambda_1(M-u,M'-u')}{m_6-m_1\;\; m_5-m_1}\right)}-\varepsilon_2\sqrt{\left(\frac{\lambda_3(u,u')\lambda_3(M-u,M'-u')}{(m_6-m_3)(m_5-m_3)}\right)}\right\},$$

$$G(u,u')+G(M-u,M'-u')-G(M,M') =$$

$$-\left[\frac{\Phi z}{(\alpha-z)\sqrt{(-\Delta z)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C(z-A)(z-m_6)(z-m_5)}}{\sqrt{(-\Delta z)}}\right]_{z=A}-\frac{\Phi\alpha}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{C(\alpha-A)(\alpha-m_6)(\alpha-m_5)}}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}\right),$$

„ubi ponitur:

$$\sqrt{C(z-A)} =$$

$$-\frac{1}{m_5-m_1}\cdot\frac{\sqrt{[(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)]}}{\sqrt{(\lambda_6(u,u')\lambda_6(M-u,M'-u'))}}\left\{\varepsilon_0\sqrt{\left(\frac{\lambda_1(u,u')\lambda_1(M-u,M'-u')}{(m_6-m_1)(m_5-m_1)}\right)}(z-m_3)\right.$$

$$\left.-\varepsilon_2\sqrt{\left(\frac{\lambda_3(u,u')\lambda_3(M-u,M'-u')}{(m_6-m_3)(m_5-m_3)}\right)}(z-m_1)\right\}.“$$

Theorema II.

„Iisdem denotationibus adhibitis, nec non brevitatis gratia posito:

$$\psi z = \left[z-\varepsilon_0\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)}\right]\left[z+\varepsilon_0\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)}\right]\left[z+\varepsilon_2\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)}\right]\left[z-\varepsilon_2\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)}\right],$$

„ubi signa ε_0, ε_2 conditioni $\psi(1) > \psi(-1)$ satisfaciunt: habentur relationes „memorabiles:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{[\lambda_6(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')]} && \sqrt{2}\,(m_6-m_5)\\
&:\sqrt{[\lambda_5(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')]} && :\sqrt{2}\,(m_6-m_5)\sqrt[4]{\left(\frac{(m_5-m_1)(m_5-m_2)(m_5-m_3)(m_5-m_4)}{(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)}\right)}\\
&:\sqrt{[\lambda_4(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')]} && :(m_6-m_4)\sqrt[2]{\left[\psi\left(-\varepsilon_2\sqrt{\left(\frac{m_5-m_4}{m_6-m_4}\right)}\right)\right]}\\
&:\sqrt{[\lambda_3(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')]} = && :(m_6-m_3)\sqrt[2]{\left[\psi\left(+\varepsilon_2\sqrt{\left(\frac{m_5-m_3}{m_6-m_3}\right)}\right)\right]}\\
&:\sqrt{[\lambda_2(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')]} && :(m_6-m_2)\sqrt[2]{\left[\psi\left(+\varepsilon_0\sqrt{\left(\frac{m_5-m_2}{m_6-m_2}\right)}\right)\right]}\\
&:\sqrt{[\lambda_1(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')]} && :(m_6-m_1)\sqrt[2]{\left[\psi\left(-\varepsilon_0\sqrt{\left(\frac{m_5-m_1}{m_6-m_1}\right)}\right)\right]}\\
&:1 && :\sqrt{[\psi(1)+\psi(-1)]},
\end{aligned}$$

$$2E_2(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')-E_2(M,M')$$
$$= \text{arc tang}\frac{\sqrt{[(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)]}}{(m_6-m_5)^2}\cdot\frac{\psi(1)-\psi(-1)}{2},$$

$$2G(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')-G(M,M')$$
$$= -\left[\frac{\Phi(z)}{(\alpha-z)}\cdot\frac{\text{arc tang}\,\chi(z)}{\sqrt{(-\varDelta z)}}\right]_{z^{-1}}-\frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{(-\varDelta\alpha)}}\,\text{arc tang}\,\chi(\alpha),$$

„ubi ponitur:

$$\chi(z)=\frac{\sqrt{[(m_6-m_1)(m_6-m_2)(m_6-m_3)(m_6-m_4)]}}{\sqrt{(-\varDelta z)}}\left(\frac{z-m_6}{m_6-m_5}\right)^2(z-m_5)\left\{\frac{\psi\left(\sqrt{\left(\frac{z-m_5}{z-m_6}\right)}\right)-\psi\left(-\sqrt{\left(\frac{z-m_5}{z-m_6}\right)}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{z-m_5}{z-m_6}\right)}}\right\}.“$$

Ceteros casus §i 4. similiter ad formulas in articulo praecedenti expositas, quamquam in promptu est, alio tamen loco una cum simili interpretatione analytica applicare velimus. —

Si in utroque theoremate antecedente loco quantitatum a, a', a'' ponitur $\sqrt{m_6}$, atque loco functionis $\Phi(z)$ vel $\sqrt{m_6}(\alpha-z)\Phi_1(z)$, vel $\sqrt{m_6}\,\Phi_2(z)$, ubi $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ ipsius z functiones rationales integrae sunt, illa ordinis tertii, haec ordinis secundi, pro valore ipsius m_6 in infinitum abeunte, haec

de tribus functionum *Abelianarum* primi ordinis generibus theoremata emanant.

Theorema III.

„Si denotatio introducitur haec:

$$(y-m_1)(y-m_2)(y-m_3)(y-m_4)(y-m_5) = Dy,$$

$$\int_{m_1}^{v_0} \frac{\varepsilon_0\, dy}{\sqrt{(Dy)}} + \int_{m_3}^{v_2} \frac{\varepsilon_2\, dy}{\sqrt{(Dy)}} = 2u,$$

$$\int_{m_1}^{v_0} \frac{\varepsilon_0\, y\, dy}{\sqrt{(Dy)}} + \int_{m_3}^{v_2} \frac{\varepsilon_2\, y\, dy}{\sqrt{(Dy)}} = 2u',$$

„atque limites v_0, v_2 considerantur ut functiones argumentorum u, u' tales, ut „generaliter ponatur:

$$(m_x - v_0)(m_x - v_2) = \lambda_x(u, u'),$$

$$\int_{m_1}^{v_0} \frac{\varepsilon_0\, \Phi_1(y)\, dy}{\sqrt{(Dy)}} + \int_{m_3}^{v_2} \frac{\varepsilon_2\, \Phi_1(y)\, dy}{\sqrt{(Dy)}} = 2E(u, u'),$$

$$\int_{m_1}^{v_0} \frac{\varepsilon_0\, \Phi_2(y)\, dy}{(\alpha - y)\sqrt{(Dy)}} + \int_{m_3}^{v_2} \frac{\varepsilon_2\, \Phi_2(y)\, dy}{(\alpha - y)\sqrt{(Dy)}} = 2G(u, u'),$$

„ubi per x quilibet numerorum 1, 2, ... 5, et per $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$ functiones integrae rationales illa tertii, haec secundi ordinis designantur, habentur „aequationes:

$$\lambda_5(u, u')\;\lambda_5(M-u, M'-u') = (m_5-m_1)(m_5-m_2)(m_5-m_3)(m_5-m_4),$$

$$\lambda_x(u, u')\;\lambda_x(M-u, M'-u') = \frac{m_5-m_x}{(v_2-v_0)^2}\left\{\frac{m_x-v_2}{m_5-v_0}\sqrt{(Dv_0)} - \frac{m_x-v_0}{m_5-v_2}\sqrt{(Dv_2)}\right\}^2,$$

$$E(u, u') + E(M-u, M'-u') - E(M, M')$$

$$= +\left[\frac{\Phi(z)}{\sqrt{(Dz)}}\left(\chi(z) + \frac{\{\chi(z)\}^3}{3}\right)\right]_{z^{-1}},$$

$$G(u, u') + G(M-u, M'-u') - G(M, M') = +\frac{\Phi_2(\alpha)}{\sqrt{(-D\alpha)}}\,\text{arc.tang}\left(\sqrt{(-1)}\,\chi\alpha\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\Phi_2(\alpha)}{\sqrt{(D\alpha)}}\,\log\left(\frac{1-\chi\alpha}{1+\chi\alpha}\right),$$

„ubi quantitates M, M', χz determinantur aequationibus:

$$\int_{m_1}^{m_2} \frac{\varepsilon_0\, dy}{\sqrt{(Dy)}} + \int_{m_3}^{m_4} \frac{\varepsilon_2\, dy}{\sqrt{(Dy)}} = 2M, \qquad \int_{m_1}^{m_2} \frac{\varepsilon_0\, y\, dy}{\sqrt{(Dy)}} + \int_{m_3}^{m_4} \frac{\varepsilon_2\, y\, dy}{\sqrt{(Dy)}} = 2M',$$

$$\chi(z) = +\frac{z-m_5}{m_3-m_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{(Dz)}}\left\{\varepsilon_0(z-m_3)\sqrt{\left(\frac{\lambda_1(u,u')\,\lambda_1(M-u, M'-u')}{m_5-m_1}\right)}\right.$$

$$\left. - \varepsilon_2(z-m_1)\sqrt{\left(\frac{\lambda_3(u,u')\,\lambda_3(M-u, M'-u')}{m_5-m_3}\right)}\right\};$$

Theorema IV.

„Iisdem denotationibus adhibitis, nec non brevitatis gratia posito:

$$(z-\varepsilon_0\sqrt{(m_5-m_1)})(z+\varepsilon_0\sqrt{(m_5-m_2)})(z+\varepsilon_2\sqrt{(m_5-m_3)})(z-\varepsilon_2\sqrt{(m_5-m_4)}) = \psi(z),$$

„ubi signa ε_0, ε_2 conditioni

$$\psi(1) > \psi(-1)$$

„satisfaciunt, valores functionum $\lambda(u,u')$, $E(u,u')$, $G(u,u')$, pro $u=\frac{1}{2}M$, „$u'=\frac{1}{2}M'$ dantur his formulis:

$$\lambda_5(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M') = \sqrt{\{(m_5-m_1)(m_5-m_2)(m_5-m_3)(m_5-m_4)\}},$$

$$\lambda_4(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M') = \tfrac{1}{2}\psi(-\varepsilon_2\sqrt{(m_5-m_4)}),$$

$$\lambda_3(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M') = \tfrac{1}{2}\psi(\varepsilon_2\sqrt{(m_5-m_3)}),$$

$$\lambda_2(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M') = \tfrac{1}{2}\psi(\varepsilon_0\sqrt{(m_5-m_2)}),$$

$$\lambda_1(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M') = \tfrac{1}{2}\psi(-\varepsilon_0\sqrt{(m_5-m_1)}),$$

$$2E(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')-E(M,M') = \left[\frac{\varphi_1(z)}{\sqrt{(Dz)}}\left(\chi(z)+\tfrac{1}{3}\{\chi(z)\}^3\right)\right]_{z^{-1}},$$

$$2G(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M')-G(M,M') = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\sqrt{(-D\alpha)}}\,\text{arc tang}\,(\sqrt{(-1)}\,\chi(\alpha))$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\Phi_1\,\alpha}{\sqrt{(D\alpha)}}\log\frac{1-\chi(\alpha)}{1+\chi(\alpha)},$$

„ubi ponitur:

$$\chi z = \frac{(z-m_5)}{\sqrt{(-Dz)}}\left\{\frac{\psi(\sqrt{(-1)}\sqrt{(z-m_5)})-\psi(-\sqrt{(-1)}\sqrt{(z-m_5)})}{2\sqrt{(z-m_5)}}\right\};$$

„ita ut exempli gratia, si quantitas z quantitatem m_5 superat, habeatur:

$$\chi z = \frac{(z-m_5)^2}{\sqrt{(Dz)}}\{\varepsilon_0(\sqrt{(m_5-m_1)}-\sqrt{(m_5-m_2)})-\varepsilon_2(\sqrt{(m_5-m_3)}-\sqrt{(m_5-m_4)})\}$$

$$-\frac{z-m_5}{\sqrt{(Dz)}}\left(\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(m_5-m_1)}}-\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(m_5-m_2)}}\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{(m_5-m_3)}}+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{(m_5-m_4)}}\right)\sqrt{(m_5-m_1)(m_5-m_2)(m_5-m_3)(m_5-m_4)}.$$

6.

In sequentibus easdem disquisitiones de integralibus atque functionibus *Abelianis* generalis cuiuslibet ordinis instituturi, rursus initium facere velimus a problematis algebraici solutione. Quod problema generale hoc est:

Si quantitates datae m_1, m_2, ... m_{2n+2} tales sunt, ut differentiae m_2-m_1, m_3-m_2, ... $m_{2n+2}-m_{2n+1}$, positivis valoribus gaudeant, quantitates c, a, a_1, a_2, ... a_{n-2}, ita sunt determinandae, ut expressio:

$$1.\quad c(z-a)^2(z-a_1)^2\ldots.(z-a_{n-2})^2(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1}) + (z-m_{2n})(z-m_{2n-1})\ldots.(z-m_1),$$

functionis integrae determinandae

$$2.\quad \sqrt{(1+c)(z-x)(z-x_2)(z-x_4)\dots(z-x_{2n-2})},$$

quadratum fiat.

Quod ad solvendum brevitatis gratia introducantur signa haec:

$$3.\quad \begin{cases} f(z) = (z-m_1)(z-m_2)\dots(z-m_{2n}), \\ \varrho(z) = (z-a)(z-a_1)\dots(z-a_{n-2}), \\ \varphi(z) = (z-x)(z-x_2)\dots(z-x_{2n-2}), \end{cases}$$

ita ut habeatur aequatio identica:

$$4.\quad c(\varrho(z))^2(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})+f(z) = (1+c)(\varphi(z))^2.$$

In cuius utroque termino earundem ipsius z potestatum coëfficientes comparando, $2n$ prodeunt aequationes inter $2n$ quantitates:

$$c,\ a,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{n-2},\qquad x,\ x_2,\ \dots\ x_{2n-2}.$$

Unde docemur problema propositum esse determinatum. Et adeo facillime demonstratur, quantitatem $\frac{1+c}{c}$ aeque ac omnes functionum $\varphi(z)$ et $\varrho(z)$ coëfficientes per radicem aequationis 2^{2n-1}ti gradus rationaliter exprimi, cuius coëfficientes functiones rationales quantitatum $m_1, m_2, \dots m_{2n+2}$ sunt; ita ut quantitates $a, a_1, \dots a_{n-2}$ radices aequationis simili natura gaudentis $(n-1)2^{2n-1}$ti gradus, et quantitates $x, x_2, \dots x_{2n-2}$ radices fiant aequationis similis $n.2^{2n-1}$ti gradus.

Nimirum in aequatione (4.) posito $z=m_h$, ubi h quemlibet denotat numerorum 1, 2, ... $2n$, prodeunt $2n$ aequationes formae:

$$5.\quad (m_{2n+2}-m_h)(m_{2n+1}-m_h)(\varrho(m_h))^2-\left(\frac{1+c}{c}\right)(\varphi(m_h))^2 = 0$$

unde ceteras $2n-1$ coëfficientes rationaliter exprimere licet per $\frac{1+c}{c}$. Ex $2n$ aequationibus vero, ex aequationibus (5.) emanantibus, formae:

$$6.\quad \sqrt{\left(\frac{1+c}{c}\right)}\varphi(m_h) = \pm\sqrt{((m_{2n+2}-m_h)(m_{2n+1}-m_h))}(\varrho(m_h))$$

sive per eliminationem, seu potius advocato theoremate notissimo illustrissimi *Cauchy*, quo functio:

$$\sqrt{\left(\frac{1+c}{c}\right)}\frac{\varphi(z)}{\varrho(z)}$$

ex $2n$ ipsius valoribus, pro totidem ipsius z valoribus, determinatur, et quantitatis $\sqrt{\left(\frac{1+c}{c}\right)}$ et ceterarum $2n-1$ coëfficientium expressiones, $2n$ radicalia involventes, prodeunt. Iam ipsius $\frac{1+c}{c}$ expressio inde deducta, radicalium signa

quomodocunque assumendo, nonnisi 2^{n-1} valores diversos induens, aequationis 2^{2n-1}ti gradus radix est, cuius aequationis coëfficientes radicalia non involvunt. Simili natura ceterae coëfficientes gaudent, et adeo, quippe quae rationaliter per $\frac{1+c}{c}$ exprimuntur, ut functiones rationales radicis eiusdem illius aequationis 2^{2n-1}ti gradus determinantur.

Solutione problematis propositi, quae ex antecedentibus deducitur, formulas perlongas atque impeditas suppeditante, e quibus de ipsius natura iudicium repeti nequit, eas in alias elegantiores transmutare iuvat, quas sequenti brevi methodo adipiscimur.

Denotationibus:

$$7.\qquad \frac{m_{2n+1}-z}{m_{2n+2}-z} = v^2, \qquad \frac{m_{2n+1}-m_h}{m_{2n+2}-m_h} = \eta_h^2;$$

introductis, pro quolibet quantitatis y valore formulae habentur:

$$8.\qquad z-y = \frac{v^2(m_{2n+2}-y)-(m_{2n+1}-y)}{v^2-1},$$

$$9.\qquad m_h-y = \frac{\eta_h^2(m_{2n+2}-y)-(m_{2n+1}-y)}{\eta_h^2-1},$$

$$10.\qquad 1-\eta_h^2 = \frac{m_{2n+2}-m_{2n+1}}{m_{2n+2}-m_h}.$$

Ibi loco ipsius y quantitatem a et omnes quantitates m substituendo, functiones $\varrho(z)$, $\varphi(z)$ et aequatio (4.) in has formas transmutantur:

$$11.\qquad \varrho(z) =$$
$$\frac{\{(m_{2n+2}-a)v^2-(m_{2n+1}-a)\}\{(m_{2n+2}-a_1)v^2-(m_{2n+1}-a_1)\}\ldots\{(m_{2n+2}-a_{n-2})v^2-(m_{2n+1}-a_{n-2})\}}{(v^2-1)^{n-1}},$$

$$12.\qquad \varphi(z) =$$
$$\frac{\{(m_{2n+2}-x)v^2-(m_{2n+1}-x)\}\{(m_{2n+2}-x_2)v^2-(m_{2n+1}-x_2)\}\ldots\{(m_{2n+2}-x_{2n-2})v^2-(m_{2n+1}-x_{2n-2})\}}{(v^2-1)^n},$$

$$13.\qquad V^2+(f(m_{2n+1}))\,\psi(v)\,\psi(-v) = U^2,$$

ubi brevitatis gratia ponitur:

$$14.\begin{cases} V=\sqrt{c}\,(m_{2n+2}-m_{2n+1})v\{(m_{2n+2}-a)v^2-(m_{2n+1}-a)\}\{(m_{2n+2}-a_1)v^2-(m_{2n+1}-a_1)\}\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\{(m_{2n+2}-a_{n-2})v^2-(m_{2n+1}-a_{n-2})\}, \\ U=\sqrt{(1+c)}\,\{(m_{2n+2}-x)v^2-(m_{2n+1}-x)\}\{m_{2n+2}-x_2)v^2-(m_{2n+1}-x_2)\}\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\{(m_{2n+2}-x_{2n-2})v^2-(m_{2n+1}-x_{2n-2})\}, \end{cases}$$

$$\psi(v) = (v+\eta_1)(v+\eta_2)\ldots(v+\eta_{2n}).$$

Hinc facile concluditur functiones U et V his formis gaudere:

$$15.\quad U = c_1\frac{\psi(v)+\psi(-v)}{2},\qquad V = c_1\frac{\psi(v)-\psi(-v)}{2}.$$

Quantitas constans c_1, simul cum ipso c atque valoribus $\rho(m_{2n+2})$, $\rho(m_{2n+1})$, $\rho(m_h)$, $\varphi(m_{2n+2})$, $\varphi(m_{2n+1})$, $\varphi(m_h)$ determinatur ponendo in utroque formularum (11.) termino:

$$v^2 = 1,\quad v^2 = \infty,\quad v^2 = \frac{1}{\infty},\quad v^2 = \eta_h^2.$$

Inde enim prodeunt formulae:

$$16.\quad \sqrt{c} = \frac{c_1}{2}\cdot\frac{\psi(1)-\psi(-1)}{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n},$$

$$17.\quad \sqrt{(1+c)} = \frac{c_1}{2}\cdot\frac{\psi(1)+\psi(-1)}{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n},$$

$$18.\quad \rho(m_{2n+2}) = \frac{c_1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_{2n}}{m_{2n+2}-m_{2n+1}},$$

$$19.\quad \varphi(m_{2n+2}) = \frac{c_1}{\sqrt{(1+c)}},$$

$$20.\quad \rho(m_{2n+1}) = (-1)^{n-1}\frac{c_1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\eta_1\eta_2\dots\eta_{2n}}{m_{2n+2}-m_{2n+1}}\left\{\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\eta_2}+\dots+\frac{1}{\eta_{2n}}\right\},$$

$$21.\quad \varphi(m_{2n+1}) = (-1)^n\frac{c_1}{\sqrt{(1+c)}}\eta_1\eta_2\dots\eta_{2n},$$

$$22.\quad \rho(m_h) = (-1)^{n-1}\frac{c_1}{2\sqrt{c}}\cdot\frac{(m_{2n+2}-m_h)^{n-1}}{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n}\cdot\left(\frac{\psi(\eta_h)}{\eta_h}\right),$$

$$23.\quad \varphi(m_h) = (-1)^n\frac{c_1}{2\sqrt{(1+c)}}\cdot\frac{(m_{2n+2}-m_h)^n}{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n}(\psi(\eta_h)).$$

Formulae (16.) et (17.), advocata formula (10.), suppeditant hunc ipsius c_1^2 valorem:

$$c_1^2 = (m_{2n+2}-m_1)(m_{2n+2}-m_2)\dots(m_{2n+2}-m_{2n}) = f(m_{2n+2})$$

nec non formula (17.) docet, quia quantitates η_h^2 unitate minores sunt, ipsum c_1 esse positivum; quibus collatis hae denique emanant formulae elegantes, ad determinationem ipsius c atque functionum ρz et φz utiles:

$$24.\quad c_1 = \sqrt{(f(m_{2n+2}))},$$

$$25.\quad \sqrt{c} = \frac{\sqrt{(f(m_{2n+2}))}}{2}\cdot\frac{\psi(1)-\psi(-1)}{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n},$$

$$26.\quad \sqrt{(1+c)} = \frac{\sqrt{(f(m_{2n+2}))}}{2}\cdot\frac{\psi(1)+\psi(-1)}{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n},$$

$$27.\quad \varrho(m_{2n+2}) = 2.\frac{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^{n-1}}{\psi(1)-\psi(-1)}\{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_{2n}\},$$

$$28.\quad \varrho(m_{2n+1}) = (-1)^{n-1}2.\frac{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^{n-1}}{\psi(1)-\psi(-1)}\eta_1\eta_2\dots\eta_{2n}\left\{\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\eta_2}+\dots+\frac{1}{\eta_{2n}}\right\},$$

$$29.\quad \varrho(m_h) \quad = (-1)^{n-1}\frac{(m_{2n+2}-m_h)^{n-1}}{\psi(1)-\psi(-1)}.\frac{\psi(\eta_h)}{\eta_h},$$

$$30.\quad \varphi(m_{2n+2}) = 2.\frac{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n}{\psi(1)+\psi(-1)},$$

$$31.\quad \varphi(m_{2n+1}) = (-1)^n 2.\frac{(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n}{\psi(1)+\psi(-1)}\eta_1\eta_2\dots\eta_{2n},$$

$$32.\quad \varphi(m_h) \quad = (-1)^n\frac{(m_{2n+2}-m_h)^n}{\psi(1)+\psi(-1)}\psi(\eta_h).$$

Iam formulas (29.) et (32.) ex aequatione (4.) adhuc alio modo deducere placet, nimirum systema peculiare aequationum linearium resolvendo. Aequatio enim (6.) inde deducta, denotatione (7.) adhibita, in hanc abit:

$$33.\quad \varrho(m_h) = \pm\sqrt{\left(\frac{1+c}{c}\right)}.\frac{\varphi(m_h)}{\eta_h(m_{2n+2}-m_h)},$$

ubi radicalium η_h signa talia assumantur, ut pro *omnibus* ipsius h valoribus aut superius aut inferius signum valeat.

Sint n quantitates e numero $2n$ quantitatum

$$m_1,\ m_2,\ \dots\ m_{2n},$$

ex arbitrio electae:

$$b_1,\ b_2,\ \dots\ b_n,$$

ceteraeque:

$$c_1,\ c_2,\ \dots\ c_n,$$

atque denotentur generaliter expressiones:

$$\pm\sqrt{\left(\frac{m_{2n+1}-b_\varkappa}{m_{2n+2}-b_\varkappa}\right)} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{\left(\frac{m_{2n+1}-c_\lambda}{m_{2n+2}-c_\lambda}\right)},$$

per $\beta_\varkappa$ et γ_λ, ubi numerorum 1, 2, ... n quilibet designantur per $\varkappa$ et λ. Iam si in aequationibus identicis:

$$34.\quad \frac{\varrho(z)}{F(z)} = \sum_1^n{}_\varkappa \frac{\varrho(b_\varkappa)}{F'(b_\varkappa)}.\frac{1}{z-b_\varkappa},\qquad \frac{\varphi(z)}{F(z)} = 1+\sum_1^n{}_\varkappa\frac{\varphi(b_\varkappa)}{F'(b_\varkappa)}.\frac{1}{z-b_\varkappa},$$

ubi ponitur:

$$35.\quad F(z) = (z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_n),$$

substituitur, $z = c_\lambda$, formulae (33.) ope prodeunt aequationes:

$$\frac{\varphi(c_\lambda)}{F'(c_\lambda)} = \sum_1^n{}^{\varkappa} \frac{\gamma_\lambda}{\beta_\varkappa} \cdot \frac{m_{2n+2}-c_\lambda}{m_{2n-2}-b_\varkappa} \cdot \frac{\varphi(b_\varkappa)}{F'(b_\varkappa)} \cdot \frac{1}{c_\lambda - b_\varkappa},$$

$$\frac{\varphi(c_\lambda)}{F'(c_\lambda)} = 1 + \sum_1^n{}^{\varkappa} \frac{\varphi(b_\varkappa)}{F'(b_\varkappa)} \cdot \frac{1}{c_\lambda - b_\varkappa},$$

quarum differentia, formula (10.) et sequentibus, quae inde derivantur

$$\frac{m_{2n+2}-c_\lambda}{m_{2n+2}-b_\varkappa} = \frac{1-\beta_\varkappa^2}{1-\gamma_\lambda^2}, \quad \frac{m_{2n+2}-b_\varkappa}{c_\lambda - b_\varkappa} = \frac{1-\gamma_\lambda^2}{\beta_\varkappa^2 - \gamma_\lambda^2},$$

adhibitis, suppeditatur haec aequatio, pro $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, ... $\lambda = n$ valens:

$$0 = 1 + \sum_1^n{}^{\varkappa} \frac{\gamma_\lambda + \frac{1}{\beta_\varkappa}}{\gamma_\lambda + \beta_\varkappa} \cdot \frac{\varphi(b_\varkappa)}{(m_{2n+2}-b_\varkappa)F'(b_\varkappa)}.$$

Quae cum ita sint, posito generaliter brevitatis gratia:

$$36. \quad z_\varkappa = \frac{\varphi(b_\varkappa)}{(m_{2n+2}-b_\varkappa)F'(b_\varkappa)},$$

determinationem ipsius $\varphi b_\varkappa$ reductam invenis ad resolutionem huius aequationum linearium systematis:

$$37. \quad \begin{cases} 0 = 1 + \frac{\gamma_1 + \frac{1}{\beta_1}}{\gamma_1 + \beta_1} z_1 + \frac{\gamma_1 + \frac{1}{\beta_2}}{\gamma_1 + \beta_2} z_2 + \dots + \frac{\gamma_1 + \frac{1}{\beta_n}}{\gamma_1 + \beta_n} z_n, \\ 0 = 1 + \frac{\gamma_2 + \frac{1}{\beta_1}}{\gamma_2 + \beta_1} z_1 + \frac{\gamma_2 + \frac{1}{\beta_2}}{\gamma_2 + \beta_2} z_2 + \dots + \frac{\gamma_2 + \frac{1}{\beta_n}}{\gamma_2 + \beta_n} z_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = 1 + \frac{\gamma_n + \frac{1}{\beta_1}}{\gamma_n + \beta_1} z_1 + \frac{\gamma_n + \frac{1}{\beta_2}}{\gamma_n + \beta_2} z_2 + \dots + \frac{\gamma_n + \frac{1}{\beta_n}}{\gamma_n + \beta_n} z_n. \end{cases}$$

Quae hoc modo instituitur. E systemate ipso sponte prodit expressionem:

$$1 + \frac{z + \frac{1}{\beta_1}}{z + \beta_1} z_1 + \frac{z + \frac{1}{\beta_2}}{z + \beta_2} z_2 + \dots + \frac{z + \frac{1}{\beta_n}}{z + \beta_n} z_n$$

evanescere, pro: $z = \gamma_1$, $z = \gamma_2$, ... $z = \gamma_n$, atque in infinitum abire, pro: $z = -\beta_1$, $z = -\beta_2$, ... $z = -\beta_n$, unde concludis ipsam identicam esse cum expressione:

$$= (1 + z_1 + z_2 + \dots + z_n) \frac{(z-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2)\dots(z-\gamma_n)}{(z+\beta_1)(z+\beta_2)\dots(z+\beta_n)}.$$

Utraque ipsius forma in fractiones simplices genuinas dissoluta, numeratores denominatoris $z + \beta_\varkappa$ comparando nanciscimur formulam:

$$-\frac{z_\varkappa}{1 + z_1 + z_2 + \dots + z_n}$$

$$= \frac{1}{1-\beta_\varkappa^2} \cdot \frac{\beta_\varkappa(\beta_\varkappa+\gamma_1)(\beta_\varkappa+\gamma_2)\dots(\beta_\varkappa+\gamma_n)}{(\beta_\varkappa-\beta_{\varkappa+1})(\beta_\varkappa-\beta_{\varkappa+2})\dots(\beta_\varkappa-\beta_n)(\beta_\varkappa-\beta_{\varkappa-1})(\beta_\varkappa-\beta_{\varkappa-2})\dots(\beta_\varkappa-\beta_1)},$$

quae numeratore denominatoreque per:

$$(\beta_\varkappa+\beta_{\varkappa+1})(\beta_\varkappa+\beta_{\varkappa+2})\ldots\ldots(\beta_\varkappa+\beta_{\varkappa-2})(\beta_\varkappa+\beta_{\varkappa-1})\ldots\ldots$$

multiplicatis, denotationeque

$$\chi(z) = (z-\beta_1^2)(z-\beta_2^2)\ldots\ldots(z-\beta_n^2),$$
$$\psi(z) = (z+\beta_1)(z+\beta_2)\ldots\ldots(z+\beta_n)(z+\gamma_1)(z+\gamma_2)\ldots\ldots(z+\gamma_n),$$

adhibita in hanc abit:

$$38.\quad -\frac{z_\varkappa}{1+z_1+z_2+\ldots\ldots+z_n} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi(\beta_\varkappa)}{\chi'(\beta_\varkappa^2)}\cdot\frac{1}{1-\beta_\varkappa^2}.$$

Si loco ipsius $\varkappa$ hic ponitur ex ordine: 1, 2, ... n, atque expressiones inde prodeuntes inter se et cum unitate additione coniunguntur, habetur haec formula:

$$39.\quad \frac{1}{1+z_1+z_2+\ldots\ldots+z_n} = 1+\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_\varkappa\,\frac{\psi(\beta_\varkappa)}{\chi'(\beta_\varkappa^2)}\cdot\frac{1}{1-\beta_\varkappa^2}.$$

Iam vero expressione:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi(z)+\psi(-z)}{(z^2-\beta_1^2)(z^2-\beta_2^2)\ldots\ldots(z^2-\beta_n^2)}$$

in fractiones simplices resoluta, ac deinde posito $z=1$, patet fore:

$$1+\tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_\varkappa\,\frac{\psi(\beta_\varkappa)}{\chi'(\beta_\varkappa^2)}\cdot\frac{1}{1-\beta_\varkappa^2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi(1)+\psi(-1)}{\chi(1)},$$

qua aequatione cum formulis (38.) et (39.) collata, emanat valor ipsius z quaesitus:

$$40.\quad z_\varkappa = -\frac{\chi(1)}{\psi(1)+\psi(-1)}\cdot\frac{\psi(\beta_\varkappa)}{\chi'(\beta_\varkappa^2)}\cdot\frac{1}{1-\beta_\varkappa^2}.$$

Inde, revocato ipsius $z_\varkappa$ valore (36.), ope formulae e (10.) derivatae:

$$\frac{1-\beta_\lambda^2}{\beta_\varkappa^2-\beta_\lambda^2} = -\frac{m_{2n+2}-b_\varkappa}{b_\varkappa-b_\lambda},$$

deducitur valor ipsius $\varphi b_\varkappa$ cum ipso (32.) congruens

$$41.\quad \varphi(b_\varkappa) = (-1)^n\frac{(m_{2n+2}-b_\varkappa)^n}{\psi(1)+\psi(-1)}\psi(\beta_\varkappa).$$

Iam e formulis (33.) et (36.) sequitur haec:

$$42.\quad \frac{\varrho(b_\varkappa)}{F'(b_\varkappa)} = \pm\sqrt{\left(\frac{1+c}{c}\right)}\cdot\frac{z_\varkappa}{\beta_\varkappa},$$

quae in aequatione identica:

$$\sum_1^n{}_\varkappa\,\frac{\varrho(b_\varkappa)}{F'(b_\varkappa)} = 1$$

introducta, formula (40.) advocata, hanc suppeditat:

$$43.\quad \sqrt{\left(\frac{1+c}{c}\right)}\frac{\chi(1)}{\psi(1)+\psi(-1)}\sum_1^n{}_\varkappa\left(\frac{\psi(\beta_\varkappa)}{\chi'(\beta_\varkappa^2)}\cdot\frac{1}{\beta_\varkappa(1-\beta_\varkappa^2)}\right) = \mp 1.$$

Expressione vero hac:

$$\frac{\psi(z)-\psi(-z)}{(z^2-\beta_1^2)(z^2-\beta_2^2)\dots(z^2-\beta_n^2)}$$

in fractiones simplices resoluta, positoque $z=1$, prodit aequatio identica:

$$\frac{\psi(1)-\psi(-1)}{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)\dots(1-\beta_n^2)} = \sum_1^n{}^{x} \frac{\psi(\beta_x)}{\chi'(\beta_x^2)}\cdot\frac{1}{\beta_x(1-\beta_x^2)},$$

cuius ope formula (43.) in hanc abit:

$$44.\quad \sqrt{\left(\frac{1+c}{c}\right)} = \mp\frac{\psi(1)+\psi(-1)}{\psi(1)-\psi(-1)}.$$

Hanc ob rem, si radicalia $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ quae cum radicalibus $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{2n}$ congruunt, talia sunt, ut differentia $\psi(1)-\psi(-1)$ positivo valore gaudeat, in aequationibus (44.) et (33.) inferius signum eligendum est, unde emanant formulae cum ipsis (25.), (26.) et (29.) congruentes.

Quia ad functionis $\varrho(z)$ determinationem n, functionis $\varphi(z)$ autem $n+1$ ipsarum valores pro datis ipsius z valoribus sufficiunt, e systemate formularum (27.), ... (32.) permultas harum functionum formas componere licet. Quarum nonnisi principales hic proponere placet.

E formulis (11.), (12.), (14.), (15.) sponte prodeunt hae formae:

$$\varrho(z) = \frac{c_1}{2\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{m_{2n+2}-m_{2n+1}}\cdot\frac{\psi(v)-\psi(-v)}{v(v^2-1)^{n-1}},$$

$$\varphi(z) = \frac{c_1}{2\sqrt{(1+c)}}\cdot\frac{\psi(v)+\psi(-v)}{(v^2-1)^n},$$

quae ope formularum (7.), (24.), (25.), (22.) in has abeunt:

$$45.\quad \varrho(z) =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}2}{\psi(1)-\psi(-1)}\cdot\left\{(m_{2n+1}-z)^{n-1}C_1+(m_{2n+1}-z)^{n-2}(m_{2n+2}-z)C_3+\dots+(m_{2n+2}-z)^{n-1}C_{2n-1}\right\},$$

$$46.\quad \varphi(z) =$$

$$\frac{(-1)^n 2}{\psi(1)+\psi(-1)}\cdot\left\{(m_{2n+1}-z)^n+(m_{2n+1}-z)^{n-1}(m_{2n+2}-z)C_2+\dots+(m_{2n+2}-z)^n C_{2n}\right\},$$

ubi uniones, biniones, terniones etc. elementorum:

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \dots\ \eta_{2n},$$

sine repetitione respective denotantur per:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \dots$$

Deinde ex aequationibus identicis (34.), formulis (29.) et (32.) adhibitis has earundem functionum formas derivamus:

$$47. \quad \begin{cases} \varrho(z) = (-1)^{n-1} \dfrac{F(z)}{\psi(1)-\psi(-1)} \sum_1^n{}^{\varkappa} \left(\dfrac{\psi(\beta_\varkappa)}{\beta_\varkappa F'(b_\varkappa)} \cdot \dfrac{(m_{2n+2}-b_\varkappa)^{n-1}}{z-b_\varkappa} \right), \\ \varphi(z) = F(z) \left\{ 1 + \dfrac{(-1)^n}{\psi(1)+\psi(-1)} \sum_1^n{}^{\varkappa} \left(\dfrac{\psi(\beta_\varkappa)}{F'(b_\varkappa)} \cdot \dfrac{(m_{2n+2}-b_\varkappa)^n}{z-b_\varkappa} \right) \right\}. \end{cases}$$

Quibus collatis patet quantitates $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-2}$ dari ut radices aequationis $(n-1)$ti gradus hac forma indutae:

$$\psi\left\{\sqrt{\frac{m_{2n+1}-z}{m_{2n+2}-z}}\right\} - \psi\left\{-\sqrt{\frac{m_{2n+1}-z}{m_{2n+2}-z}}\right\} = 0,$$

sive etiam hac:

$$\sum_1^n{}^{\varkappa} \frac{\psi(\beta_\varkappa)}{\beta_\varkappa F'(b_\varkappa)} \cdot \frac{(m_{2n+2}-b_\varkappa)^{n-1}}{z-b_\varkappa} = 0;$$

nec non quantitates $x, x_2, \ldots x_{2n-2}$ ut radices aequationis $n$ti gradus, quae hac forma:

$$\psi\left\{\sqrt{\frac{m_{2n+1}-z}{m_{2n+2}-z}}\right\} + \psi\left\{-\sqrt{\frac{m_{2n+1}-z}{m_{2n+2}-z}}\right\} = 0,$$

sive hac:

$$\psi(1)+\psi(-1)+(-1)^n \sum_1^n{}^{\varkappa} \frac{\psi(\beta_\varkappa)}{F'(b_\varkappa)} \cdot \frac{(m_{2n+2}-b_\varkappa)^n}{z-b_\varkappa} = 0.$$

gaudet.

7.

Iam transeamus ad naturam radicum:

$$a, \; a_1, \ldots \; a_{n-2},$$
$$x, \; x_2, \ldots \; x_{2n-2},$$

propius investigandam. Primum ex $2n$ aequationibus formae (6.) statim concluditur, et ipsum c et functionum $\varrho(z)$ et $\varphi(z)$ coëfficientes omnes reales esse, quippe quod etiam formulis (45.) et (46.) comprobatur. Hanc ob causam nulla radicum $a, a_1, \ldots a_{n-2}$, imaginaria esse potest, nisi alteram secum fert sibi coniugatam; eademque natura gaudebunt radices: $x, x_2, \ldots x_{2n-2}$.

Formula (26.) vero docet quantitatem c adeo esse positivam, id quod etiam directe ex aequationibus formae (6.) concluditur. Quam ob causam, nec ulla radicum:

$$x, \; x_2, \ldots \; x_{2n-2},$$

in ullo intervallorum:

$$-\alpha \ldots m_1, \; m_2 \ldots m_3, \; m_4 \ldots m_5, \; \ldots \; m_{2n} \ldots m_{2n+1}, \; m_{2n+2} \ldots \alpha,$$

continetur, quippe in quorum intervallorum aliquo versante z, aequationis (4.) prior terminus positivo valore gaudet, hancque ob causam evanescere nequit; nec ulla quantitatum:

$$a, \; a_1, \; a_2, \ldots \; a_{n-2},$$

in ullo reliquorum intervallorum:

$$m_1 \ldots . m_2, \quad m_3 \ldots . m_4, \quad \ldots . \quad m_{2n+1} \ldots . m_{2n+2},$$

iacebit; in eiusmodi enim loco versante z, prior aequationis (4.) pars negativo, posterior positivo valore indueretur, id quod absurdum est.

Radicalia deinde:

$$\eta_1, \ \eta_2, \ \ldots . \ \eta_{2n},$$

ob formulam (26.), conditioni:

$$(1+\eta_1)(1+\eta_2) \ldots . (1+\eta_{2n}) = (1-\eta_1)(1-\eta_2) \ldots . (1-\eta_{2n}),$$

satisfaciant necesse est, unde sequitur, tantum 2^{2n-1} systemata diversa signorum horum radicalium assumi posse, totidemque inde prodire et quantitatis c et functionum $\rho(z)$, $\varphi(z)$ expressiones diversas, de quibus in articulo praecedenti sermo fuit. — Formulae denique (27.), ... (32.), quia fractio $\left(\frac{\eta_\varkappa}{\eta_\lambda}\right)^2$, si habetur $\varkappa < \lambda$, unitatem haud aequat, docent expressiones binas:

$$49. \quad \left\{\begin{array}{lll}
\rho(m_{2n+2}) & \text{atque} & \eta_1+\eta_2+\ldots .+\eta_{2n}, \\
(-1)^{n-1}\rho(m_{2n+1}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2n}\left\{\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\eta_2}+\ldots .+\frac{1}{\eta_{2n}}\right\}, \\
(-1)^{n-1}\rho(m_{2n}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2n-1}, \\
(-1)^{n-1}\rho(m_{2n-1}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2n-1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
(-1)^{n-1}\rho(m_{2h}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2h-1}, \\
(-1)^{n-1}\rho(m_{2h-1}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2h-1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
(-1)^{n-1}\rho(m_2) & - \ - & \eta_1, \\
(-1)^{n-1}\rho(m_1) & - \ - & \eta_1,
\end{array}\right.$$

$$50. \quad \left\{\begin{array}{lll}
\varphi(m_{2n+2}) & \text{atque} & 1, \\
(-1)^{n}\varphi(m_{2n+1}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2n}, \\
(-1)^{n}\varphi(m_{2n}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2n}, \\
(-1)^{n}\varphi(m_{2n-1}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2n-2}, \\
(-1)^{n}\varphi(m_{2n-2}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2n-2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
(-1)^{n}\varphi(m_{2h-1}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2h-2}, \\
(-1)^{n}\varphi(m_{2h-2}) & - \ - & \eta_1\eta_2 \ldots . \eta_{2h-2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
(-1)^{n}\varphi(m_2) & - \ - & \eta_1\eta_2, \\
(-1)^{n}\varphi(m_1) & - \ - & 1,
\end{array}\right.$$

simul positivo vel negativo valore gaudere. Inde ducimur ad hanc distributionem 2^{2n-1} casuum, quorum supra mentionem fecimus; nimirum si valores productorum singulorum

$$51.\quad \eta_1\eta_2,\ \eta_3\eta_4,\ \ldots\ldots\ \eta_{2n-1}\eta_{2n},$$

quomodocunque vel positivi vel negativi assumuntur, inde 2^n casus diversi prodeunt; si deinde in his singulis casibus signa valorum productorum:

$$52.\quad \eta_1\eta_3,\ \eta_1\eta_5,\ \ldots\ldots\ \eta_1\eta_{2n-1}$$

quomodocunque assumuntur, pro singulis 2^{n-1} suppositiones emanant.

E numero 2^n casuum tales secernere placet, in quibus radices

$$53.\quad x,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_{2n-2},$$

non modo *semper* reales sunt, sed adhuc singulae in singulis n horum $n+1$ intervallorum:

$$54.\quad m_1\ldots\ldots m_2,\ m_3\ldots\ldots m_4,\ \ldots\ldots\ m_{2n+1}\ldots\ldots m_{2n+2},$$

continentur, qui casus numero $n+1$ e serie (50.) facile desumuntur. Producta enim seriei (51.) vel omnia negativos valores habent, in quo casu *primo* radices (53.) singulae continentur in singulis n primis intervallorum (54.); vel omnia uno excepto negativis valoribus gaudent, unde n *reliqui* casus prodeunt tales, ut, generaliter in $x$to casu, ubi productum $\eta_{2x-3}\eta_{2x-2}$ illud unum positivum est, radices (53.) singulae in n intervallis (54.), intervallo $m_{2x-3}\ldots\ldots m_{2x-2}$ excepto, contineantur. Adiiciatur in casu primo quantitatum $a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-2}$ numerum parem vel imparem contineri in quocunque intervallo

$$m_{2h}\ldots\ldots m_{2h+1},$$

prout productum $\eta_{2h-1}\eta_{2h+1}$ negativo vel positivo valore gaudeat, idemque fieri in casu $x$to, excepto intervallo $m_{2x-2}\ldots\ldots m_{2x-1}$, in quo par vel impar numerus earundem quantitatum iacebit prout productum:

$$\eta_{2x-3}\eta_{2x-1}$$

positivo vel negativo valore gaudebit.

Maiori tamen attentione digna videtur regula simplex, secundum quam iudicare licet de signis quantitatum:

$$\varrho(m_1),\ \varrho(m_3),\ \ldots\ldots\ \varrho(m_{2h-1})\ldots\ldots\varrho(m_{2n-1}),$$

quae cum signis ipsarum:

$$\varrho(m_2),\ \varrho(m_4),\ \ldots\ldots\ \varrho(m_{2h})\ldots\ldots\varrho(m_{2n}),$$

convenire, e serie (49.), nec non cum signis quantitatum:

$$\varrho(x),\ \varrho(x_2),\ \ldots\ldots\ \varrho(x_{2h-2})\ldots\ldots\varrho(x_{2n-2}),$$

ex considerationibus huius articuli sponte patet. Quam regulam in sequentibus adhibebimus. Nimirum ex eadem serie (49.) concludere licet, signa illarum

quantitatum in primo casu congruere cum signis quantitatum:

$$(-1)^{n-1}\eta_1,\ (-1)^{n-2}\eta_3,\ \ldots\ (-1)^{n-h}\eta_{2h-1},\ \ldots\ \eta_{2n-1},$$

in secundo casu, cum signis quantitatum:

$$(-1)^{n-1}\eta_1,\ (-1)^{n-1}\eta_3,\ \ldots\ (-1)^{n-h+1}\eta_{2h-1},\ \ldots\ -\eta_{2n-1},$$

in tertio casu cum signis quantitatum:

$$(-1)^{n-1}\eta_1,\ (-1)^{n-2}\eta_3,\ (-1)^{n-2}\eta_5,\ \ldots\ (-1)^{n-h+1}\eta_{2h-1},\ \ldots\ -\eta_{2n-1},$$

nec non generaliter in $\varkappa$to casu signa binarum quantitatum:

$$\varrho(m_{2\varkappa-2h-3}),\quad (-1)^{n-\varkappa+h+1}\eta_{2\varkappa-2h-3}$$

inter se congruere, aeque ac signa quantitatum binarum:

$$\varrho(m_{2\varkappa+2H-1}),\quad (-1)^{n-\varkappa-H+1}\eta_{2\varkappa+2H-1},$$

ubi littera $\varkappa$ designatur numerus quilibet integer unitate maior, numerum $n+1$ haud superans, atque per h quilibet numerorum:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \varkappa-2,$$

nec non per H quilibet numerorum:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-\varkappa)$$

denotatur.

Haec de natura radicum duplicium aequationis formae:

$$c\{(z-a)(z-a_1)\ldots(z-a_{n-2}\}^2(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})+(z-m_1)(z-m_2)\ldots(z-m_{2n})=0$$

atque de quantitatibus $c,\ a,\ a_1,\ \ldots\ a_{n-2}$ attulisse sufficiat. Qua forma brevitatis gratia denotata per:

$$(2n+2,\ 2n+1)=0,$$

similique denotatione, si in priori aequationis termino factores $(z-m_{2n+2})$ atque $(z-m_{2n+1})$ cum aliis duobus quibuslibet e numero $2n$ factorum:

$$(z-m_1),\ (z-m_2),\ \ldots\ (z-m_{2n}),$$

commutantur, adhibita, $(2n+1)$ formas:

$$(2n+1,2n)=0,\ (2n,2n-1)=0,\ \ldots\ (2,1)=0,\ (1,2n+2)=0,$$

quae et ipsae similibus suppositionibus ad n reales radices duplices ducunt, ope substitutionis:

$$Z=p.\frac{n-z}{m-z},$$

ubi quantitas m respective conditionibus:

$$m_{2n+2}>m\geqq m_{2n+1},\quad m_{2n+1}>m\geqq m_{2n+2},\ \ldots\ m_2>m\geqq m_1,$$

satisfacit, nec non habetur:

$$p(n-m)>0,$$

ad illam formam $(2n+2,\ 2n+1)=0$, pro argumento Z revocare licet. Ceterarum vero omnium formarum naturam indagare hic non placet, quippe quae

realem problematis algebraici solutionem haud admittunt. Facile enim demonstratur, has formas, pro realibus ipsius c et coëfficientium functionis $\varphi(z)$ valoribus, radicibus binis inter se aequalibus neutiquam gaudere posse.

8.

Problematis algebraici solutio in antecedentibus exposita ut adhibeatur in theoria integralium *Abelianorum* $(n-1)$ti ordinis, generaliores quasdam de his integralibus, quas adhuc pro theorematis *Abeliani* applicationibus habere licet, propositiones hic peculiari methodo deducere velimus ex aequatione identica:

$$55.\quad C(P(z))^2(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})+f(z) = (1+C)\pi(z)\Pi(z),$$

ubi ponitur:

$$56.\quad \begin{cases} (z-m_1)(z-m_2)\dots(z-m_{2n}) = f(z), \\ (z-A_1)(z-A_2)\dots(z-A_{n-1}) = P(z), \\ (z-y_1)(z-y_2)\dots(z-y_n) = \pi(z), \\ (z-Y_1)(z-Y_2)\dots(z-Y_n) = \Pi(z), \end{cases}$$

ita ut quantitates:

$$57.\quad y_1,\ y_2,\ \dots\ y_n,\quad Y_1,\ Y_2,\ \dots\ Y_n,$$

radices sint aequationis $2n$ti gradus:

$$58.\quad C(P(z))^2(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})+f(z) = 0.$$

Deinde per signa

$$e_1,\ e_2,\ \dots\ e_n,\quad E_1,\ E_2,\ \dots\ E_n,$$

tales positivae vel negativae denotentur unitates ut, littera ν designante quemlibet numerorum $1, 2, \dots n$, generales habeantur formulae:

$$59.\quad \begin{cases} \sqrt{C}\,P(y_\nu) = \dfrac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)}, \\ \sqrt{C}\,P(Y_\nu) = \dfrac{E_\nu\sqrt{(\Delta Y_\nu)}}{(m_{2n+2}-Y_\nu)(m_{2n+1}-Y_\nu)}, \end{cases}$$

ubi brevitatis gratia ponitur:

$$\Delta z = -(z-m_1)(z-m_2)\dots(z-m_{2n+2}).$$

Ex aequatione (55.) tria placet derivare systemata formularum. Primum enim ibi posito: $z=A_\mu$, $z=m_{2n+2}$, $z=m_{2n+1}$, ubi littera μ quemlibet numerorum $1, 2, \dots n-1$ denotat, prodeunt formulae numero $n+1$ hae:

$$60.\quad f(A_\mu) = (1+C)\,\pi(A_\mu)\,\Pi(A_\mu),$$

$$61.\quad f(m_{2n+2}) = (1+C)\,\pi(m_{2n+2})\,\Pi(m_{2n+2}),$$

$$62.\quad f(m_{2n+1}) = (1+C)\,\pi(m_{2n+1})\,\Pi(m_{2n+1}).$$

Deinde utriusque ipsius termini logarithmos, ipso z ut variabili assumto, differentiando, positoque $z = A_\mu$, emanant hae $n-1$ aequationes:

$$63. \quad \frac{1}{A_\mu - m_1} + \frac{1}{A_\mu - m_2} + \dots + \frac{1}{A_\mu - m_{2n}} = \sum_1^n{}^\nu \left(\frac{1}{A_\mu - y_\nu} + \frac{1}{A_\mu - Y_\nu} \right).$$

Eiusdem denique aequationis et aequationum (60.), (61.), (62.) utramque partem logarithmice differentiando, quantitatibus C, $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, $y_1, y_2, \dots y_n$, $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ pro variabilibus assumtis, si adhibetur aequatio (63.), nanciscimur has $n+2$ formulas differentiales:

$$64. \quad d\log\left(1 - \frac{C(Pz)^2(z-m_{2n+2})^2(z-m_{2n+1})^2}{\Delta z}\right) = \frac{dC}{1+C} - \sum_1^n{}^\nu \left(\frac{dy_\nu}{z-y_\nu} + \frac{dY_\nu}{z-Y_\nu} \right),$$

$$65. \quad \frac{dC}{1+C} = \sum_1^n{}^\nu \left(\frac{dy_\nu}{(A_\mu - y_\nu)} + \frac{dY_\nu}{A_\mu - Y_\nu} \right),$$

$$66. \quad \frac{dC}{1+C} = \sum_1^n{}^\nu \left(\frac{dy_\nu}{m_{2n+2} - y_\nu} + \frac{dY_\nu}{m_{2n+2} - Y_\nu} \right),$$

$$67. \quad \frac{dC}{1+C} = \sum_1^n{}^\nu \left(\frac{dy_\nu}{m_{2n+1} - y_\nu} + \frac{dY_\nu}{m_{2n+1} - Y_\nu} \right).$$

Inde, eliminatione ipsius $\frac{dC}{1+C}$ facta, ducimur ad has $n+1$ aequationes

$$68. \quad \begin{cases} d\log\left(1 - \dfrac{C(Pz)^2(z-m_{2n+2})^2(z-m_{2n+1})^2}{\Delta z}\right) \\ = (A_1 - z) \sum_1^n{}^\nu \left\{ \dfrac{dy_\nu}{(y_\nu - A_1)(z-y_\nu)} + \dfrac{dY_\nu}{(Y_\nu - A_1)(z-Y_\nu)} \right\}, \\ = (A_2 - z) \sum_1^n{}^\nu \left\{ \dfrac{dy_\nu}{(y_\nu - A_2)(z-y_\nu)} + \dfrac{dY_\nu}{(Y_\nu - A_2)(z-Y_\nu)} \right\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ = (A_{n-1} - z) \sum_1^n{}^\nu \left\{ \dfrac{dy_\nu}{(y_\nu - A_{n-1})(z-y_\nu)} + \dfrac{dY_\nu}{(Y_\nu - A_{n-1})(z-Y_\nu)} \right\}, \\ = (m_{2n+2} - z) \sum_1^n{}^\nu \left\{ \dfrac{dy_\nu}{(y_\nu - m_{2n+2})(z-y_\nu)} + \dfrac{dY_\nu}{(Y_\nu - m_{2n+2})(z-Y_\nu)} \right\}, \\ = (m_{2n+1} - z) \sum_1^n{}^\nu \left\{ \dfrac{dy_\nu}{(y_\nu - m_{2n+1})(z-y_\nu)} + \dfrac{dY_\nu}{(Y_\nu - m_{2n+1})(z-Y_\nu)} \right\}, \end{cases}$$

quibus ex ordine multiplicatis per expressiones:

$$\frac{1}{\sqrt{C}\,P'(A_1)(A_1 - m_{2n+2})(A_1 - m_{2n+1})} \cdot \frac{1}{z - A_1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{C}\,P'(A_2)(A_2 - m_{2n+2})(A_2 - m_{2n+1})} \cdot \frac{1}{z - A_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{C}\,P'(A_{n-1})(A_{n-1} - m_{2n+2})(A_{n-1} - m_{2n+1})} \cdot \frac{1}{z - A_{n-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{C}\,P(m_{2n+2})(m_{2n+2}-m_{2n+1})}\cdot\frac{1}{z-m_{2n+2}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{C}\,P(m_{2n+1})(m_{2n+1}-m_{2n+2})}\cdot\frac{1}{z-m_{2n+1}},$$

quorum factorum summa secundum theorema notissimum transit in expressionem:

$$\frac{1}{\sqrt{C}\,P(z)(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})},$$

additioneque instituta, prodit aequatio differentialis:

$$\frac{-d.\log\left\{1-\frac{C(P(z))^2(z-m_{2n+2})^2(z-m_{2n+1})^2}{\Delta z}\right\}}{\sqrt{C}\,P(z)(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})} =$$

$$\sum_1^n \nu \left\{\frac{dy_\nu}{\sqrt{C}(z-y_\nu)P(y_\nu)(y_\nu-m_{2n+2})(y_\nu-m_{2n+1})}+\frac{dY}{\sqrt{C}(z-Y_\nu)P(Y_\nu)(Y_\nu-m_{2n+2})(Y_\nu-m_{2n+1})}\right\},$$

nec non post facilem reductionem, si in singulis secundae partis terminis e singulis aequationibus (59.) valores ipsius $\sqrt{C}$ substituuntur, respective integratione facta inde a valoribus

$$C^0,\ A_1^0,\ A_2^0,\ \dots\ A_{n-1}^0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \dots\ y_n^0,\ Y_1^0,\ Y_2^0,\ \dots\ Y_n^0,$$

qui valores initiales quantitatum variabilium

$$C,\ A_1,\ A_2,\ \dots\ A_{n-1},\ y_1,\ y_2,\ \dots\ y_n,\ Y_1,\ Y_2,\ \dots\ Y_n$$

sunt, usque ad hos valores finales, haec elegans formula obtinetur:

$$69.\quad \sum_1^n \nu \left\{\int_{y_\nu^0}^{y_\nu}\frac{e_\nu\,dy}{(z-y)\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{Y_\nu^0}^{Y_\nu}\frac{E_\nu\,dy}{(z-y)\sqrt{(\Delta y)}}\right\}$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{(-\Delta z)}}\left\{\text{arc tang}\frac{\sqrt{C}\,P(z)(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta z)}}\right.$$
$$\left.-\text{arc tang}\frac{\sqrt{C^0}\,P^0(z)(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta z)}}\right\},$$

ubi ponitur:

$$P^0(z)=(z-A_1^0)(z-A_2^0)\dots(z-A_{n-1}^0).$$

In hac formula continentur multae aliae quae per evolutionem secundum descendentes ipsius z potestates inde derivantur, nimirum haec:

$$70.\quad \sum_1^n \nu \left\{\int_{y_\nu^0}^{y_\nu}\frac{e_\nu\,y^\mu\,dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{Y_\nu^0}^{Y_\nu}\frac{E_\nu\,Y^\mu\,dY}{\sqrt{(\Delta Y)}}\right\}=0,$$

ubi littera μ quilibet numerorum $0, 1, 2, \dots n-1$ denotatur, atque haec pro qualibet quantitate α valens, ubi denotatio pro coëfficiente evolutionis usitata adhibetur, nec non $\Phi(z)$ designat functionem integram ipsius z quamlibet:

$$71.\quad \sum_1^n{}^{\nu}\left\{\int_{y_\nu^0}^{y_\nu}\frac{e_\nu\,\Phi(y)\,dy}{(y-\alpha)\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{Y_\nu^0}^{Y_\nu}\frac{E_\nu\,\Phi(y)\,dy}{(y-\alpha)\sqrt{(\Delta y)}}\right\}=$$

$$-2\left[\frac{\Phi(z)}{(z-\alpha)\sqrt{(-\Delta z)}}\left\{\text{arc tang}\frac{\sqrt{C}(P(z))(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta z)}}-\text{arc tang}\frac{\sqrt{C^0}(P^0(z))(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta z)}}\right\}\right]_{z^{-1}}$$
$$+2\,\frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}\left\{\text{arc tang}\frac{\sqrt{C}(P(\alpha))(\alpha-m_{2n+2})(\alpha-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}-\text{arc tang}\frac{\sqrt{C^0}(P^0(\alpha))(\alpha-m_{2n+2})(\alpha-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}\right\}.$$

Aequationis (55.) forma talis est, ut n relationes algebraicae inter $2n$ ipsius radices valeant, unde patet, n valores Y_1, Y_2, ... Y_n algebraice eosque ut radices aequationis $n$ti gradus determinari ex quantitatibus $y_1, y_2, \ldots y_n$. Quam determinationem, una cum computatione signorum E_1, E_2, ... E_n, atque quantitatum in formulis integralibus involutarum C et $P(z)$, hoc modo instituere placet.

E formulis (59.) sequitur haec:

$$72.\quad \sqrt{C}\,P(z)=\pi(z)\sum_1^n{}^{\nu}\left(\frac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)}\cdot\frac{1}{\pi'(y_\nu)}\cdot\frac{1}{z-y_\nu}\right);$$

unde cum ex aequatione (55.) posito $z=m_h$, derivetur haec:

$$73.\quad C(P(m_h))^2(m_{2n+2}-m_h)(m_{2n+1}-m_h)=(C+1)\pi(m_h).\Pi(m_h),$$

deducuntur hae relationes:

$$74.\quad \begin{cases}\Pi(m_{2n+2}) & \dfrac{f(m_{2n+2})}{\pi(m_{2n+2})}\\ :\Pi(m_{2n+1}) & :\dfrac{f(m_{2n+1})}{\pi(m_{2n+1})}\\ :\Pi(m_h) \quad = & :(m_{2n+2}-m_h)(m_{2n+1}-m_h)\pi(m_h)\left\{\sum_1^n{}^{\nu}\dfrac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)\pi'(y_\nu)}\cdot\dfrac{1}{m_h-y_\nu}\right\}^2\\ :1 & :1+\left\{\sum_1^n{}^{\nu}\dfrac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)\pi' y_\nu}\right\}^2\end{cases}$$

atque, quantitatibus b_1, b_2, ... b_n ut supra denotationeque (35.) introductis, haec aequationis, radicibus Y_1, Y_2, ... Y_n gaudentis, forma:

$$75.\quad 1+\left\{\sum_1^n{}^{\nu}\frac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)\pi' y_\nu}\right\}^2+\sum_1^n{}^{x}\sum_1^n{}^{\nu}\left(\frac{\pi(b_x)}{F' b_x}\cdot\frac{(m_{2n+2}-b_x)(m_{2n+1}-b_x)}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)}\cdot\frac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{\pi' y_\nu(b_x-y_\nu)}\cdot\frac{1}{z-b_x}\right)$$
$$=0.$$

Signa E_1, E_2, ... E_n deinde computantur ope formulae ex aequationibus (59.) et (72.) derivatae:

$$76.\quad E_x=(m_{2n+2}-Y_x)(m_{2n+1}-Y_x)\pi(Y_\nu)\sum_1^n{}^{\nu}\frac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)\pi'(y_\nu)}\cdot\frac{1}{Y_k-y_\nu}.$$

Iam adhuc aliam formam functionis $\sqrt{C}.Pz$ proponere placet, ex omnibus radicibus aequationis (55.) compositam atque in formula (71.) substituendam.

Nimirum valore ipsius $1+C$ ope formulae (61.) determinato, atque in aequatione (73.) substituto, emanat haec

$$77.\quad \sqrt{C}\,P(m_h) = \pm\frac{1}{\sqrt{(m_{2n+2}-m_h)(m_{2n+1}-m_h)}}\sqrt{\left\{\frac{\pi(m_h).\Pi(m_h)\,f(m_{2n+2})}{\pi(m_{2n+2})\,\Pi(m_{2n+2})}\right\}},$$

unde loco ipsius m_h quantitatibus $b_1, b_2, \ldots. b_n$, atque loco signorum ± 1 respective signis: $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots. e^{(n)}$ introductis, haec deducitur formula:

$$78.\quad \sqrt{C}\,P(z) =$$

$$F(z)\sum_1^n{}^{\nu}\left(\frac{e^{(\nu)}}{F'(b_\nu)}\cdot\frac{1}{\sqrt{(m_{2n+2}-b_\nu)(m_{2n+1}-b_\nu)}}\sqrt{\left(\frac{\pi(b_\nu)\Pi(b_\nu)f(m_{2n+2})}{\pi(m_{2n+2})\,\Pi(m_{2n+2})}\right)}\frac{1}{z-b_\nu}\right).$$

9.

Casum ubi n quantitates datae:

$$y_1,\ y_2,\ \ldots.\ y_n,$$

reales sunt et continentur respective in n intervallis:

$$79.\quad m_1\ldots.m_2,\ m_3\ldots.m_4,\ \ldots.\ m_{2n-1}\ldots.m_{2n},$$

pro fundamentali hic habere placet, quippe in quo quantitatem C positivo valore gaudere, nec non quantitates:

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots.\ Y_n,$$

reales esse atque in iisdem, singulas in singulis, intervallis contineri, ex aequatione (55.) extemplo concluditur.

Huius enim aequationis pars prior, si quantitas C negativa esset, loco ipsius z valore radicis, quae in quolibet intervallorum (79.) continetur, substituto, ut aggregatum duorum terminorum negativorum evanescere non posset, eademque parte priori pro $z = m_{2\nu-1}$ et pro $z = m_{2\nu}$ positivis valoribus gaudente, radix y_ν in intervallo $m_{2\nu-1}\ldots.m_{2\nu}$ iacens, alteram in eodem intervallo secum ferat necesse est.

Deinde patet, quamcunque e numero quantitatum:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots.\ A_{n-1},$$

quae in quolibet intervallorum (79.) contineatur, etiam inter radices duas in eodem intervallo iacentes contineri. Sit enim hoc intervallum $m_{2\nu-1}\ldots.m_{2\nu}$, atque radicum y_ν, Y_ν minor v_ν, maior Υ_ν. Iam si quaecunque quantitatum A in intervallo $m_{2\nu-1}\ldots.v_\nu$ vel in intervallo $\Upsilon_\nu\ldots.m_{2\nu}$ contineretur, etiam radix alia aequationis (55.) in eodem intervallo versaretur, et hanc ob rem haec ut tertia in intervallo $m_{2\nu-1}\ldots.m_{2\nu}$ iaceret, id quod fieri nequit. Inde adhuc sequitur, binas quantitates:

$$P(m_{2\nu-1})\ \text{ et }\ P(v_\nu)$$

generaliter simul positivas vel negativas esse, eademque natura binas quantitates

$$P(m_{2\nu}) \quad \text{et} \quad P(\Upsilon_\nu)$$

gaudere.

Quae cum ita sint, habetur haec propositio:

Si radices aequationis:

$$C(z-A_1)^2(z-A_2)^2\ldots\ldots(z-A_{n-1})^2(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})+(z-m_1)(z-m_2)\ldots\ldots(z-m_{2n}) = 0$$

ex ordine scriptae:

$$v_1,\ \Upsilon_1,\ v_2,\ \Upsilon_2,\ \ldots\ldots\ v_n,\ \Upsilon_n,$$

binae in singulis intervallis:

$$m_1\ldots\ldots m_2,\ m_3\ldots\ldots m_4,\ \ldots\ldots\ m_{2n-1}\ldots\ldots m_{2n},$$

continentur, radices aequationis similis formae:

$$C^0(z-A_1^0)^2(z-A_2^0)^2\ldots\ldots(z-A_{n-1}^0)^2(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})+(z-m_1)(z-m_2)\ldots\ldots(z-m_{2n}) = 0,$$

ex ordine scriptae:

$$v_1^0,\ \Upsilon_1^0,\ v_2^0,\ \Upsilon_2^0,\ \ldots\ldots\ v_n^0,\ \Upsilon_n^0$$

tales functiones quantitatum C^0, A_1^0, A_2^0, ... A_n^0 sunt, ut quantitatibus A_1^0, A_2^0, ... A_{n-1}^0 in certis quibusdam intervallis respective usque ad valores:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots\ A_{n-1}$$

continue progredientibus, nec non ipso C^0 simul a nihilo usque ad valorem C apte crescente, ipsae continue pergant:

$$\begin{array}{l} v_1^0 \text{ ab } m_1 \text{ usque ad } v_1, \\ \Upsilon_1^0 \text{ ab } m_2 \text{ usque ad } \Upsilon_1, \\ v_2^0 \text{ ab } m_3 \text{ usque ad } v_2, \\ \Upsilon_2^0 \text{ ab } m_4 \text{ usque ad } \Upsilon_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Upsilon_n^0 \text{ ab } m_{2n} \text{ usque ad } \Upsilon_n, \end{array}$$

nec generaliter signa expressionum formae:

$$(v_\nu^0-A_1^0)(v_\nu^0-A_2^0)\ldots\ldots(v_\nu^0-A_{n-1}^0),$$
$$(\Upsilon_\nu^0-A_1^0)(\Upsilon_\nu^0-A_2^0)\ldots\ldots(\Upsilon_\nu^0-A_{n-1}^0),$$

interea commutantur, nisi quantitatum A aliqua per aliquem valorum:

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ldots\ m_{2n},$$

transmigrat.

Hac propositione, cuius demonstratione facili, quippe quam in casu speciali $n=2$ antea exposuimus, hic supersedemus, docemur quantitates:

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ldots\ m_{2n}$$

in aequationibus integralibus (70.) et (71.) pro valoribus variabilium initialibus

$$y_1^0,\ Y_1^0,\ \dots\ Y_n^0$$

assumi posse, ideoque expressionem:

$$80.\qquad \sum_1^n{}^{\nu}\left\{\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu}\frac{\varepsilon_\nu\, y^\mu\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_{2\nu}}^{\Upsilon_\nu}\frac{\mathcal{E}_\nu\, y^\mu\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}}\right\}$$

(ubi signa e_ν et E_ν ad v_ν et Υ_ν respective pertinentia denotantur per ε_ν et $\mathcal{E}_\nu$) evanescere pro:

$$\mu=0,\quad \mu=1,\quad \mu=2,\quad \dots\quad \mu=n-1,$$

atque pro $\mu=n$ transire in expressionem:

$$81.\qquad -2\operatorname{arc\,tang}\sum_1^n{}^{\nu}\frac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)}\cdot\frac{1}{\pi'(y_\nu)},$$

nec non integralium aggregatum hoc:

$$82.\qquad \sum_1^n{}^{\nu}\left\{\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu}\frac{\varepsilon_\nu\,\Phi(y)\,dy}{(y-\alpha)\sqrt{(\Delta y)}}+\int_{m_{2\nu}}^{\Upsilon_\nu}\frac{\mathcal{E}_\nu\,\Phi(y)\,dy}{(y-\alpha)\sqrt{(\Delta y)}}\right\}$$

congruere cum expressione, ope formulae (72.) composita:

$$83.\qquad -2\left[\frac{\Phi(z)}{(z-\alpha)\sqrt{(-\Delta z)}}\operatorname{arc\,tang}\left\{\frac{\pi(z)\,(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta z)}}\sum_1^n{}^{\nu}\left(\frac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)}\cdot\frac{1}{\pi'(y_\nu)}\cdot\frac{1}{z-y_\nu}\right)\right\}\right]_{z^{-1}}$$
$$+\,2\,\frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}\operatorname{arc\,tang}\left\{\frac{\pi(\alpha)(\alpha-m_{2n+2})(\alpha-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}\sum_1^n{}^{\nu}\left(\frac{e_\nu\sqrt{(\Delta y_\nu)}}{(m_{2n+2}-y_\nu)(m_{2n+1}-y_\nu)}\cdot\frac{1}{\pi'(y_\nu)}\cdot\frac{1}{\alpha-y_\nu}\right)\right\}.$$

Si contra formulam (78.) in aequatione (71.) substituere velimus, loco quantitatum, e numero $2n$ quantitatum:

$$m_1,\ m_2,\ \dots\ m_{2n},$$

arbitrarie electarum, $b_1, b_2, \dots b_n$, positis

$$m_1,\ m_3,\ \dots\ m_{2n-1},$$

simul signa:

$$e_1,\ e_2,\ \dots\ e_n,$$

ex antecedentibus congruere debent cum signis:

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \dots\ \varepsilon_n;$$

unde sequitur, expressionem (81.) adhuc commutari posse cum hac:

$$2\operatorname{arc\,tang}\left\{\sum_1^n{}^{\nu}\frac{\varepsilon_\nu}{F'(m_{2\nu-1})}\cdot\frac{1}{\sqrt{\{(m_{2n+2}-m_{2\nu-1})(m_{2n+1}-m_{2\nu-1})\}}}\sqrt{\left(\frac{\pi(m_{2\nu-1})\,\Pi(m_{2\nu-1})\,f(m_{2n+2})}{\pi(m_{2n+2})\,\Pi(m_{2n+2})}\right)}\right\},$$

atque posito:

$$\sqrt{C}\,P(z)=$$
$$F(z)\sum_1^n{}^{\nu}\left\{\frac{\varepsilon_\nu}{F'(m_{2\nu-1})}\cdot\frac{1}{\sqrt{\{(m_{2n+2}-m_{2\nu-1})(m_{2n+1}-m_{2\nu-1})\}}}\sqrt{\left(\frac{\pi(m_{2\nu-1})\,\Pi(m_{2\nu-1})\,f(m_{2n+2})}{\pi(m_{2n+2})\,\Pi(m_{2n+2})}\cdot\frac{1}{z-m_{2\nu-1}}\right)}\right\},$$

ipsam (83.) cum hac:

$$-2\left[\frac{\Phi(z)}{(z-\alpha)\sqrt{(-\Delta z)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}\,P(z)\,(z-m_{2n+2})\,(z-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta z)}}\right]_{z^{-1}}$$
$$+2\,\frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{C}\,P(\alpha)\,(\alpha-m_{2n+2})(\alpha-m_{2n+1})}{\sqrt{(-\Delta\alpha)}}.$$

10.

Disquisitiones denique antecedentes de integralibus *Abelianis* $(n-1)$ti ordinis adhibere restat ad *functiones Abelianas* eiusdem ordinis. Ubi ut casum principalem, ad quem ceteri ob earundem functionum periodicitatem revocantur, ponamus hunc:

$$\varepsilon_1 = \mathscr{E}_1,\quad \varepsilon_2 = \mathscr{E}_2,\quad \ldots\ldots\quad \varepsilon_n = \mathscr{E}_n,$$

quippe qui cum casu primo problematis specialis in articulo 6. exposito convenit. Cum vero ibi signa quantitatum:

$$P(m_{2n-1}),\quad P(m_{2n-3}),\quad \ldots\ldots\quad P(m_3),\quad P(m_1),$$

congruentium cum ipsis:

$$\varrho(m_{2n-1}),\quad \varrho(m_{2n-3}),\quad \ldots\ldots\quad \varrho(m_3),\quad \varrho(m_1),$$

eadem fuerint ac ipsorum:

$$\eta_{2n-1},\quad -\eta_{2n-3},\quad \ldots\ldots\ (-1)^{n-2}\eta_3,\ (-1)^{n-1}\eta_1,$$

sequitur signa quantitatum:

$$\eta_{2n},\ \eta_{2n-1},\ \eta_{2n-2},\ \eta_{2n-3},\ \ldots\ldots\quad \eta_{2h},\quad \eta_{2h-1},\quad \ldots\ldots\quad \eta_2,\quad \eta_1,$$

aequalia esse ipsis:

$$-\varepsilon_n,\ +\varepsilon_n,\ +\varepsilon_{n-1},\ -\varepsilon_{n-1},\ \ldots\ldots\ (-1)^{n-h-1}\varepsilon_h,\ (-1)^{n-h}\varepsilon_h,\ \ldots\ldots\ (-1)^{n-2}\varepsilon_1,\ (-1)^{n-1}\varepsilon_1.$$

Quae cum ita se habeant, ex articulis (9.), (8.), (7.), (6.) prodeunt haec de *functionibus Abelianis* theoremata:

Theorema V.

„Introducantur brevitatis gratia hae denotationes:

$$\Delta z = -(z-m_1)(z-m_2)\ldots\ldots(z-m_{2n+2}),$$
$$f(z) = (z-m_1)(z-m_2)\ldots\ldots(z-m_{2n}),$$
$$\pi(z) = (z-v_1)(z-v_2)\ldots\ldots(z-v_n),$$

„atque definiantur argumenta $u,\ u',\ u'',\ \ldots\ldots\ u^{(n-1)}$ his aequationibus:

$$\sum_1^n{}^{\nu}\left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu}\frac{\varepsilon_\nu\, a\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}}\right) = 2u,$$

$$\sum_1^n{}^{\nu}\left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu}\frac{\varepsilon_\nu\, a' y\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}}\right) = 2u',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_1^n{}^{\nu}\left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu}\frac{\varepsilon_\nu\, a^{(n-1)} y^{n-1}\, dy}{\sqrt{(\Delta y)}}\right) = 2u^{(n-1)},$$

„ubi a, a', ... $a^{(n-1)}$ quantitates quaelibet sunt. Iam horum integralium „limitibus:

$$v_1,\quad v_2,\quad \dots\quad v_n,$$

„tanquam functionibus argumentorum:

$$u,\quad u',\quad \dots\quad u^{(n-1)}$$

„consideratis, ponatur generaliter:

$$\pi(m_h) = \lambda_h(u, u', \dots u^{(n-1)}),$$

„nec non:

$$\overset{n}{\underset{1}{\Sigma^\nu}} \left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu} \frac{\varepsilon_\nu \,\Phi(y)\, dy}{(y-a)\sqrt{\Delta(y)}} \right) = 2G(u, u', \dots u^{(n-1)}).$$

„Quibus statutis, si argumenta u, u', ... $u^{(n-1)}$ pro:

$$v_1 = m_2,\quad v_2 = m_4,\quad \dots\quad v_n = m_{2n},$$

„respective valores M, M', ... M^{n-1} induunt, habentur formulae hae:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{2n+2}(u, u', \dots u^{(n-1)}).\lambda_{2n+2}(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)})\\
&:\lambda_{2n+1}(u, u', \dots u^{(n-1)}).\lambda_{2n+1}(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}),\\
&:\quad \lambda_h\,(u, u', \dots u^{(n-1)}).\quad \lambda_h\,(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}),\\
&:\ 1\\
=\ & f(m_{2n+2})\\
&: f(m_{2n+1})\\
&: (m_{2n+2}-m_h)(m_{2n+1}-m_h)\pi(m_h)\left\{\overset{n}{\underset{1}{\Sigma^\nu}} \frac{\varepsilon_\nu \sqrt{\Delta(v_\nu)}}{(m_{2n+2}-v_\nu)(m_{2n+1}-v_\nu)\pi'(v_\nu)}\cdot\frac{1}{m_h-v_\nu}\right\}^2\\
&: 1+\left\{\overset{n}{\underset{1}{\Sigma^\nu}} \frac{\varepsilon_\nu \sqrt{\Delta(v_\nu)}}{(m_{2n+2}-v_\nu)(m_{2n+1}-v_\nu)\pi'(v_\nu)}\right\}^2,
\end{aligned}$$

„ubi h quilibet est numerorum 1, 2, ... $2n$; atque

$$G(u, u', \dots u^{(n-1)}) + G(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}) - G(M, M', \dots M^{(n-1)})$$

$$= -\left[\frac{\Phi(z)}{(z-a)\sqrt{-\Delta(z)}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{C}\,P(z)(z-m_{2n+2})(z-m_{2n+1})}{\sqrt{-\Delta(z)}}\right]_{z^{-1}} + \frac{\Phi(a)}{\sqrt{-\Delta(a)}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{C}\,P(a)(a-m_{2n+2})(a-m_{2n+1})}{\sqrt{-\Delta(a)}},$$

„ubi, posito:

$$F(z) = (z-m_1)(z-m_3)\dots(z-m_{2n-1})$$

„expressio $\sqrt{C}.P(z)$ determinatur formula:

$$\sqrt{C}.P(z) = F(z)\sqrt{\left(\frac{f(m_{2n+2})}{\lambda_{2n+2}(u, u', \dots u^{(n-1)})\,\lambda_{2n+2}(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)})}\right)}$$

$$\times \overset{n}{\underset{1}{\Sigma^\nu}} \frac{\varepsilon_\nu \sqrt{[\lambda_{2\nu-1}(u, u', \dots u^{(n-1)})\,\lambda_{2\nu-1}(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)})]}}{F'(m_{2\nu-1})\sqrt{[(m_{2n+2}-m_{2\nu-1})(m_{2n+1}-m_{2\nu-1})]}\,(z-m_{2\nu-1})}.\text{“}$$

Theorema VI.

„Iisdem denotationibus, ac in theoremate I., adhibitis, atque posito:

$$\psi(z)=\left(z-\varepsilon_n\sqrt{\frac{m_{2n+1}-m_{2n}}{m_{2n+2}-m_{2n}}}\right).\left(z+\varepsilon_{n-1}\sqrt{\frac{m_{2n+1}-m_{2n-2}}{m_{2n+2}-m_{2n-2}}}\right)\ldots\left(z+(-1)^n\varepsilon_1\sqrt{\frac{m_{2n+1}-m_2}{m_{2n+2}-m_2}}\right)$$
$$\times\left(z+\varepsilon_n\sqrt{\frac{m_{2n+1}-m_{2n-1}}{m_{2n+2}-m_{2n-1}}}\right).\left(z-\varepsilon_{n-1}\sqrt{\frac{m_{2n+1}-m_{2n-3}}{m_{2n+2}-m_{2n-3}}}\right)\ldots\left(z+(-1)^{n-1}\varepsilon_1\sqrt{\frac{m_{2n+1}-m_1}{m_{2n+2}-m_1}}\right),$$

„ubi signa $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ conditioni:

$$\psi(1)>\psi(-1)$$

satisfaciunt, habentur formulae memorabiles:

$$\begin{array}{ll}\lambda_{2n+2}(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M',\ldots\tfrac{1}{2}M^{(n-1)}) & 2(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n\\ :\lambda_{2n+1}(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M',\ldots\tfrac{1}{2}M^{(n-1)}) & :\sqrt{\left(4(m_{2n+2}-m_{2n+1})^{2n}\frac{f(m_{2n+1})}{f(m_{2n+2})}\right)}\\ :\lambda_{2\nu}\;(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M',\ldots\tfrac{1}{2}M^{(n-1)}) \;=& :(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n\psi\left((-1)^{n-\nu-1}\varepsilon_\nu\sqrt{\frac{m_{2n+1}-m_{2\nu}}{m_{2n+2}-m_{2\nu}}}\right)\\ :\lambda_{2\nu-1}(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M',\ldots\tfrac{1}{2}M^{n-1}) & :(m_{2n+2}-m_{2n+1})^n\psi\left((-1)^{n-\nu}\varepsilon_\nu\sqrt{\frac{m_{2n+1}-m_{2\nu-1}}{m_{2n+2}-m_{2\nu-1}}}\right)\\ :1 & :\psi(1)+\psi(-1)\end{array}$$

$$2G(\tfrac{1}{2}M,\tfrac{1}{2}M',\ldots\tfrac{1}{2}M^{(n-1)})-G(M,M',\ldots M^{n-1})$$
$$=-\left[\frac{\Phi(z)}{(z-a)\sqrt{-\Delta(z)}}\operatorname{arc\,tang}\chi(z)\right]+\frac{\Phi(a)}{\sqrt{-\Delta(a)}}\operatorname{arc\,tang}\chi(a),$$

„ubi ponitur:

$$\chi(z)=\frac{z-m_{2n+1}}{\sqrt{-\Delta(z)}}\left(\frac{z-m_{2n+2}}{m_{2n+2}-m_{2n+1}}\right)^n\sqrt{f(m_{2n+2})}.\frac{\psi\left(\sqrt{\frac{z-m_{2n+1}}{z-m_{2n+2}}}\right)-\psi\left(-\sqrt{\frac{z-m_{2n+1}}{z-m_{2n+1}}}\right)}{2\sqrt{\frac{z-m_{2n+1}}{z-m_{2n+2}}}}.$$

Si in utroque theoremate ponitur $a=a'=\sqrt{m_{2n+2}}$, atque loco functionis $\Phi(z)$ vel expressio: $\sqrt{m_{2n+2}}.(z-a)\Phi_1(z)$ vel $\sqrt{m_{2n+2}}.\Phi_2(z)$, ubi $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ functiones integras denotant, quarum posterioris gradus numerum n haud superat, dum prioris gradus numerum $2n-1$ aequat, pro valore ipsius m_{2n+2} infinite magno, prodeunt theoremata duo de tribus *functionum Abelianarum* $(n-1)$ti ordinis generibus principalibus.

Theorema VII.

„Posito:

$$(y-m_1)(y-m_2)\ldots(y-m_{2n+1})=D(y),$$

$$\sum_1^n {}^\nu \left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu} \frac{\varepsilon_\nu\, dy}{\sqrt{D(y)}}\right) = 2u,$$

$$\sum_1^n {}^\nu \left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu} \frac{\varepsilon_\nu\, y\, dy}{\sqrt{D(y)}}\right) = 2u',$$

. . . .

$$\sum_1^n {}^\nu \left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu} \frac{\varepsilon_\nu\, y^{n-1}\, dy}{\sqrt{D(y)}}\right) = 2u^{(n-1)},$$

$$\sum_1^n {}^\nu \left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu} \frac{\varepsilon_\nu\, \Phi_1(y)\, dy}{\sqrt{D(y)}}\right) = 2E(u, u', \dots u^{(n-1)}),$$

$$\sum_1^n {}^\nu \left(\int_{m_{2\nu-1}}^{v_\nu} \frac{\varepsilon_\nu\, \Phi_2(y)\, dy}{(y-\alpha)\sqrt{D(y)}}\right) = 2G(u, u', \dots u^{(n-1)}),$$

„integralium limites $v_1, v_2, \dots v_n$ argumentorum: $u, u', \dots u^{(n-1)}$ tales functiones „sunt, ut brevitatis gratia posito:

$$\lambda_\varkappa(u, u', \dots u^{(n-1)}) = (m_\varkappa - v_1)(m_\varkappa - v_2) \dots (m_\varkappa - v_n),$$

„ubi $\varkappa$ denotat quemlibet numerorum $1, 2, \dots 2n-1$, habeantur hae formulae:

$$\lambda_{2n+1}(u, u', \dots u^{(n-1)})\, \lambda_{2n+1}(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)})$$
$$= (m_{2n+1}-m_1)(m_{2n+1}-m_2) \dots (m_{2n+1}-m_{2n}),$$
$$\lambda_h(u, u', \dots u^{(n-1)}).\, \lambda_h(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)})$$
$$= (m_{2n+1}-m_h) \sum_1^n {}^\nu \left(\frac{\varepsilon_\nu \sqrt{\Delta(v_\nu)}}{m_{2n+1}-v_\nu} \cdot \frac{\pi(m_h)}{\pi'(v_\nu)(m_h - v_\nu)}\right),$$

„quantitatibus $M, M', \dots M^{(n-1)}$ eos argnmentorum valores designantibus, „quibus ipsa pro:

$$v_1 = m_2, \quad v_2 = m_4, \quad \dots \quad v_n = m_{2n},$$

„gaudent; nec non hae aequationes memorabiles:

$$E(u, u', \dots u^{(n-1)}) + E(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}) - E(M, M', \dots M^{(n-1)})$$
$$= -\left[\frac{\Phi_1(z)}{\sqrt{-D(z)}}\left(\chi(z) - \frac{\chi(z)^3}{3} + \frac{\chi(z)^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{\chi(z)^{2n-1}}{2n-1}\right]_{z^{-1}},$$
$$G(u, u', \dots u^{(n-1)}) + G(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)}) - G(M, M', \dots M^{(n-1)})$$
$$= +\frac{\Phi_2(\alpha)}{\sqrt{-D(\alpha)}} \operatorname{arc\,tang} \chi(\alpha),$$

„ubi functio $\chi(z)$ determinatur formula:

$$\chi(z) =$$
$$-\frac{(z-m_{2n+2})F(z)}{\sqrt{-D(z)}} \sum_1^n {}^\nu \left(\frac{\varepsilon_\nu}{(z-m_{2\nu-1})F'(m_{2\nu-1})} \sqrt{\frac{\lambda_{2\nu-1}(u, u', \dots u^{(n-1)})\, \lambda_{2\nu-1}(M-u, M'-u', \dots M^{(n-1)}-u^{(n-1)})}{m_{2n+1}-m_{2\nu-1}}}\right).“$$

Theorema VIII.

„Iisdem denotationibus adhibitis nec non brevitatis gratia introducta functione:

$$\psi(z) = (z-\varepsilon_n\sqrt{(m_{2n+1}-m_{2n})})\,(z+\varepsilon_{n-1}\sqrt{(m_{2n+1}-m_{2n-2})})\dots(z+(-1)^n\,\varepsilon_1\sqrt{(m_{2n+1}-m_2)})$$
$$\times(z+\varepsilon_n\sqrt{(m_{2n+1}-m_{2n-1})})(z-\varepsilon_{n-1}\sqrt{(m_{2n+1}-m_{2n-3})})\dots(z+(-1)^{n-1}\varepsilon_1\sqrt{(m_{2n+1}-m_1)}),$$

„ubi signa ε_1, ε_2, ... ε_n conditioni

$$\psi(1) > \psi(-1)$$

„satisfaciunt, habentur aequationes notatu dignae:

$$\lambda_{2n+1}(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}) = \sqrt{f(m_{2n+1})},$$
$$\lambda_{2\nu}(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}) = \tfrac{1}{2}\psi((-1)^{n-\nu-1}\varepsilon_\nu\sqrt{(m_{2n+1}-m_{2\nu})}),$$
$$\lambda_{2\nu-1}(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}) = \tfrac{1}{2}\psi((-1)^{n-\nu}\varepsilon_\nu\sqrt{(m_{2n+1}-m_{2\nu-1})}),$$
$$2E(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}) - E(M, M', \dots M^{(n-1)})$$
$$= -\left[\frac{\Phi_1(z)}{\sqrt{-D(z)}}\left(\chi(z) - \frac{\chi(z)^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{\chi(z)^{2n-1}}{2n-1}\right)\right]_{z=1},$$
$$2G(\tfrac{1}{2}M, \tfrac{1}{2}M', \dots \tfrac{1}{2}M^{(n-1)}) - G(M, M', \dots M^{(n-1)}) = +\frac{\Phi_1\alpha}{\sqrt{-D(\alpha)}}\operatorname{arc\,tang}\chi(\alpha),$$

„ubi functio $\chi(z)$ determinatur formula:

$$\chi(z) = (-1)^n\frac{z-m_{2n+1}}{\sqrt{-D(z)}}\cdot\frac{\psi(\sqrt{-1}\sqrt{(z-m_{2n+1})}) - \psi(-\sqrt{-1}\sqrt{(z-m_{2n+1})})}{2\sqrt{-1}\sqrt{(z-m_{2n+1})}}.$$

14.

Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.

(Auctore *C. G. J. Jacobi*, prof. ord.)

(Cont. dissert. No. 16. tom. XXVII. fasc. III. et No. 11. tom. XXIX. fasc. III.)

Motus puncti versus duo centra fixa secundum legem *Neutonianam* attracti.

§. 26.

Punctum inter utrumque centrum medium sumatur pro initio Coordinatarum, recta centra iungens pro axe Coordinatarum x, sit porro y distantia mobilis ab hoc axe. Si massae centrorum sunt m et m' atque a semidistantia centrorum, secundum antecedentia valebunt inter x et y aequationes differentiales sequentes,

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{m(x-a)}{\{(x-a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'(x+a)}{\{(x+a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{my}{\{(x-a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'y}{\{(x+a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\alpha\alpha}{y^3}, \end{cases}$$

designante α Constantem Arbitrariam. Porro angulus rotationis plani per axem et mobile ducti datur formula,

$$2.\quad df = \frac{\alpha\, dt}{yy}.$$

A principio conservationis vis vivae integrale suppeditatur hoc,

$$3.\quad \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y') = \frac{m}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{m'}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha\alpha}{2y^2} + \beta,$$

designante β alteram Constantem Arbitrariam. Integrale *Eulerianum* invenitur deducendo ex aequationibus (1.) sequentem,

$$d(xy'-yx') = -\frac{m a y\, dt}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{m' a y\, dt}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha^2 x\, dt}{y^3},$$

unde fit

$$\tfrac{1}{2}d.(xy'-yx')^2 = -\frac{may\{(x-a)dy-ydx\}}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{m'ay\{(x+a)dy-ydx\}}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\frac{\alpha^2 x(xdy-ydx)}{y^3}-\frac{ma^2ydy}{\{(x-a)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{m'a^2ydy}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc aequationem (1.) alteram substituendo fit

$$\tfrac{1}{2}d.(xy'-yx')^2 = -\tfrac{1}{2}ma\frac{d.\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+\tfrac{1}{2}m'a\frac{d.\left(\frac{y}{x+a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{y}{x+a}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha^2 d.\left(\frac{x}{y}\right)^2+a^2y'dy'-\alpha^2a^2\frac{dy}{y^3}.$$

Cuius aequationis termini singuli cum differentialia completa sint, obtinetur Integrale,

$$4.\qquad (xy'-yx')^2+\text{Const.}$$
$$=\frac{2ma(x-a)}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2m'a(x+a)}{\{(x+a^2)+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\frac{\alpha^2x^2}{y^2}+a^2y'^2+\frac{\alpha^2a^2}{y^2}.$$

Si ponitur

$$5.\quad\begin{cases} L=\dfrac{2m}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2m'}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\alpha\alpha}{y^2}+2\beta, \\ M=\dfrac{2ma(x-a)}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{2m'a(x+a)}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\alpha^2}{y^2}(a^2-x^2+y^2)+\gamma,\end{cases}$$

duo Integralia inventa evadunt

$$6.\quad x'x'+y'y' = L,\quad (xy'-yx')^2-a^2y'y' = M,$$

sive

$$f=\beta,\quad \varphi=\gamma,$$

siquidem statuitur

$$f=\tfrac{1}{2}(x'x'+y'y')-\tfrac{1}{2}L+\beta,$$
$$\varphi=(xy'-yx')^2-a^2y'y'-M+\gamma.$$

Si duorum Integralium ope et x' et y' per x et y exhibentur, secundum principium ultimi multiplicatoris obtinetur tertium Integrale,

$$\int\frac{y'dx-x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial\varphi}{\partial x'}}=\text{Const.}$$

At cum et L et M ab ipsis x' et y' vacua sint, fit

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=x',\qquad \frac{\partial f}{\partial y'}=y',$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}=-2y(xy'-yx'),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y'}=2x(xy'-yx')-2a^2y'.$$

Quibus formulis substitutis eruitur

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = 2(xx'+yy')(xy'-yx')-2a^2x'y'$$
$$= -2\{xy(x'x'-y'y')+(aa-xx+yy)x'y'\}.$$

Unde tertium Integrale evadit

$$7.\quad \int\frac{y'dx-x'dy}{xy(x'x'-y'y')+(aa-xx+yy)x'y'} = \varepsilon,$$

designante ε Constantem Arbitrariam.

In formula antecedente expressio sub integrationis signo posita, quantitatum x' et y' valoribus substitutis, evadere debet differentiale completum. Qui valores ut eruantur et commoda substitutio fiat, adhibeo methodum in calculis algebraicis usitatam, videlicet addo aequationes (6.), altera multiplicata factore λ, quem hac conditione determino, ut aequationis provenientis pars laeva evadat quadratum functionis ipsorum x' et y' linearis. Ea ratione venit

$$8.\quad (x^2-a^2+\lambda)y'y'-2xyx'y'+(y^2+\lambda)x'x' = M+\lambda L,$$

quantitate λ determinata per aequationem

$$9.\quad 0 = (\lambda+yy)(\lambda+xx-aa)-xxyy$$
$$= \lambda^2+\lambda(xx+yy-aa)-aayy.$$

Huius aequationis quadraticae radices vocemus λ' et λ'', erit

$$10.\quad aayy = -\lambda'\lambda'',\quad xx+yy = aa-\lambda'-\lambda'',\quad aaxx = (aa-\lambda')(aa-\lambda'').$$

Hinc quadrata distantiarum puncti mobilis a centris attractionum fiunt

$$(x\pm a)^2+y^2 = 2a^2-\lambda'-\lambda''\pm 2\sqrt{((aa-\lambda')(aa-\lambda''))},$$

ideoque ipsae distantiae

$$11\quad \{(x\pm a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(aa-\lambda')}\pm\sqrt{(aa-\lambda'')}.$$

Porro fit

$$\lambda'-aa\pm ax = -\sqrt{(aa-\lambda')}\{\sqrt{(aa-\lambda')}\mp\sqrt{(aa-\lambda'')}\},$$
$$\lambda''-aa\pm ax = \pm\sqrt{(aa-\lambda'')}\{\sqrt{(aa-\lambda')}\mp\sqrt{(aa-\lambda'')}\},$$

ideoque

$$12.\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda'-aa\pm ax}{\{(x\mp a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{(aa-\lambda')}, \\[2ex] \dfrac{\lambda''-aa\pm ax}{\{(x\mp a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{(aa-\lambda'')}. \end{cases}$$

Si has formulas substituimus in (5.), sequitur, quantitatem $M+\lambda'L$ solius λ', quantitatem $M+\lambda''L$ solius λ'' functionem esse. Etenim si advocamus formulas

e (10.) fluentes

$$13.\quad \begin{cases} \dfrac{a^2-x^2-\lambda'}{y^2} = \dfrac{y^2+\lambda''}{y^2} = 1-\dfrac{a^2}{\lambda'}, \\ \dfrac{a^2-x^2-\lambda''}{y^2} = \dfrac{y^2+\lambda'}{y^2} = 1-\dfrac{a^2}{\lambda''}, \end{cases}$$

e (5.), (12.), (13.) eruitur

$$14.\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(M+\lambda' L) = -(m+m')\sqrt{(aa-\lambda')}+\alpha\alpha\left(1-\dfrac{aa}{2\lambda'}\right)+\beta\lambda'+\tfrac{1}{2}\gamma, \\ \tfrac{1}{2}(M+\lambda'' L) = \quad (m-m')\sqrt{(aa-\lambda'')}+\alpha\alpha\left(1-\dfrac{aa}{2\lambda''}\right)+\beta\lambda''+\tfrac{1}{2}\gamma. \end{cases}$$

Ipsae quibus x' et y' determinantur aequationes e (8.) prodeunt substituendo ipsius λ valores λ' et λ''. Quae aequationes per $-a^2$ multiplicatae, formulis (10.) substitutis, evadunt

$$\lambda''(a^2-\lambda')y'y'+2\sqrt{(-\lambda'\lambda''(a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-\lambda'(a^2-\lambda'')x'x' = -a^2(M+\lambda' L),$$

$$\lambda'(a^2-\lambda'')y'y'+2\sqrt{(-\lambda'\lambda''(a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-\lambda''(a^2-\lambda')x'x' = -a^2(M+\lambda'' L),$$

sive extractis radicibus,

$$15.\quad \begin{cases} \sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.y'+\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.x' = a\sqrt{-(M+\lambda' L)}, \\ \sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.y'-\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.x' = a\sqrt{(M+\lambda'' L)}. \end{cases}$$

Easdem aequationes (10.) differentiando sequitur

$$2a(y'dx-x'dy) = y'd.\sqrt{((a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-x'd.\sqrt{(-\lambda'\lambda'')}$$
$$= \frac{-d\lambda'}{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda'))}}\{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.y'-\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.x'\}$$
$$\frac{-d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda''))}}\{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.y'+\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.x'\}.$$

Unde formulas (15.) substituendo prodit:

$$16.\quad 2(y'dx-x'dy) = -\frac{\sqrt{(M+\lambda'' L)}.d\lambda'}{\sqrt{(-\lambda'(aa-\lambda'))}}-\frac{\sqrt{-(M+\lambda' L)}.d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(aa-\lambda''))}}.$$

Aequationibus (15.) in se ductis et rursus (10.) advocatis eruitur

$$17.\quad xy(y'y'-x'x')+(x^2-y^2-a^2)x'y' = \sqrt{(-(M+\lambda' L)(M+\lambda'' L))}.$$

Per hanc formulam ubi dividimus antecedentem (16.), prodit

$$18.\quad \frac{y'dx-x'dy}{xy(x'x'-y'y')+(a^2-x^2+y^2)x'y'}$$
$$= \frac{-d\lambda'}{2\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}}+\frac{d\lambda''}{2\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}}.$$

Hanc supra vidimus expressionem secundum principium ultimi Multiplicatoris fieri debere differentiale completum. Ac revera, quantitatum $\frac{1}{2}(M+\lambda' L)$ et $\frac{1}{2}(M+\lambda'' L)$ valoribus (14.) substitutis, in ea expressione differentiale $d\lambda'$ per solius λ', differentiale $d\lambda''$ per solius λ'' functionem multiplicatum reprehenditur. Unde, formula (18.) substituta in (7.), tertium integrale per duas Quadraturas obtinetur.

Si formulas adiicere placet, quibus t et f per λ' et λ'' solarum ope Quadraturarum determinantur, differentietur aequatio (9.), posito $\lambda = \lambda'$, unde prodit

$$0 = (\lambda'-\lambda'')d\lambda' + 2\lambda' x\, dx - 2(a^2-\lambda')y\, dy$$
$$= (\lambda'-\lambda'')d\lambda' - \frac{2}{a}\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda'))}\{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}\,dx + \sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}\,dy\}$$
$$= (\lambda'-\lambda'')d\lambda' + 2\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}\,.\,dt.$$

Hinc, si aequationem differentialem

$$19.\qquad \frac{d\lambda'}{\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} = \frac{d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}}$$

advocamus, obtinemus

$$20.\qquad dt = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda'}\,d\lambda'}{\sqrt{((a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda''}\,d\lambda''}{\sqrt{((a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}},$$

$$21.\qquad df = \frac{-\alpha a^2\, dt}{\lambda'\lambda''}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha a^2\left\{-\frac{1}{\sqrt{\lambda'^3}}\cdot\frac{d\lambda'}{\sqrt{((a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda''^3}}\cdot\frac{d\lambda''}{\sqrt{((a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}}\right\}.$$

His formulis videmus, ad variabilium t et f valores per Quadraturas inveniendos non opus esse ut antea variabilium λ' et λ'' altera per alteram expressa habeatur.

De corporis solidi ictu impulsi rotatione circa punctum fixum.

§. 27.

Exemplum applicationis principii ultimi multiplicatoris ad motum non liberum suppeditet rotatio solidi circa punctum eius fixum, si corpus solo ponitur ictu impulsum esse, nulla accedente vi acceleratrice. Valet pro eo motu principium conservationis virium vivarum nec non cuiuslibet plani respectu principium conservationis arearum. Quibus si additur principium ultimi multiplicatoris, per sola principia generalia problema olim difficillimum ad Quadraturas reducetur.

Sint ξ, v, ζ Coordinatae orthogonales ad axes relatae in solido fixos, in spatio mobiles, quorum initium punctum fixum sit circa quod solidum rotatur. Sint x, y, z Coordinatae orthogonales eodem initio gaudentes, ad axes in spatio fixos relatae. In aequationibus, quae inter utrasque Coordinatas locum habent,

1. $x = \alpha\xi+\beta v+\gamma\zeta, \quad y = \alpha_1\xi+\beta_1 v+\gamma_1\zeta, \quad z = \alpha_2\xi+\beta_2 v+\beta_2\zeta,$

sunt ξ, v, ζ Constantes, novem Coëfficientes α, β etc. variabiles, inter quas relationes notae intercedunt, quibus illae ad quantitates tres revocari possunt *). Adhibita differentialium notatione *Lagrangiana* e (1.) sequitur

$$x' = \alpha'\xi+\beta' v+\gamma'\zeta, \quad y' = \alpha_1'\xi+\beta_1' v+\gamma_1'\zeta, \quad z' = \alpha_2'\xi+\beta_2' v+\gamma_2'\zeta.$$

Ponamus

$$\begin{aligned}
\beta\gamma'+\beta_1\gamma_1'+\beta_2\gamma_2' &= -\{\gamma\beta'+\gamma_1\beta_1'+\gamma_2\beta_2'\} = a,\\
\gamma\alpha'+\gamma_1\alpha_1'+\gamma_2\alpha_2' &= -\{\alpha\gamma'+\alpha_1\gamma_1'+\alpha_2\gamma_2'\} = b,\\
\alpha\beta'+\alpha_1\beta_1'+\alpha_2\beta_2' &= -\{\beta\alpha'+\beta_1\alpha_1'+\beta_2\alpha_2'\} = c;
\end{aligned}$$

ex aequationibus

$$\alpha\alpha'+\alpha_1\alpha_1'+\alpha_2\alpha_2' = 0, \quad \beta\alpha'+\beta_1\alpha_1'+\beta_2\alpha_2' = -c, \quad \gamma\alpha'+\gamma_1\alpha_1'+\gamma_2\alpha_2' = b,$$

quarum prima e formula $\alpha\alpha+\alpha_1\alpha_1+\alpha_2\alpha_2 = 1$ sequitur, fluit

$$\alpha' = -\beta c+\gamma b, \quad \alpha_1' = -\beta_1 c+\gamma_1 b, \quad \alpha_2' = -\beta_2 c+\gamma_2 b,$$

eodemque modo obtinetur

$$\begin{aligned}
\beta' &= -\gamma a+\alpha c, & \gamma' &= -\alpha b+\beta a,\\
\beta_1' &= -\gamma_1 a+\alpha_1 c, & \gamma_1' &= -\alpha_1 b+\beta_1 a,\\
\beta_2' &= -\gamma_2 a+\alpha_2 c, & \gamma_2' &= -\alpha_2 b+\beta_2 a.
\end{aligned}$$

Quibus valoribus substitutis eruitur,

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha(cv-b\zeta)+\beta(a\zeta-c\xi)+\gamma(b\xi-av),\\
y' &= \alpha_1(cv-b\zeta)+\beta_1(a\zeta-c\xi)+\gamma_1(b\xi-av),\\
z' &= \alpha_2(cv-b\zeta)+\beta_2(a\zeta-c\xi)+\gamma_2(b\xi-av).
\end{aligned}$$

---

*) Formulae (1.) si Coordinatarum orthogonalium transformationem exprimunt, fit $\beta'\gamma''-\gamma'\beta'' = \pm\alpha$ etc., $\alpha(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+\beta(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')+\gamma(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'') = \pm 1$. At in hac rotationis quaestione, iam alibi adnotavi, semper signum $+$ sumendum esse. Ponamus enim inter binorum corporum puncta correlationem dari talem, ut alterius corporis puncto, cuius Coordinatae sunt ξ, v, ζ, respondeat alterius corporis punctum cuius Coordinatae ad *eosdem* axes relatae valoribus x, y, z gaudent: prout in illis formulis signum $+$ aut $-$ locum habet, erunt corpora aut *congruentia* aut uti dicitur *symmetrica*. Casu posteriore autem fieri non potest ut alterum corpus in alterius positione collocetur, neque igitur rotatione alterum in alterius locum pervenire potest.

Unde sequitur

$$2.\quad x'x'+y'y'+z'z' = (cv-b\zeta)^2+(a\zeta-c\xi)^2+(b\xi-av)^2.$$

Porro e (1.) proveniunt formulae,

$$\begin{array}{lll} \alpha_2 y-\alpha_1 z=\beta\zeta-\gamma v, & \alpha z-\alpha_2 x=\beta_1\zeta-\gamma_1 v, & \alpha_1 x-\alpha y=\beta_2\zeta-\gamma_2 v, \\ \beta_2 y-\beta_1 z=\gamma\xi-\alpha\zeta, & \beta z-\beta_2 x=\gamma_1\xi-\alpha_1\zeta, & \beta_1 x-\beta y=\gamma_2\xi-\alpha_2\zeta, \\ \gamma_2 y-\gamma_1 z=\alpha v-\beta\xi, & \gamma z-\gamma_2 x=\alpha_1 v-\beta_1\xi, & \gamma_1 x-\gamma y=\alpha_2 v-\beta_2\xi. \end{array}$$

Unde substitutis ipsorum x', y', z' valoribus eruitur,

$$3.\quad \begin{cases} yz'-zy' = (\beta\zeta-\gamma v)(cv-b\zeta)+(\gamma\xi-\alpha\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha v-\beta\xi)(b\xi-av), \\ zx'-xz' = (\beta_1\zeta-\gamma_1 v)(cv-b\zeta)+(\gamma_1\xi-\alpha_1\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha_1 v-\beta_1\xi)(b\xi-av), \\ xy'-yx' = (\beta_2\zeta-\gamma_2 v)(cv-b\zeta)+(\gamma_2\xi-\alpha_2\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha_2 v-\beta_2\xi)(b\xi-av). \end{cases}$$

Axes Coordinatarum ξ, v, ζ semper ita in ipso solido disponere licet ut, designante dm solidi elementum cuius Coordinatae sunt ξ, v, ζ, sit

$$S.v\zeta\, dm = 0, \qquad S.\zeta\xi\, dm = 0, \qquad S.\xi v\, dm = 0,$$

summis ad omnia elementa materialia corporis extensis. Unde ponendo

$$A = S(vv+\zeta\zeta)dm, \qquad B = S(\zeta\zeta+\xi\xi)dm, \qquad C = S(\xi\xi+vv)dm,$$

fit e (2.) et (3.),

$$4.\quad T = \tfrac{1}{2}S\{x'x'+y'y'+z'z'\}dm = \tfrac{1}{2}\{Aaa+Bbb+Ccc\},$$

$$5.\quad \begin{cases} L = S(yz'-zy')dm = -\{\alpha.Aa+\beta.Bb+\gamma.Cc\}, \\ M = S(zx'-xz')dm = -\{\alpha_1.Aa+\beta_1.Bb+\gamma_1.Cc\}, \\ N = S(xy'-yx')dm = -\{\alpha_2.Aa+\beta_2.Bb+\gamma_2.Cc\}. \end{cases}$$

Quibus in formulis secundum principia conservationis virium vivarum et arearum quatuor quantitates T, L, M, N aequantur Constantibus Arbitrariis.

Novem Coëfficientes α, β etc. per tres angulos q_1, q_2, q_3 exprimamus ope formularum notissimarum, quas olim *Eulerus* in *Introductione in Anal. Infin.* dedit,

$$6.\quad \begin{cases} \alpha = \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3, \\ \alpha_1 = \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 - \sin q_2 \cos q_3, \\ \alpha_2 = -\sin q_1 \sin q_3; \\ \beta = \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 - \cos q_2 \sin q_3, \\ \beta_1 = \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 + \sin q_2 \sin q_3, \\ \beta_2 = -\sin q_1 \cos q_3; \\ \gamma = \sin q_1 \sin q_2, \\ \gamma_1 = \sin q_1 \cos q_2, \\ \gamma_2 = \cos q_1. \end{cases}$$

E quibus formulis sequitur:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -\gamma \sin q_3 . q_1' + \alpha_1 . q_2' + \beta . q_3', \\
\alpha_1' &= -\gamma_1 \sin q_3 . q_1' - \alpha . q_2' + \beta_1 . q_3', \\
\alpha_2' &= -\gamma_2 \sin q_3 . q_1' \qquad\qquad + \beta_2 . q_3', \\
\beta' &= -\gamma \cos q_3 . q_1' + \beta_1 . q_2' - \alpha . q_3', \\
\beta_1' &= -\gamma_1 \cos q_3 . q_1' - \beta . q_2' - \alpha_1 . q_3', \\
\beta_2' &= -\gamma_2 \cos q_3 . q_1' \qquad\qquad - \alpha_2 . q_3', \\
\gamma' &= \cos q_1 \sin q_2 . q_1' + \gamma_1 . q_2', \\
\gamma_1' &= \cos q_1 \cos q_2 . q_1' - \gamma . q_2', \\
\gamma_2' &= -\sin q_1 . q_1'.
\end{aligned}$$

Unde eruitur

$$7. \quad \begin{cases} a = \quad \beta\gamma' + \beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' = \quad \cos q_3 . q_1' - \sin q_1 \sin q_3 . q_2', \\ b = -\{\alpha\gamma' + \alpha_1\gamma_1' + \alpha_2\gamma_2'\} = -\sin q_3 . q_1' - \sin q_1 \cos q_3 . q_2', \\ c = \quad \alpha\beta' + \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' = \quad \cos q_1 . q_1' - q_3'. \end{cases}$$

Quas quantitates in aequatione (4.) substituendo evadit virium vivarum semisumma T quantitatum q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3' functio. Quam ipsorum q_1', q_2', q_3' respectu differentiando prodit

$$8. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1 = \cos q_3 . Aa - \sin q_3 . Bb, \\ \dfrac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2 = -\sin q_1 \sin q_3 . Aa - \sin q_1 \cos q_3 . Bb + \cos q_1 . Cc, \\ \dfrac{\partial T}{\partial q_3'} = p_3 = -Cc. \end{cases}$$

Hae quantitates autem aequantur sequentibus,

$$9. \quad \begin{cases} p_1 = -L \cos q_2 + M \sin q_2, \\ p_2 = -N, \\ p_3 = (L \sin q_2 + M \cos q_2) \sin q_1 + N \cos q_1, \end{cases}$$

sicuti patet substituendo quantitatum L, M, N expressiones (5.) et Coëfficientium α, β etc. valores (6.). Ponendo

$$10. \quad \frac{p_3 \cos q_1 + p_2}{\sin q_1} = u,$$

e formulis (8.) fluunt sequentes,

$$\begin{aligned}
Aa &= \quad \cos q_3 . p_1 - \sin q_3 . u, \\
Bb &= -\sin q_3 . p_1 - \cos q_3 . u, \\
Cc &= -p_3.
\end{aligned}$$

Quibus formulis quadratis ac respective per A, B, C divisis consummatisque, obtinetur post faciles reductiones,

$$11. \quad 2T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)(p_1p_1+uu)+\frac{1}{C}p_3p_3$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\{(p_1p_1-uu)\cos 2q_3-2p_1u\sin 2q_3\}.$$

Cum T, L, M, N Constantibus aequentur, per quatuor aequationes (9.) et (11.) sex variabiles q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 ad duas revocare licet. Quomodocunque hae duae variabiles eligantur, aequatio differentialis primi ordinis inter eas locum habens principio ultimi multiplicatoris ad Quadraturas revocabitur. At duas variabiles eligere convenit tales, per quas reliquae commode exprimantur, quales sunt p_1 et p_3. Cum solidum *nullis* viribus accelatricibus sollicitetur, aequationum dynamicarum forma tertia §. 24. tradita suppeditat

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial T}{dq_3},$$

unde aequatio differentialis inter p_1 et p_3, quae integranda restat, fit

$$12. \quad \frac{\partial T}{\partial q_3}dp_1-\frac{\partial T}{\partial q_1}dp_3 = 0.$$

Partibus dextris aequationum (9.) et (11.) in laevam translatis, aequationem (11.) denotemus per $\Pi = 0$, aequationes (9.) per $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$, erit secundum theoremata generalia §§. 24. et 3. tradita aequationis differentialis (12.) Multiplicator

$$\mu = \frac{\Sigma\pm\dfrac{\partial \Pi}{\partial T}\dfrac{\partial \Pi_2}{\partial N}\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial L}\dfrac{\partial \Pi_3}{\partial M}}{\Sigma\pm\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_3}\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial q_2}\dfrac{\partial \Pi_2}{\partial p_2}\dfrac{\partial \Pi_3}{\partial q_1}}.$$

Cuius fractionis ipsorumque $\frac{\partial T}{\partial q_3}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ valores sic determino.

Ipsa T non nisi in Π, ipsa N nonnisi in Π_2 invenitur, porro fit $\frac{\partial \Pi}{\partial T} = 2$, $\frac{\partial \Pi_2}{\partial N} = 1$, unde numerator fractionis antecedentis eruitur

$$2\Sigma\pm\frac{\partial \Pi_1}{\partial L}\cdot\frac{\partial \Pi_3}{\partial M} = -2\sin q_1.$$

E variabilibus p_2, q_1, q_2, q_3 functio Π_2 unicam p_2 implicat, functio Π_1 unicam q_2, functio Π_3 solas q_1 et q_2; porro fit $\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 1$, unde fractionis antecedentis denominator evadit,

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial \Pi_3}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial q_3}.$$

Fit autem

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_2} = -\{L\sin q_2 + M\cos q_2\}$$

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial q_1} = -\{L\sin q_2 + M\cos q_2\}\cos q_1 + N\sin q_1 = -u,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = 2\frac{\partial T}{\partial q_3}.$$

Unde aequationis differentialis (12.) Multiplicator fit

$$13. \quad \mu = \frac{\sin q_1}{(L\sin q_2 + M\cos q_2)u}\cdot\frac{1}{\frac{\partial T}{\partial q_3}}.$$

At e (9.) et (10.), brevitatis causa posito

$$h = LL + MM + NN,$$

sequitur

$$14. \quad \begin{cases} L\sin q_2 + M\cos q_2 = \sqrt{(LL+MM-p_1p_1)} = \sqrt{(h-NN-p_1p_1)}, \\ u = (L\sin q_2 + M\cos q_2)\cos q_1 - N\sin q_1 = \sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}, \\ (h-p_1p_1)\sin q_1 = (L\sin q_2 + M\cos q_2)p_3 - Nu. \end{cases}$$

Quibus in ipsius μ valore (13.) substitutis sequitur

$$15. \quad \mu.\frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{1}{h-p_1p_1}\left\{\frac{p_3}{\sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}} - \frac{N}{\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}\right\}.$$

Restat ut quantitates $\frac{\partial T}{\partial q_3}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ solis p_1 et p_3 exhibeantur.

Quantitatis u valor (10.) cum quantitatem q_3 non implicet, e (11.) sequitur

$$16. \quad 2\frac{\partial T}{\partial q_3} = \left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\{(p_1p_1-uu)\sin 2q_3 + 2p_1u\cos 2q_3\}.$$

Eius quantitatis quadratum e (11.) fit

$$\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)^2(p_1p_1+uu)^2 - \left\{4T - \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)(p_1p_1+uu) - \frac{2}{C}p_3p_3\right\}^2.$$

Unde ponendo

$$K = 2T - \frac{1}{A}(p_1p_1+uu) - \frac{1}{C}p_3p_3,$$

$$K_1 = \frac{1}{B}(p_1p_1+uu) + \frac{1}{C}p_3p_3 - 2T,$$

sive

$$17. \quad \begin{cases} K = 2T - \frac{h}{A} + \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)p_3p_3, \\ K_1 = \frac{h}{B} - 2T + \left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)p_3p_3, \end{cases}$$

sequitur

$$18. \quad \frac{\partial T}{\partial q_3} = -\sqrt{(KK_1)}.$$

Cum elementum dt natura temporis numquam regredientis semper positivum sit, docet formula $dp_3 = -\frac{\partial T}{\partial q_3}dt$, radicale $\sqrt{(KK_1)}$ negativo signo afficiendum esse, uti in (18.), quamdiu p_3 crescat, positivo quam diu p_3 decrescat.

Ipsum $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ e (11.) eruimus

$$19. \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)u+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)(u\cos 2q_3+p_1\sin 2q_3)\right\}.$$

Fit autem e (10.) et (9.),

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{p_3+p_2\cos q_1}{\sin q_1^2} = -\frac{L\sin q_2+M\cos q_2}{\sin q_1}$$

ideoque e (13.) et (18.) obtinetur

$$20. \quad \mu\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{1}{u\frac{\partial T}{\partial q_3}} = \frac{1}{u\sqrt{(KK_1)}}.$$

Porro ex aequationibus (11.), (16.), (18.) fit

$$4T-\frac{2}{C}p_3p_3=\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\{(uu-p_1p_1)\cos 2q_3+2p_1u\sin 2q_3\}+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)(p_1p_1+uu),$$

$$2\sqrt{(KK_1)} = \left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\{2p_1u\cos 2q_3+(uu-p_1p_1)\sin 2q_3\},$$

unde

$$\frac{u\left(4T-\frac{2}{C}p_3p_3\right)-2p_1\sqrt{(KK_1)}}{uu+p_1p_1} = \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)u+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)(u\cos 2q_3+p_1\sin 2q_3).$$

Hinc valore $uu+p_1p_1 = h-p_3p_3$ substituto, e (19.) et (20.) eruitur,

$$21. \quad \mu\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{u\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)-p_1\sqrt{(KK_1)}}{(h-p_3p_3)u\sqrt{(KK_1)}}.$$

Unde iam aequatio differentialis

$$\mu\frac{\partial T}{\partial q_3}dp_1-\mu\frac{\partial T}{\partial q_1}dp_3 = 0,$$

quae per se integrabilis esse debet, per formulas (15.) et (21.) evadit

$$22.\quad 0 = -\frac{N\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-NN-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{p_3\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-p_1p_1-p_3p_3)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{p_1\,dp_3}{(h-p_3p_3)(h-p_1p_1-p_3p_3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)dp_3}{(h-p_3p_3)\sqrt{(KK_1)}}.$$

Quatuor terminorum dextrae partis primum et quartum differentialia completa esse patet, cum primus solam p_1, quartus secundum (17.) solam p_3 implicet. Ponendo $p_1 = \sqrt{(h-NN)}.\sin\varphi$, primus terminus fit

$$\frac{-N\,d\varphi}{h\cos\varphi^2 + N^2\sin\varphi^2} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\,d.\,\mathrm{arc\,tang}\frac{N\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\sqrt{h}},$$

unde valorem $\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{p_1}{\{h-NN-p_1p_1\}^{\frac{1}{2}}}$ restituendo evadit primus terminus

$$23.\quad \frac{-N\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-NN-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{h}}\,d.\,\mathrm{arc\,tang}\frac{Np_1}{\sqrt{h}\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}.$$

Si in dextra parte huius formulae in locum Constantis N ponitur quantitas p_3, prodit expressio, utriusque p_1 et p_3 respectu symmetrica; unde si ipsam quoque quantitatem p_3 pro variabili habemus atque utriusque p_1 et p_3 respectu differentiationem instituimus, provenire debet aggregatum duorum terminorum, qui de expressione ad laevam aequationis (23.) posita derivantur, alter ponendo p_3 ipsius N loco, alter ponendo p_1 ipsius N simulque p_3 ipsius p_1 loco; unde de formula (23.) deducitur haec,

$$24.\quad \left(\frac{p_3\,dp_1}{h-p_1p_1} + \frac{p_1\,dp_3}{h-p_3p_3}\right)\frac{1}{(h-p_3p_3-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{h}}\,d.\,\mathrm{arc\,tang}\frac{p_1p_3}{\sqrt{h}\sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}}.$$

Quae docet, aequationis (22.) terminos secundum et tertium iuxta sumtos et ipsos differentiale completum constituere. Formulas (17.), (23.) et (24.) in aequatione differentiali (22.) substituendo et integrando prodit Integrale *quintum*,

$$25.\quad \mathrm{Const.} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{Np_1}{\sqrt{h}\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{h}}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{p_1p_3}{\sqrt{h}\sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}}$$
$$-\int\frac{\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)dp_3}{(h-p_3p_3)\sqrt{\left(2T-\frac{h}{A}+\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)p_3p_3\right)}\sqrt{\left(\frac{h}{B}-2T+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)p_3p_3\right)}}.$$

Tempus t, quod unice determinandum restat, per p_3 exprimitur ope formulae

$$26.\qquad t+\text{Const.} = -\int\frac{dp_3}{\frac{\partial T}{\partial q_3}} = \int\frac{dp_3}{\sqrt{(KK_1)}}$$

$$= \int\frac{dp_3}{\sqrt{\left(2T-\frac{h}{A}+\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)p_3p_3\right)}\sqrt{\left(\frac{h}{B}-2T+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)p_3p_3\right)}}.$$

Ita problema rotationis propositum iam ***sine plani invariabilis usu*** perfecte integratum est.

Quod planum si adhibere placet atque pro Coordinatarum x et y plano sumere, fit

$$L=0,\quad M=0.$$

Unde e (10.), (9.) et (11.) fit $u=-N\sin q_1$, porro

$$p_1=0,\quad p_2=-N=-\sqrt{h},\quad p_3=N\cos q_1,$$

$$\frac{2T}{N^2}=\frac{1}{A}\sin q_1^2\sin q_3^2+\frac{1}{B}\sin q_1^2\cos q_3^2+\frac{1}{C}\cos q_1^2.$$

In dextra parte formulae (25.) terminus secundus evanescit, tertius immutatus manet, primus autem ***indeterminati*** speciem induit. At observo e (9.) haberi

$$\frac{Np_1}{\sqrt{h}.\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}=\frac{N\operatorname{tang}(q_2-\alpha)}{\sqrt{(N^2+L^2+M^2)}},$$

siquidem ponitur $\frac{L}{M}=\operatorname{tang}\alpha$. Hinc si ponimus $L=0$, $M=0$ atque Constantem $\frac{\alpha}{\sqrt{h}}$ Constanti Arbitrariae adiicimus, formula (25.) evadit

$$\text{Const.}=\frac{q_2}{N}+\int\frac{\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)dp_3}{(h-p_3p_3)\sqrt{(KK_1)}},$$

ubi K et K_1 valores (17.) immutatos servant. Nec non temporis t expressio immutata manet

$$t+\text{Const.}=\int\frac{dp_3}{\sqrt{(KK_1)}}.$$

Formularum antecedentium ope variabiles omnes maxima concinnitate exhiberi possunt per functiones ellipticas quarum argumentum tempori t proportionale est. Quod egregie expositum invenis in Commentatione inaugurali Cl. ***A. S. Rueb*** Roterodamensis „de motu gyratorio corporis rigidi", Traiecti ad Rhenum a. 1834 publicata.

In his quaestionibus de rotatione solidi atque de motu puncti versus duo centra fixa attracti data opera analysi usus sum inelegantiori, ut demonstretur, ea problemata ope principii ultimi multiplicatoris etiam absque artificiis, quae non ita in promtu sunt, ad finem perduci posse.

De problemate trium corporum in eadem recta motorum. Substitutio *Euleriana*. Theoremata de viribus homogeneis.

§. 28.

Paucis adhuc agam de tribus corporibus se mutuo attrahentibus in eademque recta motis, quippe quod problema varia de Multiplicatore proposita exemplo illustrandi occasionem commodam praebebit. Ope principii conservationis virium vivarum quaestio in aequationis differentialis secundi ordinis integrationem redit. At *Eulerus* olim absque Integrali ab illo principio suppeditato reductionem problematis ad aequationem differentialem secundi ordinis per substitutionem memorabilem effecit. Cf. *Nov. Comm. Ac. Petrop. Vol. XI. pg. 144 sqq., Nova Acta Vol III. pg. 141 sqq.* Quam rem hic ita repetam ut simul per idoneam variabilium electionem formularum symmetriae consulam.

Sint m, m', m'' tria eiusdem rectae puncta massis m, m', m'' praedita sitque m' inter m et m''. Designante O rectae punctum fixum, ponatur

$$Om = x, \quad Om' = x_1, \quad Om'' = x_2.$$

Si directionem motus, qua punctum a m ad m', a m' ad m'' fertur, positivam, directionem oppositam, qua punctum a m'' ad m', a m' ad m movetur, negativam dicimus, statuo x, x_1, x_2 quantitates positivas aut negativas esse, prout a puncto fixo O ad puncta m, m', m'' directio positiva aut negativa est. Ubi massae m, m', m'' se mutuo secundum legem *Neutonianam* attrahunt, fit

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \quad * \quad + \dfrac{m'}{(x_1-x)^2} + \dfrac{m''}{(x_2-x)^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{-m}{(x_1-x)^2} + \quad * \quad + \dfrac{m''}{(x_2-x_1)^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \dfrac{-m}{(x_2-x)^2} - \dfrac{m'}{(x_2-x_1)^2} \quad * \quad . \end{cases}$$

Trium massarum se mutuo attrahentium centrum gravitatis statuamus in quiete manere, quod salva generalitate licet, ipsumque ponamus centrum gravitatis esse punctum fixum O. Hinc tres quantitates x, x_1, x_2 duabus aliis u et v exprimi possunt per substitutiones lineares,

$$2.\quad x = \alpha u + \beta v, \quad x_1 = \alpha' u + \beta' v, \quad x_2 = \alpha'' u + \beta'' v,$$

in quibus α, β, etc. designant Constantes quascunque satisfacientes duabus aequationibus,

$$3.\quad m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha''=0,\quad m\beta+m'\beta'+m''\beta''=0.$$

Quibus ex arbitrio addamus tertiam,

$$4.\quad m\alpha\beta+m'\alpha'\beta'+m''\alpha''\beta''=0,$$

porro ponamus

$$m\alpha\alpha+m'\alpha'\alpha'+m''\alpha''\alpha''=\mu,$$
$$m\beta\beta+m'\beta'\beta'+m''\beta''\beta''=\nu.$$

Substitutis (2.) in aequationibus differentialibus (1.) et additis tribus aequationibus respective per $m\alpha$, $m'\alpha'$, $m''\alpha''$ vel per $m\beta$, $m'\beta'$, $m''\beta''$ multiplicatis, obtinetur

$$5.\quad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2u}{dt^2}=\dfrac{m'm''(\alpha'-\alpha'')}{(x_2-x_1)^2}+\dfrac{m''m(\alpha-\alpha'')}{(x_2-x)^2}+\dfrac{mm'(\alpha-\alpha')}{(x_1-x)^2}, \\ \nu\dfrac{d^2v}{dt^2}=\dfrac{m'm''(\beta'-\beta'')}{(x_2-x_1)^2}+\dfrac{m''m(\beta-\beta'')}{(x_2-x)^2}+\dfrac{mm'(\beta-\beta')}{(x_1-x)^2}. \end{cases}$$

Sit

$$6.\quad \begin{cases} \alpha''-\alpha'=a,\quad \alpha''-\alpha=a',\quad \alpha'-\alpha=a'', \\ \beta''-\beta'=b,\quad \beta''-\beta=b',\quad \beta'-\beta=b'', \end{cases}$$

unde

$$7.\quad \begin{cases} a+a''=a',\qquad b+b''=b', \\ m'm''.ab+m''m.a'b'+mm'.a''b''=0\,^{*)}; \end{cases}$$

obtinentur inter u et v aequationes differentiales,

$$8.\quad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2u}{dt^2}=-\dfrac{m'm''a}{(au+bv)^2}-\dfrac{m''ma'}{(a'u+b'v)^2}-\dfrac{mm'a''}{(a''u+b''v)^2}, \\ \nu\dfrac{d^2v}{dt^2}=-\dfrac{m'm''b}{(au+bv)^2}-\dfrac{m''mb'}{(a'u+b'v)^2}-\dfrac{mm'b''}{(a''u+b''v)^2}. \end{cases}$$

Aequationibus (8.) respective per $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ multiplicatis et additis factaque integratione obtinetur aequatio, conservationem virium vivarum exprimens,

$$9.\quad \tfrac{1}{2}\left\{\mu\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\nu\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right\}=\frac{m'm''}{au+bv}+\frac{m''m}{a'u+b'v}+\frac{mm'}{a''u+b''v}-h,$$

designante h Constantem Arbitrariam.

---

*) Haec aequatio sequitur e formula identica,

$$(m+m'+m'')(m\alpha\beta+m'\alpha'\beta'+m''\alpha''\beta'')-(m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha'')(m\beta+m'\beta'+m''\beta'')$$
$$=m'm''ab+m''ma'b'+mm'a''b''.$$

Quantitates μ et ν ipsis a, b, etc. determinantur per formulas,

$$10. \quad \begin{cases} (m+m'+m'')\mu = m'm''a^2+m''ma'^2+mm'a''^2, \\ (m+m'+m'')\nu = m'm''b^2+m''mb'^2+mm'b''^2 \text{ *)}. \end{cases}$$

Ponamus

$$11. \quad \mu = \nu = 1,$$

inter quatuor quantitates a, b, a'', b'' locum habebunt tres aequationes,

$$12. \quad \begin{cases} m+m'+m'' = m''(m+m')a^2+2m''m\,aa''+m(m'+m'')a''^2, \\ m+m'+m'' = m''(m+m')b^2+2m''m\,bb''+m(m'+m'')b''^2, \\ 0 = m''(m+m')ab+m''m(ab''+a''b)+m(m'+m'')a''b''. \end{cases}$$

Quae demonstrant, quantitates a et a'', b et b'' haberi posse pro Coordinatis punctorum in terminis positorum quarumcunque binarum semidiametrorum coniugatarum sectionis conicae, cuius aequatio est

$$m+m'+m'' = m''(m+m')x^2+2m''m\,xy+m(m'+m'')y^2.$$

Si pro diametris coniugatis axes principales sumere placet, quantitates a, b, etc. determinandae erunt per aequationes,

$$13. \quad a = A\cos\varepsilon, \quad a'' = A\sin\varepsilon, \quad b = B\sin\varepsilon, \quad b'' = -B\cos\varepsilon,$$

ubi, posito br. c.

$$m''(m+m')+m(m''+m') = n,$$

et nova quantitate M introducta, angulus ε et quantitates A et B dantur per formulas,

$$14. \quad \begin{cases} M\cos 2\varepsilon = m'(m''-m), \quad M\sin 2\varepsilon = 2mm'', \\ A = \sqrt{\dfrac{m+m'+m''}{\frac{n+M}{2}}}, \quad B = \sqrt{\dfrac{m+m'+m''}{\frac{n-M}{2}}}. \end{cases}$$

Determinatis a, b, etc. invenitur

$$15. \quad \begin{cases} \alpha = \alpha'-a'', \quad \alpha'' = \alpha'+a, \quad \beta = \beta'-b'', \quad \beta'' = \beta'+b, \\ \alpha' = \dfrac{ma''-m''a}{m+m'+m''}, \quad \beta' = \dfrac{mb''-m''b}{m+m'+m''}. \end{cases}$$

De substitutione hic a me adhibita pluribus egi in Commentatione „*sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps.*"

---

*) Hae aequationes sequuntur e formulis identicis,

$$(m+m'+m'')(m\alpha^2+m'\alpha'^2+m''\alpha''^2)-(m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha'')^2$$
$$= m'm''.a^2+m''m.a'^2+mm'.a''^2,$$
$$(m+m'+m'')(m\beta^2+m'\beta'^2+m''\beta''^2)-(m\beta+m'\beta'+m''\beta'')^2$$
$$= m'm''.b^2+m''m.b'^2+mm'.b''^2.$$

His de coëfficientibus substitutionis linearis (2.) obiter adnotatis, iam novas variabiles r, φ, s, η introduco ope substitutionis,

$$16. \quad \begin{cases} u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \\ s = \sqrt{r}\,.\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{udu+vdv}{\sqrt[4]{(u^2+v^2)}.dt}, \\ \eta = \sqrt{r^3}.\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{udv-vdu}{\sqrt[4]{(u^2+v^2)}.dt}. \end{cases}$$

Ex aequationibus differentialibus (8.), posito $\mu = \nu = 1$, sequitur

$$17. \quad \begin{cases} \sqrt{r^3}.\dfrac{ds}{dt} = \frac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi, \\ \sqrt{r^3}.\dfrac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2}\eta s+\Phi', \end{cases}$$

siquidem ponitur $\Phi' = \dfrac{d\Phi}{d\varphi}$ atque

$$18. \quad \Phi = \frac{m'm''}{a\cos\varphi+b\sin\varphi}+\frac{m''m}{a'\cos\varphi+b'\sin\varphi}+\frac{mm'}{a''\cos\varphi+b''\sin\varphi}.$$

E formulis (16.) et (17.) patet, ***determinationem motus propositi pendere ab integratione duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles*** φ, s, η,

$$19. \quad d\varphi : ds : d\eta = \eta : \tfrac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi : -\tfrac{1}{2}s\eta+\Phi'.$$

Quas aequationes differentiales, quia a Constante generali h vacuae sunt, simpliciores censere licet iis quae, non adhibitis substitutionibus (16.) aut earum similibus, adiumento aequationis (9.) per unius variabilis eliminationem obtinentur. Integratis (19.) suppeditabit formula (9.) valorem ipsius r. Nimirum cum sit

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r}\{s^2+\eta^2\},$$

fit e (9.),

$$20. \quad r = \frac{1}{h}\{\Phi-\tfrac{1}{2}(s^2+\eta^2)\}.$$

Denique tempus t invenitur formula

$$21. \quad dt = \frac{\sqrt{r}}{s}dr = \frac{\sqrt{r^3}}{\eta}.d\varphi.$$

Iam aequationum differentialium (19.) investigabo Multiplicatorem N.

Si adhibemus formulam differentialem, qua generaliter Multiplicatorem definivi, fit

$$-\frac{\eta\, d\log N}{d\varphi} = \frac{\partial\eta}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\frac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi)}{\partial s}+\frac{\partial(-\frac{1}{2}s\eta+\Phi')}{\partial\eta} = \tfrac{1}{2}s,$$

ideoque e (16.),

$$22. \quad d\log N = -\tfrac{1}{2}\frac{s}{\eta}d\varphi = -\frac{dr}{r}; \quad N = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Unde substituendo (20.) et factorem constantem $\sqrt{h}$ reiiciendo, *fit aequationum differentialium* (19.) *Multiplicator*

$$N = \frac{1}{\sqrt{\{\Phi - \frac{1}{2}(v^2+\eta^2)\}}}.$$

Qui Multiplicatoris valor valet, quaecunque anguli φ sit functio Φ, qua aequationes differentiales (19.) afficiuntur.

Multiplicatorem etiam per praecepta generalia Cap. II. tradita hoc modo indagare licet. Scilicet aequationum differentialium (8.) Multiplicator est *unitas*. Unde aequationum differentialium

$$23. \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{s}{\sqrt{r}}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\eta}{\sqrt{r^3}}, \\ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r^3}}\{\frac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi\}, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r^3}}\{-\frac{1}{2}\eta s+\Phi'\} \end{cases}$$

Multiplicator aequatur unitati divisae per quantitatum r, φ, s, η Determinans, variabilium u, v, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ respectu formatum. Quod Determinans, cum quantitatum r et φ valores ab ipsis $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ vacui sint, aequatur producto Determinantis quantitatum r et φ ipsorum u et v respectu et Determinantis quantitatum s et η ipsorum $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ respectu formati. Quorum Determinantium alterum fit $\frac{1}{r}$, alterum r, unde aequationum (23.) Multiplicator et ipse $=1$ invenitur. Deinde si Integralis (20.) ope eliminatur variabilis r simulque de aequationibus differentialibus (23.) prima reiicitur, Multiplicator aequationum differentialium, ea eliminatione ad minorem numerum paucioresque variabiles reductarum, secundum §. 10. aequatur differentiali partiali $\frac{\partial r}{\partial h}$, designante h Constantem Arbitrariam qua Integrale (20.) afficitur. Quod differentiale partiale e (20.) fit $-\frac{r}{h}$. Denique aequationum differentialium (19.) Multiplicator invenitur dividendo per $\sqrt{r^3}$, quippe per quod multiplicandum erat ut quantitates ad dextram aequationum (19.) prodirent; unde factore constante $-\frac{1}{h}$ reiecto prodit aequationum (19.) Multiplicator $\frac{1}{\sqrt{r}}$, uti supra.

Cognito ipsius N valore, si aequationum differentialium (19.) integratione prima exprimitur variabilis η per r, s et Constantem Arbitrariam α, principio ultimi multiplicatoris obtinetur alterum Integrale

$$\int \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \cdot \frac{\eta\, ds + \{\Phi - \frac{1}{2}s^2 - \eta^2\}\, d\varphi}{\sqrt{\{\Phi - \frac{1}{2}(s^2+\eta^2)\}}} = \beta,$$

ubi sub integrationis signo post valorem ipsius η substitutum differentiale completum habetur atque β Constantem Arbitrariam designat. ***Eulerus*** integrationem primam, etsi succederet, in hac quaestione parvi adiumenti fore putavit, cum de ulteriore integratione desperandum esset. At novo principio generali ultimi multiplicatoris ipsam ulteriorem integrationem absolvere licuit, dum de prima integratione nihil constat.

Evanescente h habetur aequatio integralis particularis,

$$24. \qquad \Phi = \tfrac{1}{2}(ss+\eta\eta),$$

unde una tantum integranda manet aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles s et φ,

$$25. \qquad \frac{ds}{d\varphi} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\Phi - ss)} = 0.$$

Cuius aequationis differentialis Multiplicator M definitur formula

$$\frac{d \log M}{d\varphi} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial . \sqrt{(2\Phi - ss)}}{ds} = \tfrac{1}{2}\,\frac{s}{\sqrt{(2\Phi - ss)}} = \frac{s}{2\eta} = \tfrac{1}{2}\,\frac{d \log r}{d\varphi},$$

unde $\beta M = \sqrt{r}$. Invento aequationis differentialis (25.) Integrali eiusque ope expressa φ per s et α, fit $M^{-1} = \frac{\partial s}{\partial \alpha}$, ideoque

$$26. \qquad r = \frac{\beta^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^2},$$

designantibus α et β Constantes Arbitrarias.

Formulae prorsus analogae habentur, si mutuae attractiones non distantiarum quadratis inversis sed aliis quibuscunque potestatibus proportionales sunt. Observo tamen, casu quo trium corporum quae in eadem recta moventur mutuae attractiones ***cubis*** distantiarum inverse proportionales sint, motum totum tantum ab ***unica Quadratura*** pendere.

Si vires sollicitantes in motu systematis liberi functiones Coordinatarum homogeneae quaecunque sunt, generaliter per substitutiones antecedentibus similes systematis aequationum differentialium ordinem ***unitate*** diminuere licet, quantitate cui Coordinatae proportionales statuuntur eliminata. Quam, docet theoria

nostra, aequationum differentialium iis substitutionibus reductarum Multiplicatore determinari, ideoque, si illae complete integratae sint, Determinante functionali, quo earum Multiplicator detur, variabilis quoque eliminatae valorem absque Quadratura suppeditari. Si principium conservationis virium vivarum valet, eo ipso variabilis eliminata determinari potest, unde vice versa aequationum differentialium reductarum Multiplicatorem eruere earumque ultimam integrationem reducere licet ad Quadraturas. Excipiendus est casus particularis, quo Constans Arbitraria, quae valori semisummae virium vivarum accedit, nihilo aequiparatur. Eo casu aequationum differentialium reductarum habetur Integrale particulare, unde ordinem systematis earum denuo unitate diminuere licet; quantitas eliminata autem rursus determinabitur Multiplicatore systematis aequationum differentialium bis reductarum. Hinc sequens nanciscimur theorema:

„Sint vires, quibus systema liberum n punctorum materialium sollicitatur, „functiones Coordinatarum homogeneae, valeatque principium conservationis „virium vivarum; casu particulari, quo Constans Arbitraria valori virium „vivarum adiicienda nihilo aequatur, systematis aequationum differentialium „ordo *duabus* unitatibus diminui sive problema revocari potest ad integra„tionem $6n-3$ aequationum differentialium primi ordinis inter $6n-2$ va„riabiles; quibus complete integratis obtinetur valor $(6n-1)^{\text{tae}}$ variabilis *per* „*differentiationes* secundum Constantes Arbitrarias institutas, qui valor in „novam Constantem Arbitrariam ducitur; $6n^{\text{ta}}$ variabilis principio conser„vationis virium vivarum determinatur, postremo tempus ut semper obti„netur Quadratura."

Quae hac Analysi demonstrantur.

Sit x una $3n$ Coordinatarum, sit m massa puncti ad quod ea pertinet, ponatur $\frac{dx}{dt}=x'$, habeanturque $3n$ aequationes differentiales $m\frac{dx'}{dt}=X$, designante X functionem $3n$ Coordinatarum homogeneam i^{ti} ordinis. Ad quantitates analogas denotandas indices subscriptos adhibebo. Summationibus semper ad omnes $3n$ Coordinatas extensis, pono

$$\Sigma mxx=rr,\quad x=rq,\quad x'=p\sqrt{r^{i+1}},\quad r'=\varrho\sqrt{r^{i+1}},\quad X=r^iQ,$$

unde quantitates Q erunt solarum quantitatum q functiones et ipsae homogeneae i^{ti} ordinis. His statutis obtinetur

$$27.\quad\begin{cases} q'=\frac{dq}{dt}=\frac{x'}{r}-\frac{xr'}{r^2}=\sqrt{r^{i-1}}\cdot(p-q\varrho), \\ p'=\frac{dp}{dt}=\frac{X}{m\sqrt{r^{i+1}}}-\frac{i+1}{2}\cdot\frac{x'r'}{\sqrt{r^{i+3}}}=\sqrt{r^{i-1}}\cdot\left(\frac{Q}{m}-\frac{1}{2}(i+1)p\varrho\right), \\ \Sigma mqp=\varrho. \end{cases}$$

Hinc inter variabilem r et $6n$ variabiles q et p obtinentur $6n$ aequationes differentiales primi ordinis,

$$28. \quad dr : dq : dq_1 \ldots : dp : dp_1 \ldots$$
$$= r\varrho : p - q\varrho : p_1 - q_1\varrho \ldots : \frac{Q}{m} - \frac{i+1}{2}p\varrho : \frac{Q_1}{m_1} - \frac{i+1}{2}p_1\varrho \ldots,$$

in quibus suppono ipsius ϱ substitutum esse valorem Σmqp. Si de parte dextra $r\varrho$, de laeva dr reiicitur, abeunt formulae (28.) in $6n-1$ aequationes differentiales inter $6n$ variabiles q et p.

Sequitur e (28.):

$$dr : \tfrac{1}{2}d\Sigma mqq = r : 1 - \Sigma mqq,$$

unde, designante c Constantem Arbitrariam, fit

$$29. \quad r^2(1 - \Sigma mqq) = c.$$

Valente principio virium vivarum, designet K functionem ipsarum q homogeneam $(i+1)$ti ordinis $= \frac{1}{i+1}\Sigma qQ = \int \Sigma Q dq$, atque h alteram Constantem Arbitrariam, obtinetur

$$30. \quad r^{i+1}(K - \tfrac{1}{2}\Sigma mpp) = h.$$

Vocemus M Multiplicatorem aequationum differentialium (28.), erit

$$d\log M + \frac{Udr}{r\varrho} = 0,$$

siquidem U designat summam quantitatum $r\varrho$, $p - q\varrho$ etc., $\frac{Q}{m} - \frac{i+1}{2}p\varrho$ etc., respective secundum variabiles r, q etc., p etc. differentiatarum. Quae summa, cum sit $\frac{\partial \varrho}{\partial q} = mp$, $\frac{\partial \varrho}{\partial p} = mq$, evadit

$$U = \varkappa\varrho, \quad \text{ubi} \quad \varkappa = 1 - \tfrac{1}{2}(i+3)(3n+1),$$

unde sequitur

$$31. \quad d\log M = -\varkappa\, d\log r, \quad M = r^{-\varkappa}.$$

In quaestione proposita non adhibendum est Integrale completum (29.), sed particulare pro quo fit $c = 0$; substitutiones enim adhibitae suppeditant aequationem

$$32. \quad \Sigma mqq = 1,$$

cuius ope $3n$ variabiles q ad alias $3n-1$ variabiles w reducere licet. Vocemus H Determinans functionale $3n-1$ quantitatum w et quantitatis $1 - \Sigma mqq$, $3n$ variabilium q respectu formatum, sintque aequationes differentiales reductae,

$$32. \quad dr : dw : dw_1 \ldots : dp : dp_1 \ldots$$
$$= r\varrho : W : W_1 \ldots : P : P_1 \ldots$$

secundum regulas generales fit aequationum (32.) Multiplicator

$$N = \frac{M}{Hr^2} = \frac{1}{Hr^{x+2}}.$$

Qui satisfacere debet aequationi

$$33.\quad d\log N + \frac{d\log r}{\varrho}\left\{\varrho + \frac{\partial W}{\partial w} + \frac{\partial W_1}{\partial w_1} \dots + \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \dots\right\} = 0.$$

Si vocamus L Multiplicatorem $6n-2$ aequationum differentialium primi ordinis, inter $3n-1$ variabiles w et $3n$ variabiles p locum habentium,

$$34.\quad dw : dw_1 \dots : dp : dp_1 \dots = W : W_1 \dots : P : P_1 \dots,$$

determinatur L formula

$$0 = d\log L + \frac{dw}{W}\left\{\frac{\partial W}{\partial w} + \frac{\partial W_1}{\partial w_1} \dots + \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \dots\right\},$$

unde, cum e (32.) sit $\frac{dw}{W} = \frac{d\log r}{\varrho}$, e (33.) sequitur,

$$d\log L = d\log Nr,$$

ideoque aequationum (34.) fit Multiplicator

$$35.\quad L = rN = \frac{1}{H.r^{x+1}} = \frac{1}{H.r^{2-\frac{1}{2}(i+3)(3n+1)}}.$$

Aequationibus (34.) complete integratis, quantitas L per theoremata initio huius Commentationis proposita obtinetur formatione Determinantis functionalis, ideoque variabilis r ope aequationis (35.) absque Quadratura per variabiles w et p determinabitur. Si conservatio virium vivarum valet, dabitur r aequatione (30.), unde eo casu dato variabilis r valore vice versa aequationum differentialium (34.) suppeditatur Multiplicator

$$36.\quad L = \frac{1}{H.(K-\frac{1}{2}\Sigma mpp)^{\frac{1}{i+1}(3n-1)+\frac{1}{2}(3n+1)}}.$$

Seorsim examinemus casum particularem $h=0$, quo fieri non potest ut ipsius r per quantitates w et p determinatio ex aequatione (30.) petatur. Eo casu ope aequationum

$$\Sigma mqq = 1, \quad \tfrac{1}{2}\Sigma mpp = K$$

poterunt $6n$ quantitates q et p ad $6n-2$ alias quantitates v reduci. Sint aequationes differentiales reductae,

$$37.\quad dr : dv_1 : dv_2 \dots : dv_{6n-2} = r\varrho : V_1 : V_2 \dots : V_{6n-2},$$

sitque G Determinans functionale $6n-2$ quantitatum v duarumque Σmqq et $K-\frac{1}{2}\Sigma mqq$, $6n$ variabilium q et p respectu formatum: secundum regulas generales Cap. II. traditas erit aequationum differentialium reductarum (37.)

Multiplicator

$$\mu = \frac{M}{G.r^{i+3}} = \frac{1}{G.r^{x+i+3}},$$

denominatore r^{i+3} inde proveniente, quod in aequationibus (29.) et (30.) functiones Constantibus Arbitrariis c et h aequatae per r^2 et r^{i+1} multiplicantur. Eadem ratione, qua supra Multiplicatorem L e N deduxi, sequitur, $6n-3$ aequationum differentialium primi ordinis inter $6n-2$ variabiles v locum habentium,

$$38. \quad dv_1 : dv_2 \ldots . : dv_{6n-2} = V_1 : V_2 \ldots . : V_{6n-2}$$

Multiplicatorem fieri

$$39. \quad \nu = \mu r = \frac{1}{G.r^{x+i+2}} = \frac{1}{G}.r^{\frac{1}{2}(i+3)(3n-1)}.$$

Aequationibus (38.) complete integratis, Multiplicator ν Determinante functionali datur, ideoque ope formulae (39.) variabilis r valor per quantitates v sine Quadratura determinatur. Qui insuper in Constantem Arbitrariam ducendus est, quippe proportionalis est potestati Multiplicatoris, quem factore constante arbitrario afficere licet.

Principium ultimi Multiplicatoris applicatur ad systema liberum punctorum materialium in medio resistente motum. De cometa in aethere resistente circa solem moto.

§. 29.

Determinatio multiplicatoris etiam in quibusdam problematis mechanicis succedit, in quibus viribus sollicitantibus aliae accedunt e medii resistentia natae, veluti in motu puncti in medio resistente circa centrum fixum, versus quod secundum legem *Neutonianam* attrahitur.

Sint rursus puncti massa m_i praediti Coordinatae orthogonales x_i, y_i, z_i, sit $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$, $y'_i = \frac{dy_i}{dt}$, $z'_i = \frac{dz_i}{dt}$, atque puncti velocitas

$$v_i = \sqrt{(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)}.$$

Si puncta moventur in medio, quod cuiusque motui in directione tangentis orbitae eius resistit, viribus massam m_i secundum Coordinatarum directiones sollicitantibus X_i, Y_i, Z_i, quae solarum Coordinatarum et, si placet, temporis t functiones esse supponuntur, accedunt vires resistentia medii provenientes,

$$-m_i f_i V_i . \frac{x'_i}{v_i}, \quad -m_i f_i V_i . \frac{y'_i}{v_i}, \quad -m_i f_i V_i . \frac{z'_i}{v_i},$$

ubi V_i est solius v_i functio resistentiae legem exprimens atque f_i, si forma corporis m_i non respicitur, est solarum x_i, y_i, z_i functio aequalis densitati medii

in puncto m_i, divisae per massam m_i et multiplicatae per Constantem superficiei corporis m_i proportionalem. Est igitur motus systematis liberi punctorum materialium determinandus per systema aequationum differentialium secundi ordinis huiusmodi,

$$1.\quad \begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} X_i - f_i V_i . \frac{x'_i}{v_i}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} Y_i - f_i V_i . \frac{y'_i}{v_i}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} Z_i - f_i V_i . \frac{z'_i}{v_i}. \end{cases}$$

Quarum aequationum differentialium Multiplicator M, cum functiones X_i, Y_i, Z_i, f_i ab ipsis x'_i, y'_i, z'_i vacuae supponantur, definitur per formulam differentialem,

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . x'_i}{\partial x'_i} + \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . y'_i}{\partial y'_i} + \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . z'_i}{\partial z'_i} \right\},$$

sive

$$2.\quad \frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ 2 V_i v_i^{-1} + \frac{\partial V_i}{\partial v_i} \right\}.$$

Si motus in plano fit, aequationis (2.) loco habetur

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ V_i v_i^{-1} + \frac{\partial V_i}{\partial v_i} \right\}.$$

Si motus in eadem recta fit, habetur

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \frac{\partial V_i}{\partial v_i},$$

unde fit $M = 1$, si V_i est constans.

Sit $V_i = v_i$ sitque medium uniforme ideoque quantitates f_i constantes; sequitur e (2.):

$$3.\quad M = e^{3 \Sigma f_i . t} \; {}^{*)}.$$

Haec docet formula, *si motus fiat in medio uniformi, cuius resistentia velocitati directe proportionalis sit, atque vires sollicitantes X_i, Y_i, Z_i a solis Coordinatis pendeant, post omnia inter quantitates x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i inventa Integralia ultimo loco t per Coordinatam aliquam sine nova Quadratura exprimi posse.* Sint enim pro numero n punctorum materialium $6n-1$ Integralia inventa,

$$F_1 = \alpha_1, \quad F_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad F_{6n-1} = \alpha_{6n-1},$$

*) Pro motu in plano fit eo casu $M = e^{2 \Sigma f_i . t}$, pro motu in eadem recta, $M = e^{\Sigma f_i . t}$.

ubi α_1, α_2 etc. sunt Constantes Arbitrariae; sit x una quaecunque Coordinatarum atque Δ Determinans functionum F_1, F_2 etc., quantitatum respectu omnium x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i praeter x formatum: sequitur e (3.) secundum Multiplicatoris definitionem initio huius Commentationis traditam,

$$4. \quad 3t\Sigma f_i + \tau = \log\frac{\Delta}{x'},$$

designante τ novam Constantem Arbitrariam. Si virium sollicitantium expressiones X_i, Y_i, Z_i praeter mobilium Coordinatas ipsam quoque variabilem t continent, hanc non amplius separare licet; at docet formula (3.), *constante Multiplicatore M ultimam integrationem absolvi Quadraturis.*

Ponamus, systema punctorum materialium sive liberum sive certis conditionibus subiectum si in medio non resistente moveretur *conservatione arearum* gaudere, valebunt pro motu in medio resistente tres aequationes,

$$5. \quad \begin{cases} d.\Sigma m_i(y_i z'_i - z_i y'_i) = -\Sigma m_i f_i \frac{V_i}{v_i}(y_i z'_i - z_i y'_i)\,dt, \\ d.\Sigma m_i(z_i x'_i - x_i z'_i) = -\Sigma m_i f_i \frac{V_i}{v_i}(z_i x'_i - x_i z'_i)\,dt, \\ d.\Sigma m_i(x_i y'_i - y_i x'_i) = -\Sigma m_i f_i \frac{V_i}{v_i}(x_i y'_i - y_i x'_i)\,dt. \end{cases}$$

Hinc si rursus $V_i = v_i$ et quantitates f_i omnes eidem Constanti f aequantur, sequitur

$$6. \quad \begin{cases} \Sigma m_i(y_i z'_i - z_i y'_i) = a e^{-ft}, \\ \Sigma m\,(z_i x'_i - x_i z'_i) = b e^{-ft}, \\ \Sigma m_i(x_i y'_i - y_i x'_i) = c e^{-ft}, \end{cases}$$

designantibus a, b, c Constantes Arbitrarias. Patet e formulis (6.), *si elementa omnia sphaerica eiusdemque densitatis et magnitudinis supponantur, atque systema eorum in motu in vacuo conservatione arearum gauderet, eandem locum habere, si motus fiat in medio uniformi cuius resistentia velocitati proportionalis est, eandemque fore plani invariabilis positionem; summam arearum autem inde a tempore $t = 0$ descriptarum et per massas multiplicatarum non sicuti in vacuo proportionalem fore tempori t, sed quantitati*

$$1 - \frac{1}{e^{ft}},$$

designante f Constantem positivam, ideoque tempore in infinitum crescente ad limitem crescere finitum. Ubi systema liberum est ideoque e (6.) et (3.) constat ipsius M valor per quantitates x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i expressus, docet

principium ultimi Multiplicatoris, praeter tria cognita Integralia prima (6.) adhuc ***ultimum Integrale, inter quantitates*** x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i ***locum habens, Quadraturis absolvi posse.***

Iam unius puncti liberi consideremus motum planum in medio resistente. Qui motus definitur duabus aequationibus differentialibus secundi ordinis,

$$7. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = X - f.\frac{x'V}{v}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = Y - f.\frac{y'V}{v}, \end{cases}$$

ubi X, Y, f Coordinatarum orthogonalium x et y, atque V velocitatis $v = \sqrt{(x'x'+y'y')}$ functiones supponuntur. Aequationum (7.) Multiplicator M definitur formula differentiali,

$$8. \quad \frac{d\log M}{dt} = f\left\{\frac{\partial . x'v^{-1}V}{\partial x'} + \frac{\partial . y'v^{-1}V}{\partial y'}\right\} = f\left\{v^{-1}V + \frac{dV}{dv}\right\}.$$

Ponamus vim sollicitantem constanter dirigi versus centrum fixum, quod sit initium Coordinatarum, sive esse $X : Y = x : y$, sequitur e (7.):

$$9. \quad \frac{d\log(xy'-yx')}{dt} = -f.\frac{V}{v}.$$

Unde si $V = v^n$, e (8.) et (9.) eruitur, quaecunque sit functio f,

$$10. \quad M = \frac{1}{(xy'-yx')^{n+1}}.$$

Si vis attractiva est functio radii vectoris r sive distantiae a centro attractionis, quam functionem designemus per

$$F'(r) = \frac{dF(r)}{dr} = -\frac{Xdx+Ydy}{dr},$$

Multiplicatorem pro lege resistantiae adhuc generaliori assignare licet. Scilicet eo casu e (7.) sequitur formula,

$$11. \quad d\{\tfrac{1}{2}vv + F(r)\} = -f.vV.dt.$$

Qua iuncta aequationi (9.) patet, si a et b Constantes sint, assignari posse integrale expressionis

$$fV\left(av+\frac{b}{v}\right)dt = -a\,d\{\tfrac{1}{2}vv+F(r)\} - b\,d\log(xy'-yx').$$

Expressione ad laevam aequiparata huic,

$$f\left(\frac{V}{v}+\frac{dV}{dv}\right)dt = d\log M,$$

eruitur

$$12. \quad V = v^{b-1}e^{\frac{1}{2}avv}.$$

Qua resistentiae lege supposita fit

$$13. \qquad M = \frac{e^{-a[\frac{1}{2}vv+F(r)]}}{(xy'-yx')^b}.$$

Pro motibus incitatissimis, sicuti sunt cometarum, resistentiae lex formula (12.) expressa non a rerum natura abhorrere videtur, praesertim si Constanti a valor perparvus tribuitur.

Introducendo Coordinatas polares sit

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r' = \frac{dr}{dt}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt},$$

unde

$$vv = r'r' + rr\varphi'\varphi',$$
$$xy'-yx' = rr\varphi' = r\sqrt{(vv-r'r')}.$$

Ponamus

$$\tfrac{1}{2}vv + F(r) = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y') + F(r) = \alpha,$$
$$xy'-yx' = rr\varphi' = \beta,$$

fit

$$\alpha = \tfrac{1}{2}r'r' + \tfrac{1}{2}\frac{\beta\beta}{rr} + F(r),$$

unde

$$14. \qquad r' = \sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}.$$

Hinc cum sit $r'dt = dr$, sequitur e (9.) et (11.):

$$15. \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dr} = -\dfrac{fvV}{\sqrt{\left(2\alpha-\frac{\beta\beta}{rr}-2F(r)\right)}}, \\[2ex] \dfrac{d\beta}{dr} = -\dfrac{\beta f v^{-1} V}{\sqrt{\left(2\alpha-\frac{\beta\beta}{rr}-2F(r)\right)}}. \end{cases}$$

Si motus propositus est motus cometae circa solem, atque densitas aetheris solem circumdantis functioni distantiae a sole aequatur, fit f solius r functio. Porro cum sit V solius v functio, ope aequationis

$$v = \sqrt{(2\alpha - 2F(r))}$$

quantitates vV et $v^{-1}V$ per α et r exprimere licet. Unde idonea variabilium electione effectum est, *ut motus cometae circa solem in aethere resistente tantum pendeat ab integratione duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles α, β, r; qua transacta si determinantur α et β per r, obtinentur φ et t per Quadraturas,*

$$16. \quad \begin{cases} \varphi = \int \frac{\beta\, dr}{rr\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}, \\ t = \int \frac{dr}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}. \end{cases}$$

Antecedentia valent, quaecunque sit resistentiae lex sive quaecunque sit V ipsius v functio. ***Ubi autem aetheris, in quo cometa circa solem movetur, resistentia potestati velocitati cuicunque proportionalis est sive etiam legem generaliorem sequitur expressam formula $V = v^{b-1} e^{\frac{1}{2}avv}$, in qua a et b Constantes quascunque designant, sive aether uniformis sive cum distantia a sole secundum quamcunque legem variabilis sit, quaecunque sit vis attractiva solis, unico cognito Integrali reliquae tres integrationes per Quadraturas absolvuntur.*** Nimirum determinata V per formulam (12.), constat per formulam (13.) aequationum differentialium propositarum (7.) Muliplicator M; eo autem cognito etiam dabitur Multiplicator M_1 aequationum differentialium, quae e (7.) obtinentur loco ipsarum x, y, x', y' quantitates r, φ, α, β introducendo,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\beta}{rr}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -fvV, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\beta f v^{-1} V.$$

Etenim aequatur $\frac{M_1}{M}$ Determinanti quantitatum x, y, x', y', variabilium $r, \varphi, \alpha, \beta$ respectu formato, unde si reputamus, ipsarum x et y expressiones quantitates α et β non continere, fit

$$M_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \beta} - \frac{\partial x'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right).M$$

$$= \frac{rM}{\frac{\partial \alpha}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y'} - \frac{\partial \alpha}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x'}} = \frac{rM}{xx'+yy'} = \frac{M}{r'}.$$

Si uti in (15.) variabilem r loco ipsius t pro independente adhibemus, Multiplicator antecedens in r' ducendus est, unde in ipsum M redimus, qui ponendo $V = v^{b-1} e^{\frac{1}{2}avv}$ secundum (13.) invenitur

$$17. \quad M = \beta^{-b} e^{-a\alpha}.$$

Qui valor cum non afficiatur variabilibus φ et t iisque non magis afficiantur differentialium $\frac{d\alpha}{dr}$ et $\frac{d\beta}{dr}$ valores (15.), erit $M = \beta^{-b} e^{-a\alpha}$ etiam Multiplicator

duarum aequationum differentialium primi ordinis (15.), inter tres variabiles r, α, β locum habentium.

Quod ut directe pateat, pono

$$18. \quad r\gamma = \frac{\beta}{v} = \frac{\beta}{\sqrt{(2\alpha - 2F(r))}},$$

unde

$$r' = \sqrt{\left(2\alpha - 2F(r) - \frac{\beta\beta}{rr}\right)} = v\sqrt{(1-\gamma\gamma)},$$

$$r\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = \frac{-\beta}{v^3}, \quad r\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = \frac{1}{v}.$$

Ubi insuper brevitatis causa vocamus R solius r functionem

$$19. \quad r^{-(b-1)} f . e^{-aF(r)} = R,$$

fit

$$20. \quad rvf.MV = rv^b\beta^{-b}.fe^{\frac{1}{2}avv-a\alpha} = R.\gamma^{-b}.$$

Quibus substitutis si elementum independens dr Multiplicatori M proportionale statuimus, aequationes differentiales (9.) evadunt:

$$21. \quad dr : d\alpha : d\beta = \beta^{-b}e^{-a\alpha} : -R.\frac{\gamma^{-b}}{\sqrt{(1-\gamma\gamma)}}.\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} : R\frac{\gamma^{-b}}{\sqrt{(1-\gamma\gamma)}}.\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}.$$

Quam patet ita comparatam esse formulam ut, dextris partibus vocatis A, B, C, fiat

$$22. \quad \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial C}{\partial\beta} = \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial C}{\partial\beta} = 0,$$

sicuti fieri debet.

Sint u et w duae quaecunque variabilium r, α, β functiones atque obtineatur e (15.) sive e (21.),

$$dr : du : dw = \beta^{-b}e^{-a\alpha} : D : E.$$

Sit porro inventum aequationum differentialium (15.) sive (21.) Integrale, Constante Arbitraria c affectum, cuius ope exprimantur r, α, β per c, u, w, ponaturque

$$\frac{\partial r}{\partial c}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial u}.\frac{\partial\beta}{\partial w} - \frac{\partial\alpha}{\partial w}.\frac{\partial\beta}{\partial u}\right\} + \frac{\partial r}{\partial u}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial w}.\frac{\partial\beta}{\partial c} - \frac{\partial\alpha}{\partial c}.\frac{\partial\beta}{\partial w}\right\} + \frac{\partial r}{\partial w}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial c}.\frac{\partial\beta}{\partial u} - \frac{\partial\alpha}{\partial u}.\frac{\partial\beta}{\partial c}\right\} = \Delta;$$

sequitur e principio ultimi Multiplicatoris altera aequatio integralis,

$$\int \Delta\{E\,du - D\,dw\} = \text{Const.},$$

ubi, et ipsis D et E per u, w, c expressis, sub integrationis signo differentiale completum subest.

De multiplicatore aequationum differentialium isoperimetricarum.

§. 30.

Sit U data functio variabilis independentis t, dependentium x, y, z etc. et quotientium earum differentialium x', x'' etc., y', y'' etc., z', z'' etc. etc. Si proponitur problema, functiones x, y, z etc. ita determinandi, ut integrale

$$\int U\,dt$$

maximum minimumve evadat seu generalius, ut eius integralis variatio evanescat, constat problematis solutionem pendere ab integratione systematis aequationum differentialium,

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \text{ etc.},$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial y''}}{dt^2} \text{ etc.},$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial z''}}{dt^2} \text{ etc. etc.}$$

Quas in sequentibus vocabo *aequationes differentiales isoperimetricas*, cum problema, quod ab earum integratione pendet, nomine licet improprio isoperimetrici appellari soleat. Quaeram aequationum differentialium isoperimetricarum Multiplicatorem.

Inchoabo a casu quo ipsa U praeter variabilem independentem t unicam continet functionem incognitam x una cum eius differentialibus $x', x'', \ldots\ldots x^{(n)}$. Eo casu unica integranda est aequatio differentialis $2n^{\text{ti}}$ ordinis,

$$1.\quad 0 = V = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \ldots\ldots \pm \frac{d^n\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}.$$

Ex aequatione (1.) si eruitur quantitatis $x^{(2n)}$ valor

$$x^{(2n)} = A,$$

huius aequationis Multiplicator M secundum (5.) §. 14. definitur formula differentiali,

$$\frac{d\log M}{dt} = -\frac{\partial A}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}}}{\frac{\partial V}{\partial x^{(2n)}}}.$$

E $n+1$ expressionis V terminis bini ultimi soli continent quantitatem $x^{(2n-1)}$, solus ultimus quantitatem $x^{(2n)}$, unde fit

$$2. \quad \begin{cases} (-1)^n \dfrac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}} = \dfrac{\partial . \dfrac{d^n \dfrac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n-1)}} - \dfrac{\partial . \dfrac{d^{n-1} \dfrac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}}{\partial x^{(2n-1)}}, \\ (-1)^n \dfrac{\partial V}{\partial x^{(2n)}} = \dfrac{\partial . \dfrac{d^n \dfrac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n)}}. \end{cases}$$

Quantitatum ad dextram valores suppeditat formula generalis, quam in variis occasionibus utilem hic apponam.

Sit W functio quaecunque variabilis independentis t, dependentis x atque ipsius x quotientium differentialium x', x'' etc.; fit

$$\delta \frac{d^m W}{dt^m} = \frac{d^m . \delta W}{dt^m} = \frac{d^m \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} \delta t + \frac{\partial W}{\partial x} \delta x + \frac{\partial W}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial W}{\partial x''} \delta x'' \text{ etc.} \right\}}{dt^m}.$$

Factis differentiationibus et ubique substituta formula

$$\frac{d^i . \delta x^{(h)}}{dt^i} = \delta \frac{d^i x^{(h)}}{dt^i} = \delta x^{(h+i)},$$

eruitur quantitas in $\delta x^{(\varkappa)}$ ducta,

$$3. \quad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(\varkappa)}} = \frac{d^m . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa)}}}{dt^m} + m \frac{d^{m-1} . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-1)}}}{dt^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2} . \frac{d^{m-2} . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-2)}}}{dt^{m-2}} + \text{etc.},$$

quae formula, si $m \geqq \varkappa$, usque ad terminum

$$\frac{m.(m-1)(m-2) \ldots . (m-\varkappa+1)}{1.2 \ldots . \varkappa} . \frac{d^{m-\varkappa} . \frac{\partial W}{\partial x}}{dt^{m-\varkappa}},$$

si $m \leqq \varkappa$, usque ad terminum

$$\frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-m)}}$$

continuanda est. Posteriore casu formula (3.) etiam hoc modo exhiberi potest,

$$4. \quad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(\varkappa)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-m)}} + m \frac{d . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-m+1)}}}{dt} + \frac{m(m-1)}{1.2} . \frac{d^2 . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-m+2)}}}{dt^2} + \text{etc.}$$

Formulae antecedentes (3.) et (4.) immutatae manent, si functio W praeter variabilem dependentem x eiusque quotientes differentiales alias dependentes y, z, etc. earumque quotientes differentiales continet. Si functionem W plures variabiles independentes dependentesque earumque differentialia partialia affi-

ciunt, eamque secundum diversas variabiles independentes diversis vicibus iteratis complete differentiamus, huius quoque differentialis completi differentialia partialia simili ratione inveniuntur.

Ponamus ipsius x differentiale n^{tum} altissimum esse quod in expressione W obveniat, sequitur e (4.), si $\varkappa = m+n$,

$$5. \quad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(m+n)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(n)}},$$

si $\varkappa = m+n-1$,

$$6. \quad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(m+n-1)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(n-1)}} + m \frac{d . \frac{\partial W}{\partial x^{(n)}}}{dt}.$$

Unde ponendo $m = n$, $m = n-1$ prodit

$$\frac{\partial . \frac{d^n . \frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}, \quad \frac{\partial . \frac{d^{n-1} . \frac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n-1)}},$$

$$\frac{\partial . \frac{d^n . \frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n-1)}} + n \frac{d . \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt}.$$

Quibus valoribus in formulis (2.) substitutis eruitur

$$(-1)^n \frac{\partial V}{\partial x^{(2n)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}},$$

$$(-1)^n \frac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}} = n \frac{d . \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt},$$

unde iam

$$\frac{d \log M}{dt} = n \frac{d \log \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt}; \qquad M = \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}} \right\}^n.$$

Multiplicatoris M valore invento, principio ultimi Multiplicatoris ultima integratio Quadraturis absolvi potest. Sit ex. gr.

$$U = \sqrt{(E + 2Fx' + G'x'x')},$$

ubi E, F, G ipsarum t et x datae functiones sunt, unde eruitur

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial x'} = \frac{EG - FF}{\{E + 2Fx' + Gx'x'\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc, proposita aequatione differentiali,

$$\frac{d.\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

si per primam integrationem x' per t, x et Constantem Arbitrariam α expressa datur, altera integratio dabitur formula

$$\int \frac{\frac{\partial x'}{\partial \alpha}(EG-FF)(x'dt-dx)}{\{E+2Fx'+Gx'x'\}^{\frac{1}{2}}} = \text{Const.},$$

ubi sub integrationis signo differentiale completum subest.

§. 31.

Iam statuamus, functionem U praeter variabilem independentem t pluribus affici dependentibus earumque quotientibus differentialibus, omnium autem variabilium differentialia altissima ad eundem n^{tum} ordinem ascendere. Sint variabiles dependentes tres x, y, z; tres integrandae sunt aequationes differentiales

$$1. \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

posito

$$2. \quad \begin{cases} (-1)^n X = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \dots (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}, \\ (-1)^n Y = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial y'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial y''}}{dt^2} \dots (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n}, \\ (-1)^n Z = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial z'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial z''}}{dt^2} \dots (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial z^{(n)}}}{dt^{(n)}}. \end{cases}$$

Ex aequationibus (1.) altissimorum quibus afficiuntur differentialium $x^{(2n)}$, $y^{(2n)}$, $z^{(2n)}$ petantur valores, per differentialia inferiora ipsasque variabiles x, y, z, t expressi, quibus respective secundum quantitates $x^{(2n-1)}$, $y^{(2n-1)}$, $z^{(2n-1)}$ differentiatis fiat

$$3. \quad \frac{\partial x^{(2n)}}{\partial x^{(2n-1)}} = u, \quad \frac{\partial y^{(2n)}}{\partial y^{(2n-1)}} = v_1, \quad \frac{\partial z^{(2n)}}{\partial z^{(2n-1)}} = w_2,$$

unde aequationum differentialium (3.) Multiplicator M secundum (5.) §. 14. erit

$$4. \quad \frac{d \log M}{dt} = -\{u + v_1 + w_2\}.$$

Quantitates u, v_1, w_2 determinandae sunt ternis aequationum linearium systematis, quae solis terminis ad dextram positis inter se differunt,

$$5.\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}}u+\frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}}v+\frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}}w &= -\frac{\partial X}{\partial x^{(2n-1)}},\\
\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}}u+\frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}}v+\frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}}w &= -\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n-1)}},\\
\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}}u+\frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}}v+\frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}}w &= -\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n-1)}},\\
\frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}}u_1+\frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}}v_1+\frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}}w_1 &= -\frac{\partial X}{\partial y^{(2n-1)}},\\
\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}}u_1+\frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}}v_1+\frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}}w_1 &= -\frac{\partial Y}{\partial y^{(2n-1)}},\\
\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}}u_1+\frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}}v_1+\frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}}w_1 &= -\frac{\partial Z}{\partial y^{(2n-1)}},\\
\frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}}u_2+\frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}}v_2+\frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}}w_2 &= -\frac{\partial X}{\partial z^{(2n-1)}},\\
\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}}u_2+\frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}}v_2+\frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}}w_2 &= -\frac{\partial Y}{\partial z^{(2n-1)}},\\
\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}}u_2+\frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}}v_2+\frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}}w_2 &= -\frac{\partial Z}{\partial z^{(2n-1)}}.
\end{aligned}\right.$$

Ponamus

$$6.\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)}\partial x^{(n)}} = A,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}} = B,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n)}\partial z^{(n)}} = C,\\
&\frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n)}\partial z^{(n)}} = D,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n)}\partial x^{(n)}} = E,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)}\partial y^{(n)}} = F,\\
&\qquad\frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n-1)}\partial z^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n-1)}\partial y^{(n)}} = a,\\
&\qquad\frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n-1)}\partial x^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n-1)}\partial z^{(n)}} = b,\\
&\qquad\frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n-1)}\partial y^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n-1)}\partial x^{(n)}} = c.
\end{aligned}\right.$$

In formulis (5.) et (6.) §. pr. ipsi W substituendo sex functiones $\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial z^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}$, $\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}$, $\frac{\partial U}{\partial z^{(n-1)}}$, pro ipsa x autem functiones x, y, z sumendo sequitur

$$7.\quad\begin{cases}
\frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}} = A, & \frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}} = F, & \frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}} = E,\\
\frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}} = F, & \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}} = B, & \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}} = D,\\
\frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}} = E, & \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}} = D, & \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}} = C,\\
\frac{\partial X}{\partial x^{(2n-1)}} = n\frac{dA}{dt}, & \frac{\partial Y}{\partial x^{(2n-1)}} = n\frac{dF}{dt}+c, & \frac{\partial Z}{\partial x^{(2n-1)}} = n\frac{dE}{dt}-b,\\
\frac{\partial X}{\partial y^{(2n-1)}} = n\frac{dF}{dt}-c, & \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n-1)}} = n\frac{dB}{dt}, & \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n-1)}} = n\frac{dD}{dt}+a,\\
\frac{\partial X}{\partial z^{(2n-1)}} = n\frac{dE}{dt}+b, & \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n-1)}} = n\frac{dD}{dt}-a, & \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n-1)}} = n\frac{dC}{dt}.
\end{cases}$$

Hos valores substituendo tria systemata aequationum linearium (5.) evadunt,

$$8.\quad\begin{cases}
Au+Fv+Ew = -n\frac{dA}{dt},\\
Fu+Bv+Dw = -n\frac{dF}{dt}-c,\\
Eu+Dv+Cw = -n\frac{dE}{dt}+b,\\
Au_1+Fv_1+Ew_1 = -n\frac{dF}{dt}+c,\\
Fu_1+Bv_1+Dw_1 = -n\frac{dB}{dt},\\
Eu_1+Dv_1+Cw_1 = -n\frac{dD}{dt}-a,\\
Au_2+Fv_2+Ew_2 = -n\frac{dE}{dt}-b,\\
Fu_2+Bv_2+Dw_2 = -n\frac{dD}{dt}+a,\\
Eu_2+Dv_2+Cw_2 = -n\frac{dC}{dt}.
\end{cases}$$

Quorum systematum Determinans commune si vocatur

$$9.\quad R = ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF,$$

eorum resolutione algebraica obtinetur,

$$10. \begin{cases} -Ru = n\left\{\frac{\partial R}{\partial A}\cdot\frac{dA}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}\cdot\frac{dF}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}\cdot\frac{dE}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}c-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}b, \\ -Rv_1 = n\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}\cdot\frac{dF}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial B}\cdot\frac{dB}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}\cdot\frac{dD}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}a-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}c, \\ -Rw_2 = n\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}\cdot\frac{dE}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}\cdot\frac{dD}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial C}\cdot\frac{dC}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}b-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}a. \end{cases}$$

Quibus formulis additis termini per a, b, c multiplicati se mutuo destruunt, unde prodit

$$\frac{d\log M}{dt} = -\{u+v_1+w_2\} = n\frac{dR}{Rdt},$$

ideoque

$$M = R^n = \{ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF\}^n.$$

Quo valore invento, si per omnia praeter unum Integralia inventa problema in aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles redit, huius quoque Multiplicator constabit.

Adiumento theorematum generalium in fine §i 16. propositorum antecedentia extendere licet ad casum quo functio U praeter variabilem independentem numerum quemlibet dependentium continet, singularum differentialibus altissimis omnibus ad eundem ordinem ascendentibus. At si diversarum variabilium dependentium differentialia altissima in functione U non omnia ad eundem ordinem ascendunt, Multiplicatoris aequationum differentialium isoperimetricarum determinatio difficilior est. Scilicet nascitur difficultas eo quod casu quem innui aequationes differentiales isoperimetricae formam normalem exuant, qua altissima diversarum variabilium differentialia per differentialia inferiora ipsasque variabiles determinantur. Reductio ad formam normalem cum molestissima ac saepe inextricabilibus difficultatibus obnoxia sit, demonstrabo sequentibus, quomodo generaliter eruere liceat formulam differentialem qua Multiplicator definiatur, etiamsi ipsa reductio effecta non supponatur. Quae formula in problemate isoperimetrico generali proposito ipsum Multiplicatoris valorem suppeditabit.

De reductione aequationum differentialium ad formam normalem et formula symbolica qua reductarum Multiplicator definiatur. Aequationum differentialium isoperimetricarum ad formam normalem reductarum Multiplicator.

§. 32.

Datae sint inter variabilem independentem t atque n dependentes x_1, x_2, ... x_n totidem aequationes differentiales

$$1. \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots . \quad F_n = 0,$$

non ea forma normali praeditae quae permittat, ut differentialium singularum variabilium altissimorum valores per differentialia inferiora ipsasque variabiles exprimantur. Cuiusmodi habentur aequationes, si in earum una pluribusve altissima differentialia sive omnino desunt sive ex iis reliquarum adiumento aequationum eliminari possunt. Eo casu iteratis aequationum (1.) differentiationibus formandum est systema *aequationum auxiliarium*, quarum ope totidem differentialia eliminando forma normalis eruatur. Varios modos, quibus ea operatio institui potest, in alia Commentatione tradam, quippe quae quaestio multis egregiis theorematis nititur, quae uberiorem expositionem poscunt. Hic observare sufficiat, si ad aequationes auxiliares formandas aequatio $F_i = 0$ sit λ_i vicibus iteratis differentianda, ponaturque

$$\frac{d^{\lambda_i} F_i}{dt^{\lambda_i}} = \varphi_i,$$

numeros λ_i ita comparatos esse debere, ut ex aequationibus

$$2. \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots \quad \varphi_n = 0$$

altissimorum differentialium in iis obvenientium

$$x_1^{(p_1)}, \quad x_2^{(p_2)}, \quad \dots \quad x_n^{(p_n)}$$

peti possint valores per differentialia inferiora ipsasque variabiles expressi. Unde aequationes (2.) per se consideratae constituere debent aequationum differentialium systema forma normali gaudens, multo tamen altioris ordinis quam qui systemati aequationum differentialium propositarum proprius est. Aequationes enim propositas atque auxiliares praeter ipsas (2.) omnes habere licet pro aequationum (2.) Integralibus earum reductioni inservientibus. Quae Integralia, licet particularia, talia sunt, ut aequationum differentialium eorum ope reductarum Multiplicator e Multiplicatore aequationum (2.) erui possit. Etenim si tantum aequationes (2.) proponerentur, loco aequationum

$$\frac{d^{\lambda_i-1} F_i}{dt^{\lambda_i-1}} = 0, \quad \frac{d^{\lambda_i-2} F_i}{dt^{\lambda_i-2}} = 0, \quad \dots \quad F_i = 0$$

ad reductionem adhiberi possent aequationum (2.) Integralia completa

$$\frac{d^{\lambda_i-1} F_i}{dt^{\lambda_i-1}} = c_1^{(i)}, \quad \frac{d^{\lambda_i-2} F_i}{dt^{\lambda_i-2}} = c_1^{(i)} t + c_2^{(i)}, \text{ etc.}$$

designantibus $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ etc. Constantes Arbitrarias. Multiplicator autem aequationum reductarum secundum §. 12. obtinetur dividendo aequationum (2.) Multiplicatorem per Determinans $\lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_n$ functionum

$$\frac{d^{\lambda_i-1}F_i}{dt^{\lambda_i-1}}, \quad \frac{d^{\lambda_i-2}F_i}{dt^{\lambda_i-2}}, \quad \dots \quad F_i,$$

formatum respectu differentialium eliminandorum, idque sive Constantibus Arbitrariis $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ etc. valores generales servantur, sive iis valores tribuuntur particulares, uti in quaestione proposita, in qua omnes statuuntur evanescere.

Aequationum (2.) Multiplicator definitur formula symbolica §. 15. tradita,

$$3. \qquad d\log M = \delta \log \Sigma \pm A_1' A_2'' \dots A_n^{(n)},$$

posito

$$4. \qquad A_x^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x^{(p_x)}}, \qquad \delta A_x^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x^{(p_x-1)}} dt.$$

Has quantitates secundum formulas (5.) et (6.) §. 30. sic exhibere licet,

$$5. \qquad A_x^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_x^{(p_x-\lambda_i)}}, \qquad \delta A_x^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_x^{(p_x-\lambda_i-1)}} dt + \lambda_i \, d A_x^{(i)}.$$

Unde ad condendam formulam (3.) sufficiunt datae aequationes (1.) numerorumque $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ cognitio. Observo si ponatur

$$\varDelta A_x^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_x^{(p_x-\lambda_i-1)}} dt + (\lambda_i - \alpha) d A_x^{(i)},$$

designante α numerum quemcunque, formulam (3.) abire in hanc,

$$d\log \frac{M}{\{\Sigma \pm A_1' A_2'' \dots A_n^{(n)}\}^{\alpha}} = \varDelta \log \Sigma \pm A_1' A_2'' \dots A_n^{(n)},$$

unde obtineri potest variationis formandae simplificatio.

In problemate isoperimetrico, quod aequatione $\delta \int U\, dt = 0$ continetur, expressio U praeter variabilem independentem t contineat n dependentes $x_1, x_2, \dots x_n$ atque differentialia ipsius x_1 usque ad $m_1$tum, ipsius x_2 usque ad $m_2$tum etc.: erunt aequationes differentiales integrandae,

$$6. \qquad \begin{cases} 0 = F_1 = \dfrac{d^{m_1} . \dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1} . \dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1-1)}}}{dt^{m_1-1}} \dots, \\ 0 = F_2 = \dfrac{d^{m_2} . \dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}}{dt^{m_2}} - \dfrac{d^{m_2-1} . \dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2-1)}}}{dt^{m_2-1}} \dots, \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 = F_n = \dfrac{d^{m_n} . \dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}}}{dt^{m_n}} - \dfrac{d^{m_n-1} . \dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n-1)}}}{dt^{m_n-1}} \dots \end{cases}$$

Si m_i omnium numerorum $m_1, m_2, \ldots m_n$ maximus est, aequationum auxiliarium systema facile constat obtineri differentiando aequationes $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ etc. respective $m_1 - m_2$, $m_1 - m_3$ etc. vicibus, unde fit

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = m_1 - m_2, \quad \lambda_3 = m_1 - m_3, \quad \ldots \quad \lambda_n = m_1 - m_n,$$
$$p_1 = 2m_1, \quad p_2 = m_1 + m_2, \quad p_3 = m_1 + m_3, \quad \ldots \quad p_n = m_1 + m_n.$$

Hinc eruitur

$$7. \quad \begin{cases} 0 = \varphi_1 = \dfrac{d^{m_1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1-1)}}}{dt^{m_1-1}} \cdots \\ 0 = \varphi_2 = \dfrac{d^{m_1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2-1)}}}{dt^{m_1-1}} \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \varphi_n = \dfrac{d^{m_1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n-1)}}}{dt^{m_1-1}} \cdots. \end{cases}$$

Unde per formulas $\S^i$ 30. sequitur

$$8. \quad \begin{cases} A_x^{(i)} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_x^{(m_1+m_x)}} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i)} \partial x_x^{(m_x)}}, \\ \delta A_x^{(i)} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_x^{(m_1+m_x-1)}} dt = m_1 \dfrac{d A_x^{(i)}}{dt} + B_{i,x}\, dt, \end{cases}$$

siquidem ponitur

$$B_{i,x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i)} \partial x_x^{(m_x-1)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i-1)} \partial x_x^{(m_x)}}.$$

Cum sit

$$A_x^{(i)} = A_i^{(x)} \text{ ideoque } \frac{\partial \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}}{\partial A_x^{(i)}} = \frac{\partial \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}}{\partial A_i^{(x)}},$$
$$B_x^{(i)} = -B_i^{(x)}, \quad B_i^{(i)} = 0,$$

in formanda variatione (3.) binorum terminorum aggregata

$$\left\{ \frac{\partial \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}}{\partial A_x^{(i)}} B_{i,x} + \frac{\partial \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}}{\partial A_i^{(x)}} B_{x,i} \right\} dt$$

evanescunt, unde ipsius $d \log M$ valor (3.) eruitur

$$\delta \log \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)} = m_1 d \log \Sigma \pm A' A_2'' \ldots A_n^{(n)},$$

ideoque

$$9. \quad M = \{\Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}\}^{m_1}.$$

Qua in formula ipsis $A_{\varkappa}^{(i)}$ valores (8.) substituendo patet, ***si m_1 maximus omnium m_1, m_2 etc., aequari M potestati m_1^{tae} Determinantis functionum***

$$\frac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}},\quad \frac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}},\quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}},$$

ipsarum $x_1^{(m_1)}$, $x_2^{(m_2)}$ etc. respectu formati.

§. 33.

Reductio ad formam normalem reductarumque aequationum differentialium Multiplicator sic obtinetur.

Quoniam aequationibus (2.) valores quantitatum

$$x_1^{(p_1)},\quad x_2^{(p_2)},\quad \ldots\ldots \quad x_n^{(p_n)}$$

determinantur, his quantitatibus expressiones φ_1, φ_2, ... φ_n aliae aliis afficiantur necesse est, ita ut eliminatio successiva locum habere possit. Sint

$$\varkappa_1,\quad \varkappa_2,\quad \ldots\ldots \quad \varkappa_n$$

ipsi numeri 1, 2, ... n inter se permutati, positoque

$$p_{\varkappa_i} = q_i$$

statuamus, quantitates $x_{\varkappa_1}^{(q_1)}$ ipsam φ_1, $x_{\varkappa_2}^{(q_2)}$ ipsam φ_2, ... $x_{\varkappa_n}^{(q_n)}$ ipsam φ_n afficere, quo nihil impeditur, quin functio φ_i praeter $x_{\varkappa_i}^{(q_i)}$ quantitatum $x_{\varkappa_1}^{(q_1)}$, $x_{\varkappa_2}^{(q_2)}$ etc. alias vel etiam omnes contineat. Supponamus

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \ldots\ldots \leqq \lambda_{n-1} \leqq \lambda_n,$$

atque fieri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 \ldots\ldots = \lambda_a = \alpha; \quad \lambda_{a+1} = \lambda_{a+2} \ldots\ldots = \lambda_b = \beta; \quad \text{etc.},\\ \lambda_{q+1} &= \lambda_{q+2} \ldots\ldots = \lambda_r = \varrho; \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} \ldots\ldots = \lambda_n = \sigma. \end{aligned}$$

Porro, designante μ numerum ipso λ_i non maiorem, statuamus

$$\frac{d^{\lambda_i-\mu}.F_i}{dt^{\lambda_i-\mu}} = \varphi_i^{(-\mu)},\qquad F_i = \varphi_i^{(-\lambda_i)}.$$

Iam ex aequationibus propositis et auxiliaribus seligamus haec $\alpha+1$ systemata n aequationum,

$$10.\quad \begin{cases} \varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = 0,\ \ \ldots\ \ \varphi_n = 0,\\ \varphi_1^{(-1)} = 0,\ \ \varphi_2^{(-1)} = 0,\ \ \ldots\ \ \varphi_n^{(-1)} = 0,\\ \varphi_1^{(-2)} = 0,\ \ \varphi_2^{(-2)} = 0,\ \ \ldots\ \ \varphi_n^{(-2)} = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_1 = 0,\ \ F_2 = 0,\ \ldots\ F_a = 0,\ \ \varphi_{a+1}^{(-\alpha)} = 0,\ \ \varphi_{a+2}^{(-\alpha)} = 0,\ \ldots\ \varphi_n^{(-\alpha)} = 0. \end{cases}$$

Systemate primo, secundo etc., ultimo respective determinantur quantitates

$$\begin{array}{llll} x_{x_1}^{(q_1)}, & x_{x_2}^{(q_2)}, & \dots & x_{x_n}^{(q_n)}, \\ x_{x_1}^{(q_1-1)}, & x_{x_2}^{(q_2-1)}, & \dots & x_{x_n}^{(q_n-1)}, \\ \dots & & & \\ x_{x_1}^{(q_1-\alpha)}, & x_{x_2}^{(q_2-\alpha)}, & \dots & x_{x_n}^{(q_n-\alpha)}. \end{array}$$

Unde aequationibus (10.) differentialia omnia exprimuntur per alia his postremis inferiora. Eadem ratione aequationibus

$$\begin{array}{l} \varphi_{a+1}^{(-\alpha-1)}=0,\; \varphi_{a+2}^{(-\alpha-1)}=0,\; \dots\; \varphi_{n}^{(-\alpha-1)}=0, \\ \varphi_{a+1}^{(-\alpha-2)}=0,\; \varphi_{a+2}^{(-\alpha-2)}=0,\; \dots\; \varphi_{n}^{(-\alpha-2)}=0, \\ \dots \\ F_{a+1}=0,\; F_{a+2}=0,\; \dots\; F_b=0,\; \varphi_{b+1}^{(-\beta)}=0,\; \dots\; \varphi_{n}^{(-\beta)}=0 \end{array}$$

differentialia omnia revocantur ad alia ipsis

$$x_{x_1}^{(q_1-\alpha)},\; x_{x_2}^{(q_2-\alpha)},\; \dots\; x_{x_a}^{(q_a-\alpha)},\; x_{x_{a+1}}^{(q_{a+1}-\beta)},\; \dots\; x_{x_n}^{(q_n-\beta)}$$

inferiora et ita porro. Postremo advocatis aequationibus

$$\begin{array}{l} \varphi_{r+1}^{(-\varrho-1)}=0,\; \varphi_{r+2}^{(-\varrho-1)}=0,\; \dots\; \varphi_{n}^{(-\varrho-1)}=0, \\ \varphi_{r+1}^{(-\varrho-2)}=0,\; \varphi_{r+2}^{(-\varrho-2)}=0,\; \dots\; \varphi_{n}^{(-\varrho-2)}=0, \\ \dots \\ F_{r+1}=0,\; F_{r+2}=0,\; \dots\; F_n=0 \end{array}$$

fit ut differentialia omnia ad alia revocentur inferiora ipsis

$$11.\quad x_{x_1}^{(q_1-\lambda_1)},\; x_{x_2}^{(q_2-\lambda_2)},\; \dots\; x_{x_n}^{(q_n-\lambda_n)}.$$

Formulae, quibus ista differentialia (11.) per inferiora exprimuntur, ipsum constituunt aequationum differentialium systema forma normali gaudens, ad quod propositae (1.) revocari possunt. Cuius Multiplicator secundum theoremata Cap. II. proposita eruitur $\frac{M}{D}$, designante D omnium functionum

$$\begin{array}{llll} \varphi_1^{(-1)}, & \varphi_1^{(-2)}, & \dots & \varphi_1^{(-\lambda_1)}, \\ \varphi_2^{(-1)}, & \varphi_2^{(-2)}, & \dots & \varphi_2^{(-\lambda_2)}, \\ \dots & & & \\ \varphi_n^{(-1)}, & \varphi_n^{(-2)}, & \dots & \varphi_n^{(-\lambda_n)} \end{array}$$

Determinans sumtum respectu quantitatum

$$\begin{array}{llll} x_{x_1}^{(q_1-1)}, & x_{x_1}^{(q_1-2)}, & \dots & x_{x_1}^{(q_1-\lambda_1)}, \\ x_{x_2}^{(q_2-1)}, & x_{x_2}^{(q_2-2)}, & \dots & x_{x_2}^{(q_2-\lambda_2)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{x_n}^{(q_n-1)}, & x_{x_n}^{(q_n-2)}, & \dots & x_{x_n}^{(q_n-\lambda_n)}. \end{array}$$

Functiones enim illas nihilo aequiparando obtinemus aequationes reducendis (2.) adhibitas; quantitates illae autem sunt ipsae harum aequationum ope eliminandae. Quae eliminationes vidimus successive institui posse, ita ut aequationes quas in eadem linea horizontali posui per se constituant systema totidem quantitatibus eliminandis sufficiens. Unde fit ut Determinans D productum evadat σ sive λ_n Determinantium functionalium simpliciorum,

$$\begin{aligned} D = & \prod_1^{\alpha} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1^{(-h)}}{\partial x_{x_1}^{(q_1-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_2^{(-h)}}{\partial x_{x_2}^{(q_2-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_n^{(q_n-h)}} \\ & \times \prod_{\alpha+1}^{\beta} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{\alpha+1}^{(-h)}}{\partial \varphi_{x_{\alpha+1}}^{(q_{\alpha+1}-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_{\alpha+2}^{(-h)}}{\partial x_{x_{\alpha+2}}^{(q_{\alpha+2}-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_{x_n}^{(q_n-h)}} \\ & \dots \dots \dots \dots \\ & \times \prod_{\varrho+1}^{\sigma} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{r+1}^{(-h)}}{\partial x_{x_{r+1}}^{(q_{r+1}-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_{r+2}^{(-h)}}{\partial x_{x_{r+2}}^{(q_{r+2}-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_{x_n}^{(q_n-h)}}, \end{aligned}$$

siquidem in hac formula, designante h indicem in functione aliqua f obvenientem, ipso $\prod_{\mu}^{\nu} f(h)$ designatur productum $f(\mu)f(\mu+1)f(\mu+2)\dots f(\nu)$. Iam in formula antecedente singula Determinantia functionalia, quae idem signum Π amplectatur, observo inter se aequalia evadere eademque fore ac si ubique index $-h$ omitteretur. Unde si ponimus

$$A_f^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i^{(-h)}}{\partial x_{x_f}^{(q_f-h)}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{x_f}^{(q_f)}} = \frac{\partial F_i}{\partial x_{x_f}^{(q_f-\lambda_i)}},$$

obtinetur:

$$\begin{aligned} 12. \quad D = & \{\Sigma \pm A_1' A_2'' \dots A_n^{(n)}\}^{\alpha} \\ & \times \{\Sigma \pm A_{\alpha+1}^{(\alpha+1)} A_{\alpha+2}^{(\alpha+2)} \dots A_n^{(n)}\}^{\beta-\alpha} \\ & \times \{\Sigma \pm A_{b+1}^{(b+1)} A_{b+2}^{(b+2)} \dots A_n^{(n)}\}^{\gamma-\beta} \\ & \dots \dots \dots \dots \\ & \times \{\Sigma \pm A_{r+1}^{(r+1)} A_{r+2}^{(r+2)} \dots A_n^{(n)}\}^{\sigma-\varrho}. \end{aligned}$$

Posito

$$13. \quad \Sigma \pm A_{i+1}^{(i+1)} A_{i+2}^{(i+2)} \dots A_n^{(n)} = R_i,$$

valor antecedens fit $R_0^a R_a^{\beta-a} R_b^{\gamma-\beta} \dots R_r^{\sigma-\varrho}$, qui etiam sic exhiberi potest,

$$14. \quad D = R_0^{\lambda_1} R_1^{\lambda_2-\lambda_1} R_2^{\lambda_3-\lambda_2} \dots R_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}},$$

qua de formula, si bini numeri se proxime insequentes λ_i et λ_{i+1} inter se aequales existunt, potestatem $R_i^{\lambda_{i+1}-\lambda_i}$ unitati aequalem reiicere licet.

Reductiones, quibus aequationes differentiales propositae ad formas normales antecedentibus assignatas revocantur, eae sunt quae omnium simplicissimo modo efficiuntur. Pro quibus supponere licet $\alpha = 0$ sive simul de omnibus numeris $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ eorum minimum detrahere licet; nam aequationum auxiliarium (10.) nonnisi ultima series ad reductionem adhibebatur. Formae normales illis reductionibus simplicissimis erutae tot existunt inter se diversae, quot modis numeri $1, 2, \dots n$ in talem ordinem $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_n$ disponi possunt, ut quantitates

$$\begin{array}{llll} x_{\varkappa_1}^{(q_1)}, & x_{\varkappa_2}^{(q_2)}, & \dots\ x_{\varkappa_a}^{(q_a)} & \text{aequationibus } \varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \dots \varphi_a = 0, \\ x_{\varkappa_{a+1}}^{(q_{a+1})}, & x_{\varkappa_{a+2}}^{(q_{a+2})}, & \dots\ x_{\varkappa_b}^{(q_b)} & \text{aequationibus } \varphi_{a+1} = 0, \ \varphi_{a+2} = 0, \dots \varphi_b = 0, \\ \dots & & & \\ x_{\varkappa_{r+1}}^{(q_{r+1})}, & x_{\varkappa_{r+2}}^{(q_{r+2})}, & \dots\ x_{\varkappa_n}^{(q_n)} & \text{aequationibus } \varphi_{r+1} = 0, \ \varphi_{r+2} = 0, \dots \varphi_n = 0 \end{array}$$

determinentur, siquidem in aequationibus illis quantitates illae solae pro incognitis, reliquae pro datis habentur. Reductiones ad has formas pauciores poscunt aequationes auxiliares eliminationesque ac si proponeretur reductio ad ullam aliam formam normalem, ex. gr. reductio vulgaris ad unicam aequationem differentialem inter duas variabiles, quae vel omnium maxime prolixa est. Neque pro aliis formis normalibus Determinans, per quod M dividendum est, concinnitate expressionis (12.) gaudet.

Antecedentia ad problema isoperimetricum propositum applicemus. Aequationum differentialium (7.) unaquaeque simul omnibus altissimis differentialibus

$$x_1^{(2m_1)}, \quad x_2^{(m_1+m_2)}, \quad \dots \quad x_n^{(m_1+m_n)}$$

afficitur; unde ipsi $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_n$ designare possunt numeros $1, 2, \dots n$ *quocunque modo* permutatos. Fit

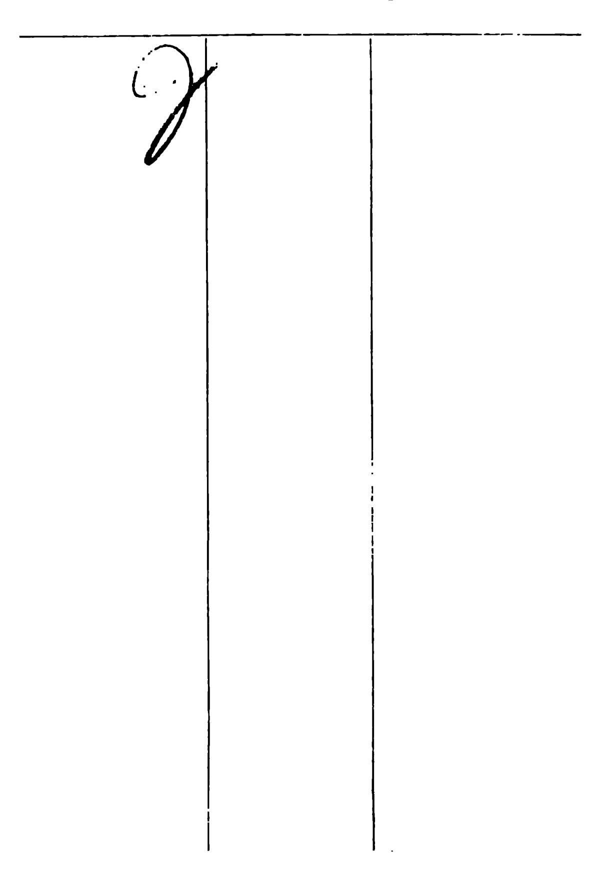
$$\lambda_i = m_1 - m_i, \qquad q_i = p_{\varkappa_i} = m_1 + m_{\varkappa_i}, \qquad q_i - \lambda_i = m_i + m_{\varkappa_i},$$

unde n quantitates (11.) abeunt in quantitates $x_{\varkappa_i}^{(m_i+m_{\varkappa_i})}$; porro fit

$$A_f^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_{\varkappa_f}^{(m_{\varkappa_f}+m_i)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_{\varkappa_f}^{(m_{\varkappa_f})} \partial x_i^{(m_i)}}.$$

Hinc, collectis formulis (9.) et (14.), fluit sequens theorema.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below



STORAGE AREA

116001



